ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΕΡΓΑ 2009-2010

ΤΑ ΕΡΓΑ ΕΙΝΑΙ *ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΑ*

ΟΜΩΣ

ΣΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ ΑΝΑΛΑΒΕΤΕ ΕΝΑ ΕΡΓΟ

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΤΟ ΦΕΡΕΤΕ ΣΕ ΠΕΡΑΣ

ΒΔ: Βαθμός δυσκολίας και % συμμετοχής στον τελικό βαθμό
🯅 : Μέγιστος αριθμός ατόμων που μπορούν να αναλάβουν το έργο
Ανάλυση άρθρου σημαίνει κατανόηση των βασικών αποτελεσμάτων και επιβεβαίωσή τους σε υπολογιστική πλατφόρμα (συνήθως το Matlab είναι αρκετό).

ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΩΝ

☑: Χρήσιμο/Ενδιαφέρον

	ΘΕΜΑ	ΒΔ	🯅
1	Αριθμητικά, Μέρος Πρώτο	**20**	(1)
2	Αριθμητικά, Μέρος Δεύτερο	**20**	(1)
3	Αριθμητικά, Μέρος Τρίτο	**20**	1
4	Αριθμητικά, Μέρος Τέταρτο	**20**	1
5	Αριθμητικά, Μέρος Πέμπτο	**20**	1
6	Αριθμητικά, Μέρος Έκτο	**20**	1
7	Αριθμητική IEEE	**20**	(1)
8	Η ευστάθεια ενός αλγορίθμου μπορεί να εξαρτάται από το πρόβλημα	**20**	1
9	Αυξάνοντας την ακρίβεια	**20**	1
10	Ο υπολογισμός του $(e^x - 1)/x$	**20**	1
11	Αναγνώριση παραμέτρων αριθμητικής	**20**	1
12	Ακρίβεια λύσης κυβικής εξίσωσης (MATLAB ή C)	**20**	1
13	Πίνακας Hilbert ☑	**20**	1
14	Σειρά von Neumann ☑	**20**	1
15	Ειδικός πίνακας	**20**	1
16	Αραιοί πίνακες	**20**	1
17	Συνοδοί πίνακες	**20**	1
18	Τριδιαγώνιοι πίνακες Toeplitz	**20**	1
19	Ανάλυση άρθρου για υπολογισμό ελεγξιμότητας	**30**	2

20	Ανάλυση άρθρου για υπολογισμό συγκροτημάτων Jordan	**40**	4
21	Ανάλυση άρθρου για υπολογισμό ιδιαζουσών τιμών	**30**	3
22	Ανάλυση άρθρου Wicks/DeCarlo για απόσταση από μη ελεγξιμότητα	**30**	2
23	Ανάλυση άρθρου Elsner/He για απόσταση από μη ελεγξιμότητα	**30**	2
24	Πίνακες με προκαθορισμένο συντελεστή κατάστασης (MATLAB) –*	**20**	1
25	Υπολογισμός συντελεστών Lyapunov	**40**	1
26	Επίλυση γραμμικού συστήματος με τη βοήθεια βελτιστοποίησης	**40**	1
27	Ανάλυση του άρθρου Chu/Malabre (Σ&ΑΕ μόνο)	**40**	2
28	Υλοποίηση της διάσπασης LU (Crout reduction) σε C ή Java	**20**	1
29	Απαρίθμηση πράξεων στην απαλοιφή Gauss	**30**	1
30	Ανάλυση ακρίβειας αντιστροφής ☑	**20**	(N)
31	Ανάλυση ακρίβειας σε πακέτο συμβολικού υπολογισμού	**20**	1
32	Προγραμματισμός της μεθόδου δυνάμεων για τον υπολογισμό ιδιοτιμών	**20**	1
33	Συμπίεση εικόνας με ιδιάζουσες τιμές ☑	**20**	(N)
34	Λύση πολυωνυμικών εξισώσεων για εύρεση ιδιοτιμών	**20**	1
35	Μορφή JORDAN	**20**	1
36	Ελάχιστα τετράγωνα	**20**	1
37	Πίνακες Householder και Givens	**20**	1
38	Ιδιάζουσες τιμές για δομημένους πίνακες (άρθρο Demmel) [+*Mathematica*]	**40**	2
39	Ανάλυση αλγορίθμων με βελτιστοποιημένη έρευνα (άρθρο Higham)	**40**	2
40	Διάσπαση Cholesky (LU για συμμετρικούς πίνακες)	**30**	1
41	Υπολογισμός του **π**	**20**	1
42	Τελευταίες εξελίξεις στην ταξινόμηση	**30**	2
43	Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel	**20**	1
44	Υπολογισμός εκθετικού ενός πίνακα (10 μονάδες/μέθοδο, max 40)	**40**	5
45	Έμμεσος υπολογισμός αντίστροφου (μέθοδος συμπληρώματος Schur) ☑	**20**	1
46	Έμμεσος υπολογισμός αντίστροφου (μέθοδος Strassen) ☑	**30**	1
47	Ακρίβεια και αριθμητική υπολογιστή	**20**	1
48	Αλυσίδες Markov	**30**	2
49	Το άθροισμα του Kahan (+Εξισορροπημένα αθροίσματα) (Mathematica)	**20+10**	1+1

ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΩΝ

Ο σκοπός του έργου είναι η εμβάθυνση σε ένα συγκεκριμένο, συνήθως στενό, αντικείμενο, το οποίο δεν μπορεί να καλυφθεί ικανοποιητικά στα πλαίσια της διδασκαλίας ή των ασκήσεων. Δίνεται έτσι η ευκαιρία για δοκιμή των βασικών γνώσεων, για εξάσκηση στον προγραμματισμό ή την εξοικείωση με κάποιο πακέτο λογισμικού, και για εξάσκηση στη συγγραφή τεχνικών κειμένων.

Όπως σε κάθε τεχνικό κείμενο ή παρουσίαση, το πρώτο που κοιτάει κανείς είναι ποιο είναι το κοινό-στόχος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το κοινό δεν είναι ο καθηγητής αλλά οι συνάδελφοι φοιτητές, δηλαδή άτομα με τεχνική εκπαίδευση και βασικές γνώσεις αλλά όχι απαραίτητα γνώστες των ιδιαιτεροτήτων του θέματος. Έτσι, είναι απαραίτητοι οι ορισμοί και η υποβοήθηση του κοινού ώστε να έχει μπροστά του ένα ολοκληρωμένο κείμενο και να μη χρειαστεί να ανατρέξει αλλού για να κατανοήσει το τι πραγματεύεται το έργο.

Επίσης ως συνήθως, το κείμενο έχει δομή που συνίσταται από την εισαγωγή και ορισμό του προβλήματος, την παρουσίαση και τον σχολιασμό της μεθοδολογίας, τα αποτελέσματα της ανάλυσης/εργασίας/προγραμματισμού/κλπ. με πλήρη καταγραφή των ενεργειών που εκτελέσθηκαν (ακόμα και των ατελέσφορων), και τα συμπεράσματα μαζί με τυχόν αναφορές και βιβλιογραφία. Πιθανόν να χρειαστεί και κάποιο παράρτημα με δεδομένα, καμπύλες και υλικό που είναι περιθωριακό ή υποβοηθητικό σε σχέση με το κυρίως κείμενο.

Εκτός από την τεχνική αρτιότητα, πρέπει να δοθεί προσοχή στην ορθογραφία, στην καλαίσθητη παρουσίαση, και την απόδοση μιας εικόνας ολοκληρωμένου και περιποιημένου έργου. Μικρές προτάσεις είναι προτιμότερες, το απλό λεξιλόγιο είναι προτιμότερο από το εξεζητημένο, και γενικά το απλό είναι καλύτερο. Φυσικά, το τεχνικό περιεχόμενο είναι πιο σημαντικό από τη λεκτική απόδοση και ένα κακό στυλ γραφής δεν θα επηρεάσει τελικά την τεχνική αξία σε ένα ενδιαφέρον επιστημονικά κείμενο, απλά θα μειώσει ίσως την αποτελεσματικότητά του. Τέλος το μήκος του κειμένου πρέπει να είναι τόσο όσο είναι απαραίτητο για την ολοκληρωμένη παρουσίαση της εργασίας και του υποστηρικτικού υλικού. Το «παραγέμισμα» και οι πλατειασμοί γίνονται εύκολα αντιληπτοί ακόμα και από κοινό μέσου επιπέδου και δημιουργούν αρνητική εντύπωση, καταλήγοντας ίσως στον «καταποντισμό» και του ποιοτικού υλικού που τυχόν εμπεριέχεται στο κείμενο. Τέλος, ένας πάντα σημαντικός παράγοντας αύξησης της αξίας ενός (οποιουδήποτε) έργου είναι η πρωτοβουλία που αναπτύσσεται και η υπέρβαση του μέτριου και συνηθισμένου, ακόμα κι αν αυτό μείνει στα όρια της προσπάθειας μόνο.

■

1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ, ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ...

Α. Ξαναγράψτε τις ακόλουθες εκφράσεις με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφευχθεί η αμοιβαία εξουδετέρωση των όρων τους:

1. $\sqrt{x+1}-1, \quad x \cong 0$
2. $\sin x - \sin y, \quad x \cong y$
3. $x^2 - y^2, \quad x \cong y$
4. $(1-\cos x)/\sin x, \quad x \cong 0$
5. $c = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{1/2}, \quad a \cong b, \quad |\theta| << 1$

Β. Βρείτε ευσταθείς τύπους για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ($x + iy$) ενός μιγαδικού αριθμού ($a + ib$).

2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ, ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ...

Α. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

δείξτε πως μπορεί να υπολογισθεί με ακρίβεια το $(1 + 1/n)^n$ για μεγάλο n (υποθέτοντας ότι η συνάρτηση log υπολογίζεται με σχετικό σφάλμα που δεν υπερβαίνει το u).

Β. Θεωρήστε την αναδρομική σχέση

$$x_{k+1} = 111 - \; 1130 - 3000/x_{k-1} \; /x_k$$
$$x_0 = 11/2$$
$$x_1 = 61/11$$

Σε ιδανική αριθμητική η ακολουθία x_k είναι μονοτόνως αύξουσα και συγκλίνει στο 6. Υλοποιήστε την ακολουθία αυτή στον υπολογιστή (ή σε αριθμομηχανή) και συγκρίνετε το υπολογισθέν x_{34} με την πραγματική τιμή τεσσάρων σημαντικών ψηφίων 5,998. Εξηγείστε αυτό που εμφανίζεται.

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ, ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ...

A> Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 5000,0002x + 1 = 0$$

με κάποιο πακέτο (π.χ. Matlab) και με το χέρι. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

B> Ο x έχει προσέγγιση $\hat{x}$ = 123,456 με σχετικό σφάλμα που φράζεται από το 0,1. Ποια είναι τα όρια του x;

Γ> Ποιο είναι το απόλυτο σφάλμα στην προσέγγιση του 1/3 με 0,33333; Αν ο 0,33333 είναι η σωστή αναπαράσταση όπως αριθμού x ποια είναι τα δυνατά όρια του x;

Δ> Γράψτε το e σε κανονικοποιημένη μορφή κινητής υποδιαστολής για

- βάση 10 (8 σημαντικά ψηφία)
- βάση 2 (30 σημαντικά ψηφία)
- βάση 16 (8 σημαντικά ψηφία)

4. **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ, ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ...**

Να βρεθεί ο αριθμός των όρων που απαιτούνται για να υπολογισθεί το $e^{0,5}$ με σφάλμα αποκοπής φραγμένο από το 10^{-8}.

Εκτιμήστε το σφάλμα στον υπολογισμό του e^{8} αν το $e^{0,5}$ υψωθεί στο τετράγωνο 4 φορές.

5. **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ, ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟ...**

Εκτιμήστε το τελικό σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του

$$f(x,y,z) = x^2 + y/z$$

από δεδομένα κινητής υποδιαστολής $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$.

Εφαρμογή $\hat{x} = 1,23$, $\hat{y} = 2,34$, $\hat{z} = 3,45$

(Οι αριθμοί θεωρούνται σωστά στρογγυλοποιημένοι όπως έχουν δοθεί πιο πάνω.)

6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ, ΜΕΡΟΣ ΕΚΤΟ...

Με την χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής

$$f(x) - f(\hat{x}) = (x - \hat{x})\, f'(\xi), \quad \xi \in [x, \hat{x}]$$

υπολογίστε το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό της *f*(.).
Μπορείτε για ευκολία να θεωρήσετε ότι ο υπολογισμός της f πραγματοποιείται χωρίς σφάλμα.

Εφαρμογή για $f(x) = x^{1/3}$ με $\hat{x} = 64,00.$

[+10%] Επεκτείνετε το αποτέλεσμα σε συναρτήσεις δυο μεταβλητών.

7. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ IEEE

Α. Πόσοι αριθμοί με αναπαράσταση διπλής ακρίβειας βρίσκονται μεταξύ δυο διαδοχικών (μη μηδενικών) αριθμών με αναπαράσταση απλής ακρίβειας;

Β. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος p τέτοιος που όλοι οι ακέραιοι στο διάστημα $[-p, p]$ έχουν ακριβή αναπαράσταση σε αριθμητική IEEE διπλής ακρίβειας; Ποιος είναι ο αντίστοιχος p για αναπαράσταση απλής ακρίβειας;

Γ. Ποια από τα ακόλουθα είναι αληθή σε αριθμητική IEEE εάν υποθέσουμε ότι οι a και b είναι κανονικοποιημένοι αριθμοί κινητής υποδιαστολής και δεν συμβούν εξαιρέσεις όταν εκτελούνται οι πράξεις;

1. $\mathrm{fl}(a \text{ op } b) = \mathrm{fl}(b \text{ op } a)$, op = +,*
2. $\mathrm{fl}(b - a) = -\mathrm{fl}(a - b)$
3. $\mathrm{fl}(a + a) = \mathrm{fl}(2*a)$
4. $\mathrm{fl}(0{,}5 * a) = \mathrm{fl}(a/2)$
5. $\mathrm{fl}((a + b) + c) = \mathrm{fl}(a + (b + c))$
6. $a \le \mathrm{fl}((a + b)/2) \le b$, εάν $a \le b$

Δ. Προβλέψετε το αποτέλεσμα και μετά υπολογίστε τα παρακάτω σε περιβάλλον που υποστηρίζει αριθμητική IEEE (καμιά από όπως εκφράσεις δεν ορίζεται επίσημα):

1^{∞}	NaN^{0}
2^{∞}	∞^{0}
$\exp(\infty)$, $\exp(-\infty)$	1^{NaN}
sign(NaN), sign(−NaN)	$\log(\infty)$, $\log(-\infty)$, $\log(0)$

8. Η ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΕΝΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Βλ. κείμενο

9. ΑΥΞΑΝΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΚΡΙΒΕΙΑ

Βλ. Κείμενο

10. Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ $(e^x - 1)/x$

Βλ. Κείμενο

11. ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Βλ. Κείμενο

12. ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΛΥΣΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ (MATLAB Η C)

Βλ. Κείμενο

13. ΠΙΝΑΚΑΣ HILBERT (MATLAB)

Ένας πίνακας Hilbert, **A**, διαστάσεων $n \times n$, ορίζεται από τη σχέση

$a_{ij} = 1/(i + j - 1)$ για $i, j = 1, 2, \ldots, n$

I. Βρείτε τον αντίστροφο του **A** και τον αντίστροφο του $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ για $n = 5$.

II. Στη συνέχεια, παρατηρώντας ότι $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^{-1})^T$, βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης για $n = 3, 4, 5, 6$. Συγκρίνετε την ορθότητα των δυο αποτελεσμάτων χρησιμοποιώντας τη ρουτίνα **`invhilb`** που δίνει το ακριβές αποτέλεσμα.
[Για τη σύγκριση υπολογίστε τις νόρμες $(\mathbf{Q} - \mathbf{R})$ και $(\mathbf{P} - \mathbf{R})$ όπου $\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^{-1})^T$, και **R** είναι ο ακριβής αντίστροφος]

III. Υπολογίστε τον συντελεστή κατάστασης του $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ για $n = 3, 4, 5, 6$, και ερμηνεύστε τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος.

14. ΣΕΙΡΑ VON NEUMANN (MATLAB)

Ο John von Neumann απέδειξε ότι η σειρά

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\cdots$$

συγκλίνει όταν οι ιδιοτιμές του πίνακα **A**, διαστάσεων $n\times n$, είναι όλες μικρότερες από τη μονάδα. Μια περίπτωση για την οποία ισχύει αυτή η συνθήκη είναι ο τριδιαγώνιος $n\times n$ πίνακας

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

όπου $a + 2b < 1$.

I. Πειραματισθείτε με διάφορες τιμές των n, a, και b για να δείξετε τη σύγκλιση της σειράς.

II. Υπολογίστε για n = 20, 30, 40, 50 τη λύση του συστήματος με $a = 2$, $b = 1$ και δεξιό μέλος το $[1\ 1\ 1\ \ldots\ 1]^T$

III. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα για n = 10, 20, 30. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με τις ορθές τιμές που δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_k = a + 2b\cos[k\pi/(n+1)], \quad k = 1, 2, \ldots$$

15. ΕΙΔΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ (MATLAB)

Δημιουργήστε τον πίνακα

$$\mathbf{E} = [1 / (n + 1)]\ \mathbf{C}$$

όπου

$$\begin{aligned} c_{ij} &= i\,(n-i+1) && \text{αν} \quad i = j \\ &= c_{i,\,j-1} - i && \text{αν} \quad j > i \\ &= c_{ji} && \text{αν} \quad j < i \end{aligned}$$

I. Επιλύστε το σύστημα $\mathbf{Ex} = \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{b} = [1\ 2\ 3\ \ldots\ n]^{\mathrm{T}}$ χρησιμοποιώντας πρώτα τον τελεστή \ και μετά τη συνάρτηση **`lu`** με εμπροσθόδρομη και οπισθόδρομη αντικατάσταση.

II. Υπολογίστε τον αντίστροφο του **E** για n = 20 και 50. Συγκρίνετε με τον ακριβή αντίστροφο που είναι τριδιαγώνιος και αποτελείται από 2 στην κύρια διαγώνιο και −1 στις παράπλευρες διαγωνίους.

III. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του **E** για n = 20 και 50. Συγκρίνετε με τις ακριβείς ιδιοτιμές που δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_k = 1/\;\; 2 - 2\cos[k\pi/(n+1)]\;\;, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

IV. Υπολογίστε τον συντελεστή κατάστασης του **E** με τη συνάρτηση **`cond`** για n = 20 και 50. Συγκρίνετε με την ακριβή τιμή $4n^2/\pi^2$.

16. ΑΡΑΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Βλ. κείμενο.

17. ΣΥΝΟΔΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Βλ. κείμενο.

18. ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ TOEPLITZ

Βλ. κείμενο.

19. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΘΡΟΥ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑΣ

Βλ. Κείμενο

20. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΘΡΟΥ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΣΥΓΚΡΟΤΗΜΑΤΩΝ JORDAN

Βλ. Κείμενο

21. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΘΡΟΥ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΙΔΙΑΖΟΥΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Βλ. Κείμενο

22. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΘΡΟΥ WICKS/DECARLO ΓΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΟΠΩΣ ΜΗ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ

Βλ. Κείμενο

23. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΘΡΟΥ ELSNER/HE ΓΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΟΠΩΣ ΜΗ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ

Βλ. Κείμενο

24. ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕ ΠΡΟΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ (MATLAB)

Βλ. Κείμενο

25. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ LYAPUNOV

Ερευνητικό έργο (βοήθεια αν αποδειχθεί απαραίτητη)

26. ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ερευνητικό έργο (βοήθεια αν αποδειχθεί απαραίτητη)

27. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΑΡΘΡΟΥ Chu/Malabre (Σ&ΑΕ μόνο)

28. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ LU (Crout reduction) ΣΕ C ή Java

29. ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΠΑΛΟΙΦΗ GAUSS [30%]

Η βασική πράξη κινητής υποδιαστολής στον υπολογιστή ονομάζεται *flop* (floating point operation) και περιλαμβάνει τα +, −, ×, ÷. Π.χ. το 2+3×π εμπεριέχει 2 *flops*. Σκοπός του έργου είναι να καταμετρηθούν οι πράξεις που απαιτούνται για την εκτέλεση της απαλοιφής Gauss συμπεριλαμβανομένης της αντικατάστασης προς τα πίσω.

30. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Στο MATLAB (για παράδειγμα) γράψτε ένα πρόγραμμα που θα εκτελεί τα εξής:

1. Δημιουργήστε μια ακολουθία από τετραγωνικούς πίνακες A διαστάσεων $N\times N$, με N για παράδειγμα 10 ή 20, με τυχαία στοιχεία (π.χ. με την εντολή `rand`).
2. Από την ακολουθία αυτή επιλέξτε τον πίνακα με τον μεγαλύτερο συντελεστή κατάστασης, έστω $A_{\max}$ και τον πίνακα με τον μικρότερο συντελεστή κατάστασης, έστω $A_{\min}$. Ο πρώτος πρέπει να είναι τουλάχιστον της τάξης των 500.000 (για να το καταφέρετε η ακολουθία πρέπει να έχει μήκος 10.000 ή παραπάνω).
3. Εξετάστε το σφάλμα στην αντιστροφή του $A_{\max}$ και συγκρίνετέ το με το σφάλμα στην αντιστροφή του $A_{\min}$. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας κυρίως όσον αφορά την αναμενόμενη ακρίβεια.
4. Στη συνέχεια εκτελέστε τη διάσπαση LU για τους δυο αυτούς πίνακες.
5. Βρείτε τους αντίστροφους $A_{\max}^{-1}$ και $A_{\min}^{-1}$ με τη βοήθεια της διάσπασης LU επιλύνοντας το γνωστό σύνολο συστημάτων (όπως περιγράφεται στο βιβλίο). Συγκρίνετε τα σφάλματα με αυτά στο βήμα 3.
6. Σχηματίστε τους αντίστροφους $A_{\max}^{-1} = U_{\max}^{-1} L_{\max}^{-1}$ και $A_{\min}^{-1} = U_{\min}^{-1} L_{\min}^{-1}$
7. Συγκρίνετε την ακρίβεια στους νέους αντίστροφους με αυτούς του βήματος 3 και του βήματος 5 και καταγράψτε πάλι τις παρατηρήσεις σας.

31. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΣΕ ΠΑΚΕΤΟ ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ (Mathematica, Maple, …)

Σε ένα πακέτο συμβολικού υπολογισμού (Mathematica, Maple, …) ορίστε τον παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -15 & -6 & 12 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

και υπολογίστε (1) την τάξη του και (2) την κλιμακωτή του μορφή (reduced row echelon form), κάτι ανάλογο με την απαλοιφή Gauss.

Στη συνέχεια είτε μετατρέψτε τον ορισμό του A σε μορφή κινητής υποδιαστολής και ξαναϋπολογίστε τα παραπάνω, ή χρησιμοποιήστε το MATLAB. Αν υπάρξουν διαφορές, ποιες είναι οι πραγματικά ορθές απαντήσεις;

32. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Η μέθοδος των δυνάμεων για τον υπολογισμό ιδιοτιμών είναι πολύ απλή αλλά αποτελεσματική. Περιγράφεται στο συνημμένο κείμενο. Προγραμματίστε την σε C ή Java.

33. ΣΥΜΠΙΕΣΗ ΕΙΚΟΝΑΣ ΜΕ ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

Από το

$$A = UWV^T$$

έχουμε ότι

$$A = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \ldots + w_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^T$$

όπου τα διανύσματα αντιστοιχούν στις στήλες των πινάκων U και V.

Αν σχηματίσουμε τα μερικά αθροίσματα

$$A = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \ldots + w_k\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^T, \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

έχουμε την προσέγγιση τάξης k του πίνακα A, που είναι η πλησιέστερη στον A από όλες τις δυνατές προσεγγίσεις. Με τον τρόπο αυτόν, μπορούμε να προσεγγίσουμε (με απώλειες φυσικά) ένα οποιοδήποτε πίνακα, π.χ. την αναπαράσταση σε πίνακα με αριθμούς κινητής υποδιαστολής μιας εικόνας.

Αναπαραστήστε μια εικόνα σε ένα πίνακα π.χ. 1000×1000, και ας πούμε ότι η ιδιάζουσα τιμή w_{21} είναι πολύ πιο μικρή από τις προηγούμενες. Τότε κρατάμε μόνο τις 20 πρώτες στήλες του U και τις αντίστοιχες του V, και τις ιδιάζουσες τιμές φυσικά, σύνολο 40020 αριθμούς. Αυτοί αντικαθιστούν τους 1000000 αριθμούς που θα έπρεπε να αποθηκεύσουμε κανονικά. Πειραματιστείτε με μερικές εικόνες για να δείτε την υποβάθμιση σε σχέση με την ποσότητα αποθήκευσης που αποφεύγουμε.

34. ΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Το πολυώνυμο

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

μπορεί να αντιστοιχηθεί με ένα πίνακα («συνοδό»)

$$C(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

του οποίου οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Χρησιμοποιήστε σε ένα υπολογιστικό πακέτο τη μέθοδο αυτή για να βρείτε τις ρίζες μερικών πολυωνύμων τρίτου και τέταρτου βαθμού με συντελεστές της επιλογής σας. Μετά εξετάστε το πολυώνυμο

$$f(x) = 5 + 11x + 4x^2 + 6x^3 + x^4 - 15x^5 + 5x^6 - 3x^7 - 2x^8 + 8x^9 - 5x^{10} + x^{11}$$

και ελέγξτε την ποιότητα συγκρίνοντας τα δυο σύνολα ριζών (π.χ. σχηματίστε το γινόμενο των γραμμικών παραγόντων $x - \lambda$ από τις ιδιοτιμές και το αντίστοιχο γινόμενο με τις ρίζες που δίνει η κατάλληλη εντολή για εύρεση ριζών).

35. ΜΟΡΦΗ JORDAN

Βρείτε την μορφή Jordan του πιο κάτω πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -4 & 2 & -2 & 4 & -4 & 8 & -6 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 & -3 & 6 & -6 & 12 & -9 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 4 & -4 & 8 & -8 & 16 & -12 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 5 & -4 & 10 & -10 & 20 & -15 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -2 & 12 & -12 & 24 & -18 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 15 & -13 & 28 & -21 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 15 & -11 & 32 & -24 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 15 & -14 & 37 & -26 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 15 & -14 & 36 & -25 \end{bmatrix}$$

36. ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει την εξέλιξη κρουσμάτων AIDS σε μια χρονική περίοδο.

ΕΤΟΣ	Αριθμός ασθενών AIDS
1981	295
1982	1079
1983	2919
1984	5918
1985	11067
1986	18075
1987	26937
1988	32620
1989	36704
1990	41616
1991	43701
1992	45472

Να μοντελοποιηθεί το σύνολο αυτό υποθέτοντας ένα τριτοβάθμιο μοντέλο

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

όπου x είναι το έτος (αρχίζοντας από το 0). Να καταστρωθούν και να λυθούν οι απαραίτητες εξισώσεις για την εκτίμηση των παραμέτρων a, b, c, και d, και να μελετηθεί το σφάλμα.

37. ΠΙΝΑΚΕΣ HOUSEHOLDER ΚΑΙ GIVENS

1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και η ορίζουσα του πίνακα Householder και του πίνακα Givens.
2. Αν $x \in \mathbb{R}^n$ και P είναι πίνακας Householder με

   $$Px = \pm \|x\|_2 \, e_1$$

   και μας δίνονται οι περιστροφές Givens $G_{1,2}, \cdots, G_{n-1,n}$ τέτοιες ώστε

   $$Qx = G_{1,2} \cdots G_{n-1,n} x = \pm \|x\|_2 \, e_1$$

   τότε ισχύει ότι $P = Q$;

38. ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΔΟΜΗΜΕΝΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ (ΑΡΘΡΟ DEMMEL) [+*Mathematica*]

βλ. άρθρο

39. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΜΕ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΕΡΕΥΝΑ (ΑΡΘΡΟ Higham)

βλ. άρθρο

40. ΔΙΑΣΠΑΣΗ CHOLESKY

Η διάσπαση Cholesky αναφέρεται σε παραγοντοποίηση (διάσπαση) LU για συμμετρικούς πίνακες. Βρείτε όσες πληροφορίες μπορείτε σχετικά με αλγορίθμους, σύγκλιση, ιδιότητες, κλπ. Ερευνητικού τύπου έργο (αν και βασικά βιβλιογραφικό).

41. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ π

Ένας από τους δεκάδες τύπους για τον υπολογισμό του π είναι ο

$$\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + \dots$$

Για να υλοποιηθεί η μέθοδος αυτή, δημιουργήστε κατ' αρχήν ένα array με τουλάχιστον 250.000 θέσεις διπλής ακρίβειας που θα περιέχουν τους αντίστοιχους όρους της πιο πάνω σειράς. Με απλή ακρίβεια αθροίστε το array από την αρχή προς το τέλος και μετά από το τέλος προς την αρχή. Καταγράψτε τα αποτελέσματα και διερευνήστε τα εξής:

1. Ποια σφάλματα υπεισέρχονται στον υπολογισμό και απομακρύνουν το αποτέλεσμα από την ιδανική τιμή;
2. Έχει σημασία η σειρά με την οποία αθροίζουμε τους όρους της σειράς;
3. Ποιος τρόπος δίνει πιο αξιόπιστο αποτέλεσμα και γιατί;

42. ΤΕΛΕΥΤΑΙΕΣ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ (SORTING)

Ερευνητικό έργο. Να καταγραφούν οι πρόσφατες εξελίξεις στους αλγορίθμους ταξινόμησης, όπως δίκτυα ταξινόμησης, ο αλγόριθμος των Burrows-Wheeler, κλπ.

43. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL

βλ. Κείμενο

44. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΚΘΕΤΙΚΟΥ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ [ΣΑΕ]

Σε ένα διάσημο άρθρο οι Moler και Van Loan εξηγούν ότι υπάρχουν 19 τρόποι να υπολογιστεί το εκθετικό ενός πίνακα και κανείς από αυτούς δεν είναι 100% αξιόπιστος. Αυτές οι μέθοδοι υπολογισμού μπορούν να υλοποιηθούν και να συγκριθούν μεταξύ τους. Δίνονται 10 μονάδες για κάθε μέθοδο που υλοποιείται και τις σχετικές συγκρίσεις με μέγιστο το 40%.

45. ΕΜΜΕΣΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ (ΜΕΘΟΔΟΣ SCHUR)

Ισχύει η εξής σχέση:

$$\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + E\Delta^{-1}F & -E\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}F & \Delta^{-1} \end{pmatrix}$$

όπου

$$\Delta = B - CA^{-1}D$$

$$E = A^{-1}D$$

$$F = CA^{-1}$$

Διερευνήστε την ακρίβεια αυτής της μεθόδου με πρακτικό τρόπο (δηλ. δοκιμές για πίνακες διαφόρων διαστάσεων).

46. ΕΜΜΕΣΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ (ΜΕΘΟΔΟΣ STRASSEN)

Για ένα πίνακα A, διαστάσεων $n \times n$ με άρτιο n:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad n = 2m$$

ισχύει η εξής σχέση

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 - P_3 P_6 P_2 & P_3 P_6 \\ P_6 P_2 & -P_6 \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad \begin{aligned} P_1 &= A_{11}^{-1} \\ P_2 &= A_{21} P_1 \\ P_3 &= P_1 A_{12} \\ P_4 &= A_{21} P_3 \\ P_5 &= P_4 - A_{22} \\ P_6 &= P_5^{-1} \end{aligned}$$

όπου οι αντιστροφές των P_1 και P_6 εκτελούνται με τη χρήση της ίδιας της μεθόδου.

Για τον πολλαπλασιασμό πινάκων χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Strassen που συνίσταται στον «τεμαχισμό» των πινάκων έτσι ώστε να έχουμε

$$C = AB \rightarrow \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= P_1 + P_4 - P_5 + P_7 \\ C_{12} &= P_3 + P_5 \\ C_{21} &= P_2 + P_4 \\ C_{22} &= P_1 + P_3 - P_2 + P_6 \end{aligned} \quad \text{όπου} \quad \begin{aligned} P_1 &= \quad A_{11} + A_{22} \quad B_{11} + B_{22} \\ P_2 &= \quad A_{21} + A_{22} \quad B_{11} \\ P_3 &= A_{11} \quad B_{12} - B_{22} \\ P_4 &= A_{22} \quad B_{21} - B_{11} \\ P_5 &= \quad A_{11} + A_{12} \quad B_{22} \\ P_6 &= \quad A_{21} - A_{11} \quad B_{11} + B_{12} \\ P_7 &= \quad A_{12} - A_{22} \quad B_{21} + B_{22} \end{aligned}$$

Διερευνήστε την ακρίβεια αυτής της μεθόδου με πρακτικό τρόπο (δηλ. δοκιμές για πίνακες διαφόρων διαστάσεων).

47. ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

Θεωρήστε το εξής κλάσμα

$$r(x) = 7 - \cfrac{3}{x - 2 - \cfrac{1}{x - 7 + \cfrac{10}{x - 2 - \cfrac{2}{x - 3}}}}$$

και την εναλλακτική του αναπαράσταση

$$r(x) = \frac{7x - 101 \;\; x + 540 \;\; x - 1204 \;\; x + 958}{x - 14 \;\; x + 72 \;\; x - 151 \;\; x + 112}$$

όπου τα πολυώνυμα έχουν γραφεί σύμφωνα με τον «κανόνα του Horner» που είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για τον αριθμητικό υπολογισμό ενός πολυωνύμου.

Συγκρίνετε τις δυσκολίες και το σφάλμα στον υπολογισμό των δυο εναλλακτικών μορφών για διάφορες τιμές του x συμπεριλαμβανομένων και μεγάλων τιμών που θα φροντίσετε να πλησιάσουν και να ξεπεράσουν το όριο του overflow.

Πιο συγκεκριμένα, μελετήστε και τη συμπεριφορά του σχετικού σφάλματος στην περιοχή $x \in [0, 4]$ για τουλάχιστον 200 σημεία.

48. ΑΛΥΣΙΔΕΣ MARKOV

Βιβλιογραφική έρευνα για τις τελευταίες εξελίξεις στην επίλυση αλυσίδων Markov μεγάλων διαστάσεων.

49. ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΟΥ KAHAN (+ΕΞΙΣΟΡΡΟΠΗΜΕΝΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ)

Όταν υπολογίζουμε το άθροισμα N αριθμών, δεδομένου ότι οι εμπλεκόμενοι αριθμοί μπορεί να διαφέρουν πολύ σε μέγεθος και με το γεγονός της συσσώρευσης σφάλματος, είναι δυνατόν το τελικό αποτέλεσμα να έχει χάσει πολύ σε ορθότητα. Μια τεχνική για την αντιμετώπιση αυτής της ανεπιθύμητης κατάστασης είναι να εφαρμόσουμε την άθροιση Kahan που λαμβάνει υπόψη της το σφάλμα σε κάθε βήμα:

```
S = X[1];
C = 0;
for j = 2 to N {
Y = X[j] - C;
T = S + Y;
C = (T - S) - Y;
S = T;
}
```

Υπάρχουν και πιο εξεζητημένες προσεγγίσεις (+10%).

Κάποιο υλικό θα δοθεί, αλλά καλό θα ήταν να γίνει και μια μικρή έρευνα στο Διαδίκτυο.