# ΑΣΚΗΣΗ 206

## ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ - ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

Αντικείμενο της άσκησης αυτής είναι α) η απλοποίηση κυκλωμάτων βάσει του θεωρήματος Thevenin περί ισοδύναμης πηγής με πειραματική εφαρμογή του σε κύκλωμα γέφυρας συνεχούς ρεύματος και β) η πειραματική επαλήθευση του θεωρήματος μέγιστης ισχύος.

θ

### Α. ΘΕΩΡΗΜΑ THEVENIN ή ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗΣ ΠΗΓΗΣ

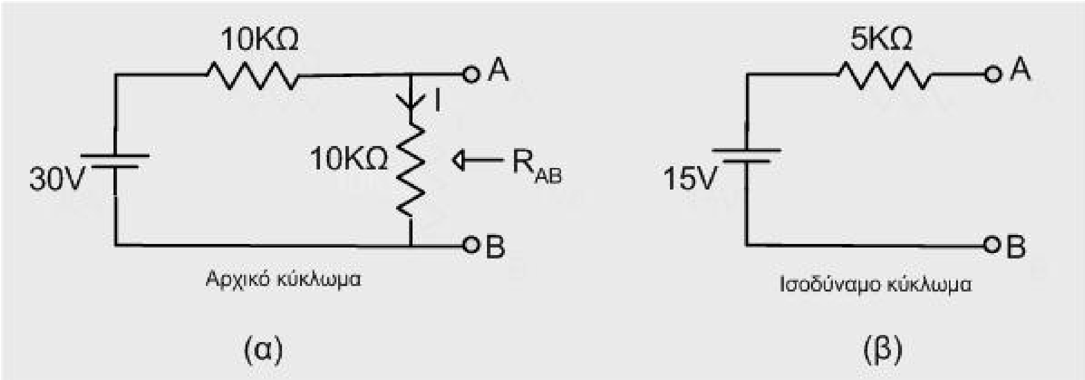
Ένα οποιοδήποτε γραμμικό κύκλωμα που διεγείρεται από πηγές τάσης ή/και ρεύματος οποιασδήποτε συχνότητας, θεωρούμενο από δύο οποιουσδήποτε ακροδέκτες του μπορεί να αντικατασταθεί ισοδύναμα από μία πηγή τάσης $\mathbf{V_0}$ εν σειρά με μία σύνθετη αντίσταση $\mathbf{Z_0}$, όπου $\mathbf{V_0}$ είναι η εν κενώ τάση(τάση ανοικτού κυκλώματος) μεταξύ των ακροδεκτών αυτών και $\mathbf{Z_0}$ η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος υπολογιζόμενη από τους ίδιους ακροδέκτες όταν όλες οι ανεξάρτητες πηγές ρεύματος και τάσης του κυκλώματος είναι μηδενικές.
Σημειώστε ότι μηδενισμός πηγής τάσης σημαίνει οτι στη θέση της πηγής έχουμε βραχυκύκλωμα ενώ μηδενισμός πηγής έντασης σημαίνει οτι στη θέση της πηγής έχουμε ανοικτό κύκλωμα.

Με το θεώρημα Thevenin μπορούμε να μετασχηματίσουμε σύνθετα κυκλώματα πολλαπλών βρόχων σε απλούστερα ισοδύναμα κυκλώματα με λιγότερους βρόχους ή ακόμη και σε κυκλώματα ενός βρόχου. Το ισοδύναμο κύκλωμα ως προς ένα ζεύγος ακροδεκτών προσδιορίζεται

- Με υπολογισμό ή μέτρηση της τάσης εν κενώ[(*)] μεταξύ των ακροδεκτών και
- Με υπολογισμό ή μέτρηση της σύνθετης αντίστασης μεταξύ των ακροδεκτών όταν οι πηγές τάσης είναι βραχυκυκλωμένες και οι πηγές έντασης ανοικτοκυκλωμένες. (Αυτό ισχύει για κυκλώματα στα οποία έχουμε μόνο ανεξάρτητες πηγές τάσης ή έντασης.)

[(*)] “εν κενώ” σημαίνει ότι δεν συνδέεται κανένα εξωτερικό φορτίο στους ακροδέκτες του κυκλώματος

**Παράδειγμα**




Σχ.1.

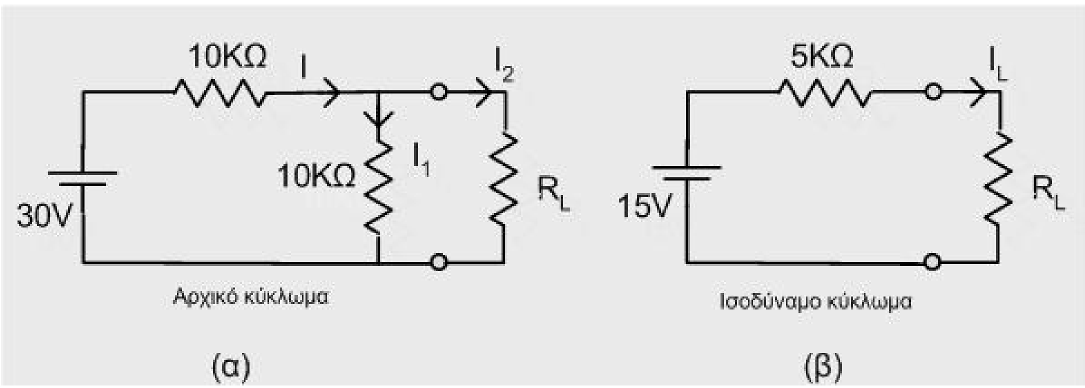
Θεωρήστε το κύκλωμα του Σχ.1α.
Η τάση εν κενώ είναι

$$V_{AB} = I \cdot 10K\Omega = \frac{30}{20 \times 10^3} 10 \times 10^3 = 15V$$

Η αντίσταση $R_{AB}$ με βραχυκυκλωμένη την πηγή τάσης ισούται με

$$R_{AB} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^3 = 5K\Omega$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα κατά Thevenin φαίνεται στο Σχ.1β. Το κύκλωμα αυτό συμπεριφέρεται ακριβώς όπως το αρχικό κύκλωμα 1α, όσον αφορά στα μεγέθη τα εμφανιζόμενα σε οποιαδήποτε αντίσταση συνδεθεί μεταξύ των σημείων Α και Β. Για παράδειγμα, αν συνδεθεί μία αντίσταση $R_L$=10 KΩ ως φορτίο στα Α,Β, οι εντάσεις που θα διαρρέουν την $R_L$ στα δύο κυκλώματα 1α και 1β θα είναι αντίστοιχα,



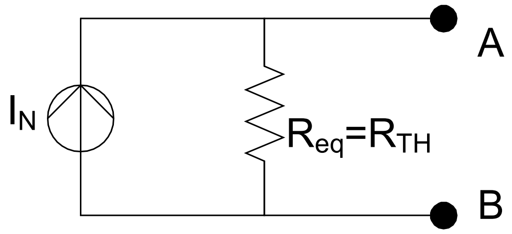
$$I = I_1 + I_2 \quad , \quad I_1 = I_2 \quad , \quad I_2 = \frac{I}{2}$$

$$I = \frac{30}{10 \cdot 10^3 + \dfrac{10 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3}} = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} \qquad I_L = \frac{15}{15 \cdot 10^3} = 1\,\mathrm{mA}$$

$$I_2 = 1\,\mathrm{mA}$$

Άρα και η τάση στα άκρα της $R_L$ θα είναι η ίδια στο αρχικό και στο ισοδύναμο κύκλωμα.

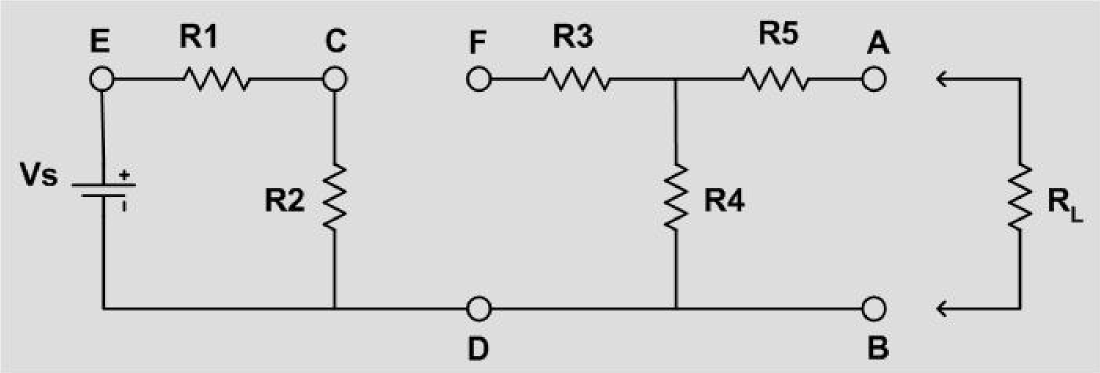
Αντίστοιχα το ισοδύναμο Norton ενός κυκλώματος είναι ένα κύκλωμα της μορφής:




Όπου $I_N$ είναι το ρεύμα βραχυκυκλώματος δηλ. το ρεύμα που θα περάσει από τα σημεία A-B αν βραχυκυκλώσω τα σημεία αυτά. Η Req=Rth υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στο ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin (για κυκλώματα με ανεξάρτητες μόνο πηγές).
Ισχύει ότι $Vth=Rt.I_N$ Συνεπώς αν γνωρίζουμε το ένα από τα δυο ισοδύναμα κυκλώματα μπορούμε εύκολα να βρούμε το άλλο χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή.
Αν στο κύκλωμά μας έχουμε και εξηρτημένες πηγές τάσης ή έντασης τότε η Rth δεν υπολογίζεται όπως πριν αλλά μέσω της σχέσης $Rth=Vth/I_N$ δηλ. πρέπει να βρω και την τάση ανοικτού κυκλώματος και το ρεύμα βραχυκυκλώματος.
(Άλλος τρόπος για τον υπολογισμό της έχει διδαχθεί στο αντίστοιχο μάθημα.)

**Πειραματική Διάταξη-Μετρήσεις.**

1) Σας δίνετε έτοιμο το κύκλωμα του Σχ.3 σε επιτραπέζιο ταμπλό (συνδέστε μόνο την πηγή στους ακροδέκτες E, D) με τιμές στοιχείων $V_s$=6 V, $R_1$=220 Ω, $R_2$=2.2 KΩ, $R_3$=1 KΩ, $R_4$=6.8 KΩ και $R_5$=680 Ω.



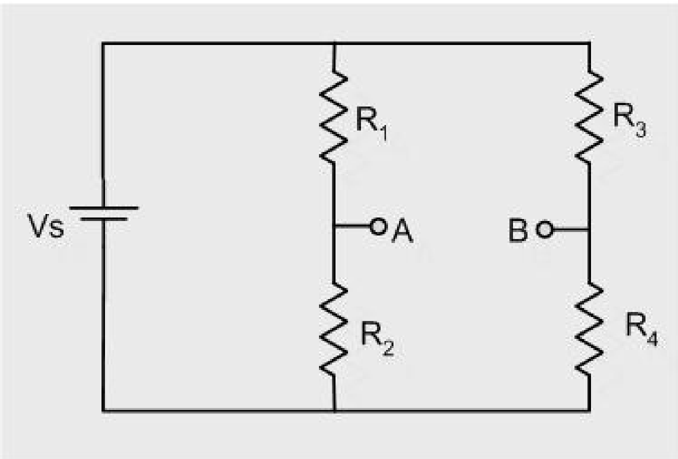

Σχ.3

Χρησιμοποιώντας ωμόμετρο και βολτόμετρο να βρεθεί το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα αριστερά των ακροδεκτών C, D κατ' αρχήν και των A, B του Σχ.3 στη συνέχεια (στη δεύτερη περίπτωση συνδέστε τα σημεία C και F). Για τιμές της $R_L$=680, 2180, 3910 Ω μετρήστε την ένταση ρεύματος διά της $R_L$ με τη βοήθεια ενός αμπερομέτρου.

2) Σχηματίστε το κύκλωμα γέφυρας του Σχ.4 χρησιμοποιώντας 4 αντιστάσεις με τιμές R1=100Ω, R2=200Ω, R3=300Ω, R4=400Ω και $V_s$=6 V.

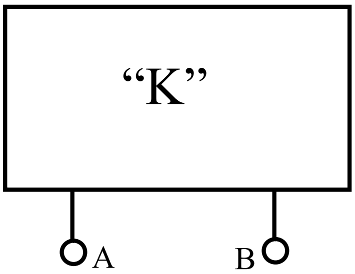
α) Βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα της γέφυρας.

β) Ομοίως αλλά για $R_1$=$R_2$=400 Ω και $R_3$=$R_4$=500 Ω.



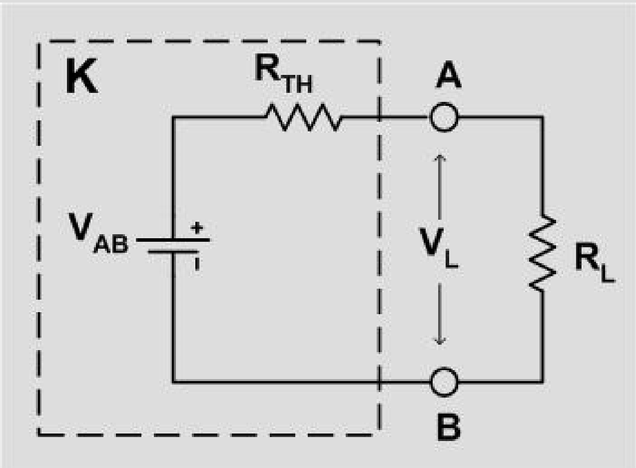

Σχ.4

3) Σας δίνετε έτοιμο ένα άγνωστο κύκλωμα «Κ» (βρίσκεται στο επιτραπέζιο ταμπλό) το οποίο περιέχει πηγές τάσης και αντιστάσεις συνδεδεμένες κατά κάποιο άγνωστο τρόπο στους ακροδέκτες Α,Β που φαίνονται στο Σχ.5. Σας ζητείται να βρείτε την αντίσταση Thevenin του άγνωστου κυκλώματος.




Σχ.5

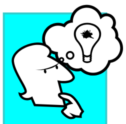
**Υπόδειξη:** Για να απαντήσετε στο προηγούμενο ερώτημα παρατίθεται το ακόλουθα παράδειγμα. Έστω ότι στο κύκλωμα Κ μετράμε με ένα βολτόμετρο την τάση ανοικτού κυκλώματος $V_{AB}$. Επίσης, με ένα ωμόμετρο μετράμε μία αντίσταση $R_L$ την οποία πρόκειται να συνδέσουμε στους ακροδέκτες Α,Β. Διευκρινίζεται ότι δεν είναι δυνατόν στο άγνωστο κύκλωμα να βραχυκυκλωθούν οι τυχόν υπάρχουσες πηγές τάσης. Αν θεωρήσουμε την $R_L$ συνδεδεμένη στους ακροδέκτες Α,Β, τότε το ισοδύναμο κατά Thevenin του κυκλώματος Κ μαζί με την $R_L$ θα είναι όπως στο Σχ.6. Από το κύκλωμα έχουμε,




Σχ.6

$$V_L = \frac{R_L}{R_{TH} + R_L} \cdot V_{AB}$$

Στους ακροδέκτες Α,Β του κυκλώματος Κ συνδέστε μία αντίσταση $R_L$=500 Ω. Με τη βοήθεια μόνο ενός βολτομέτρου βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα κατά Thevenin του άγνωστου κυκλώματος Κ.



**Επεξεργασία μετρήσεων.**

1) Σχεδιάστε το ισοδύναμο κύκλωμα κατά Thevenin αριστερά των ακροδεκτών C,D αφ' ενός και αριστερά των ακροδεκτών A,B αφ' ετέρου, βάσει των πειραματικών τιμών.

2) Υλοποιήστε πάλι το (1) για τις θεωρητικές τιμές των αντιστάσεων και των πηγών.

3) Στις περιπτώσεις φόρτισης των ακροδεκτών A,B με φορτία $R_L$=680, 2180, 3910 Ω να βρείτε τις θεωρητικές τιμές των διερχομένων ρευμάτων στα φορτία και να τις συγκρίνετε με τις πειραματικές τιμές.(Χρησιμοποιείστε το αντίστοιχο θεωρητικό ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.)

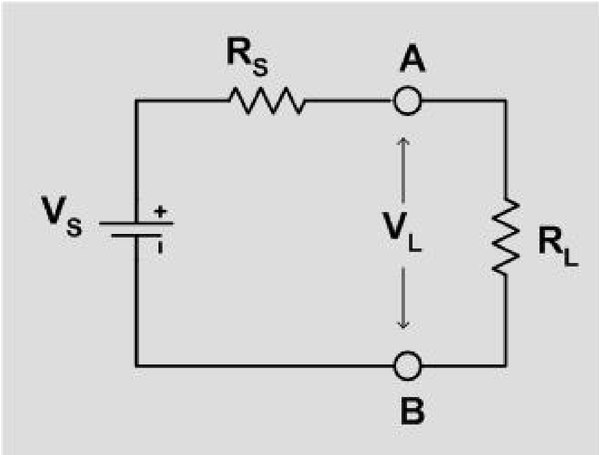
4) Να σχεδιαστούν τα ισοδύναμα κατά Thevenin κυκλώματα των μετρήσεων $2^α$ με τις πειραματικές και θεωρητικές τιμές.

5) Να σχεδιαστεί το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα της μέτρησης 3.

## B. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

$\theta$

Όταν μία πηγή τάσης συνεχούς ρεύματος συνδέεται με μία αντίσταση, η τάση που εμφανίζεται στους πόλους της πηγής είναι διαφορετική από την ονομαστική της τιμή. Στην πραγματικότητα η πολική τάση μιας πηγής εξαρτάται από την τιμή της αντίστασης του φορτίου.




$V_L$=πολική τάση πηγής

$R_L$=φορτίο (αντίσταση)

$V_S$=ονομαστική τάση πηγής

$R_S$=εσωτερική αντίσταση πηγής

Σχ.7

Στο Σχ.7 φαίνεται η σύνδεση μιας πηγής ονομαστικής τάσης $V_S$ με την αντίσταση $R_L$ υπό μορφή φορτίου. Εφαρμόζοντας τους νόμους Kirchhoff βρίσκουμε εύκολα ότι,

$$V_L = \frac{R_L}{R_S + R_L} V_S \tag{1}$$

Αν εξετάσει κανείς προσεκτικά τη σχέση (1) θα παρατηρήσει ότι η πραγματική τάση που εμφανίζεται κατά μήκος των ακροδεκτών της πηγής είναι μικρότερη από την εσωτερική τάση της πηγής $V_S$. Για τις δύο ακραίες τιμές της αντίστασης $R_L$ έχουμε,

α) $R_L$=0, (δηλ. βραχυκύκλωμα των ακροδεκτών) $V_L = \dfrac{0}{R_S + 0} V_S = 0$

β) $R_L=\infty$ (δηλ. απουσία κατανάλωσης-λειτουργία της πηγής εν κενώ)

$$V_L = \frac{1}{\frac{R_S}{R_L} + 1} V_S = \frac{1}{\frac{R_S}{\infty} + 1} V_S = \frac{1}{0+1} V_S = V_S$$

Συνεπώς, για κάθε τιμή της $R_L$ μεταξύ 0 και $\infty$, η τάση στα άκρα της πηγής μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών 0 και $V_S$.

Η ισχύς που καταναλώνει η αντίσταση $R_L$ (την παρέχει η πηγή) είναι,

$$P = I^2 R_L = \frac{V_S^2}{\left(R_S + R_L\right)^2} R_L \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι η ισχύς P είναι συνάρτηση της αντίστασης $R_L$, της εσωτερικής αντίστασης $R_S$ θεωρουμένης σταθερής. Εύλογο είναι τότε το ερώτημα για ποια τιμή της $R_L$ έχουμε τη μέγιστη μεταβιβαζόμενη ισχύ από την πηγή στην $R_L$ δηλαδή στο φορτίο. Η ισχύς P θα είναι μέγιστη όταν,

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial R_L^2} < 0$$

Για την πρώτη συνθήκη έχουμε,

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{V_S^2\left[\left(R_S + R_L\right)^2 - 2R_L\left(R_S + R_L\right)\right]}{\left[\left(R_s + R_L\right)^2\right]^2} = \frac{V_S^2\left[\left(R_S + R_L\right)\left(R_S - R_L\right)\right]}{\left[\left(R_s + R_L\right)^2\right]^2} = 0$$

Επειδή τα $R_S, R_L, V_S^2$ είναι θετικές ποσότητες, για να είναι $\dfrac{\partial P}{\partial R_L} = 0$ θα πρέπει να ισχύει $\boxed{R_L = R_S}$ (3)

Όταν $R_L = R_S$ επαληθεύεται και η δεύτερη συνθήκη $\dfrac{\partial^2 P}{\partial R_L^2} < 0$.

Η εξίσωση (3) εκφράζει το θεώρημα της μεταφοράς μέγιστης ισχύος. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε προσαρμογή του φορτίου στην πηγή. Για $R_L = R_S$ έχουμε,

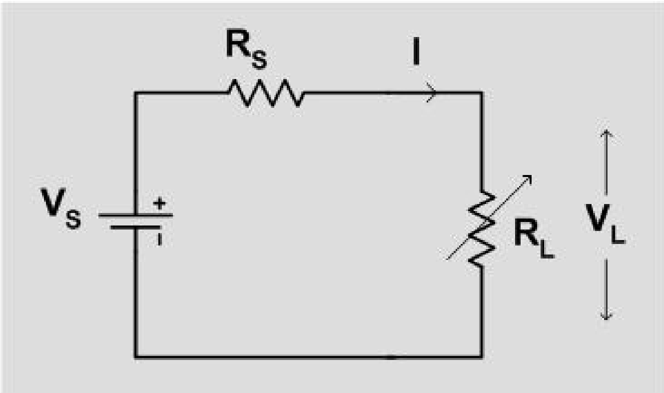
$$V_L = \frac{R_S}{R_S + R_S} V_S = \frac{V_S}{2} \qquad \boxed{V_L = \frac{V_S}{2}} \qquad (4)$$

$$P_{\max} = I^2 R_L = \frac{V_S^2}{\left(R_S + R_S\right)^2} R_S = \frac{V_S^2}{4R_S^2} R_S = \frac{V_S^2}{4R_S} \qquad \boxed{P_{\max} = \frac{V_S^2}{4R_S}} \qquad (5)$$

Σημειώνουμε ότι ο βαθμός απόδοσης (βλ.ερ.5) δεν είναι μέγιστος στην κατάσταση προσαρμογής. Αυτό που είναι μέγιστο είναι η ισχύς που μπορώ να πάρω στο φορτίο.

**Πειραματική Διάταξη-Μετρήσεις.**

Σχηματίστε το κύκλωμα του Σχ.8.
Για τις τιμές: 0, 100, 400, 500, 600, 800, 1100, 1200, και 1500Ω της $R_L$ και τις τιμές της $R_S$=500, 800, 1100 Ω μετρήστε τις τιμές $V_L$, συναρτήσει των πιο πάνω τιμών της $R_L$.




Σχ.8

**Επεξεργασία μετρήσεων.**

1) Συμπληρώστε έναν πίνακα της παρακάτω μορφής με τις μετρήσεις που πήρατε για τις τρεις τιμές της $R_S$

| $R_L$ | $V_L$ |
|---|---|
| | |

2) Υπολογίστε την ισχύ $P_L$ για κάθε τιμή της $R_L$ και για τις τρεις περιπτώσεις της $R_S$. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

| $R_L$ | $P_L$ | | |
|---|---|---|---|
| | $R_S$=500 Ω | $R_S$=800 Ω | $R_S$=1100 Ω |
| | | | |

3) Σχεδιάστε με κοινούς άξονες τις καμπύλες $P_L$=f($R_L$) με παράμετρο την $R_S$. Επαληθεύεται το θεώρημα της μεταφοράς μέγιστης ισχύος;

4) Ποιες είναι οι μέγιστες και ελάχιστες δυνατές τιμές της $V_L$.

5) Αν ορίσουμε σαν βαθμό απόδοσης το λόγο $n = \frac{P_L}{I^2 R}$ όπου $R = R_L + R_S$, ποιος είναι ο βαθμός απόδοσης στην κατάσταση προσαρμογής;

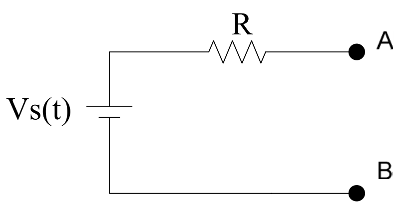
6) Στον παρακάτω πίνακα κάναμε τους υπολογισμούς για την ισχύ στην εσωτερική αντίσταση μιας πηγής τάσης, την ισχύ σε ένα φορτίο $R_L$ και τη συνολική ισχύ που δίνει η πηγή, για διάφορες τιμές του φορτίου. Η τάση της πηγής είναι 10 Volts και η εσωτερική της αντίσταση Rs=100Ω.Υπολογίστε το βαθμό απόδοσης για όλες τις τιμές του φορτίου και σχολιάστε το αποτέλεσμα.

| $R_L$(Ω) | $P_{RL}$(Watt) | $P_{RS}$ (Watt) | Ρπηγής(Watt) | Βαθμός απόδοσης. |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.0826 | 0.8264 | 0.909 | |
| 20 | 0.1388 | 0.6944 | 0.8333 | |
| 50 | 0.2222 | 0.4444 | 0.6666 | |
| 100 | 0.25 | 0.25 | 0.5 | |
| 500 | 0.1388 | 0.0277 | 0.1666 | |
| 1000 | 0.0826 | 0.00826 | 0.0909 | |

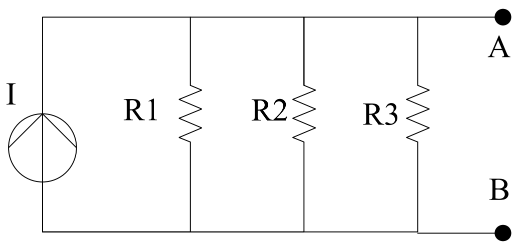
**Ερωτήσεις προς Μελέτη**

Για να παρακολουθήσετε την Άσκηση θα πρέπει να γνωρίζετε τουλάχιστον το 80% των απαντήσεων.

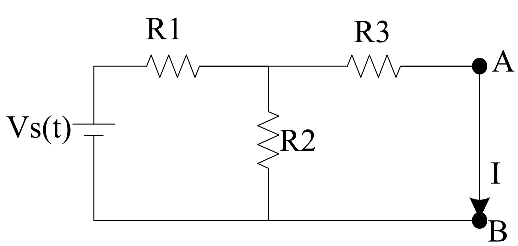
1. Τι είναι τα ισοδύναμα Thevenin και Norton ενός κυκλώματος;
2. Ποιες πηγές μηδενίζω όταν υπολογίζω αυτά τα ισοδύναμα κυκλώματα;
3. Τι σημαίνει μηδενισμός α) μιας πηγής τάσης; β) μιας πηγής έντασης;
4. Ποιο είναι το ισοδύναμο Norton του κυκλώματος ως προς τους ακροδέκτες A – B;



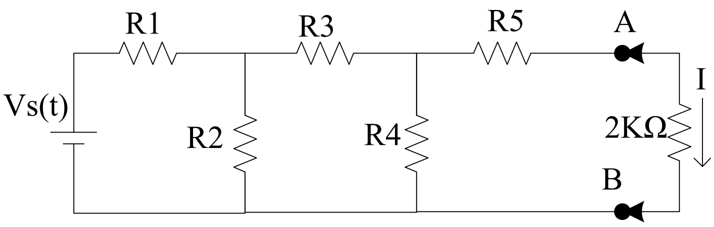

5. Ποιο είναι το ισοδύναμο Thevenin του κυκλώματος ως προς A – B;



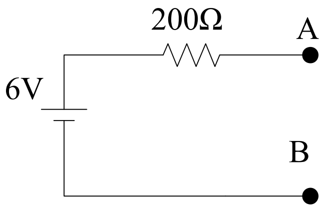

6. Αν γνωρίζω το ρεύμα I, ποια είναι τα ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin και Norton ως προς A – B;



7. Το κύκλωμα του σχ.2 είναι το ισοδύναμο Thevenin του σχ.1 ως προς A - B. Υπολογίστε το ρεύμα I αν στα σημεία A, B συνδέσω αντίσταση $R_L$=2KΩ.

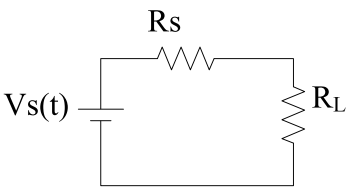



Σχήμα 1




Σχήμα 2

8. Πότε έχουμε μέγιστη ισχύ στο φορτίο $R_L$;




9. Δώστε τον τύπο της μέγιστης ισχύος συναρτήσει των Vs και $R_L$.

10. Βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται στην Rs όταν Rs=$R_L$.