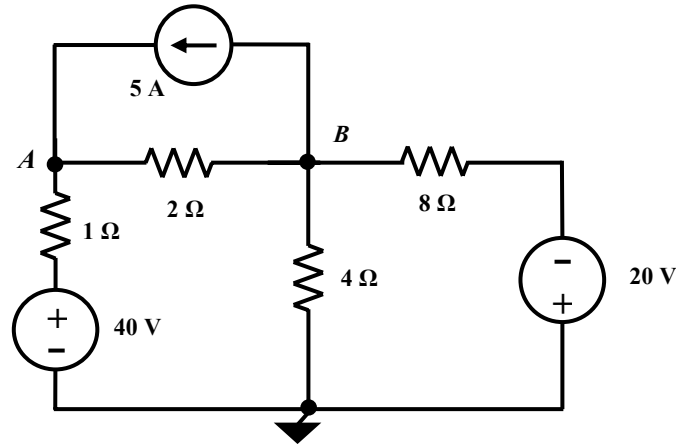


ΘΕΜΑ 1. Στο πιο κάτω κύκλωμα οι κομβικές τάσεις υπολογίστηκαν από ένα συνάδελφό σας σαν $v_A = 30 \text{ V}$ και $v_B = 20 \text{ V}$. Μπορείτε να επαληθεύσετε τη λύση;

[5 μονάδες]



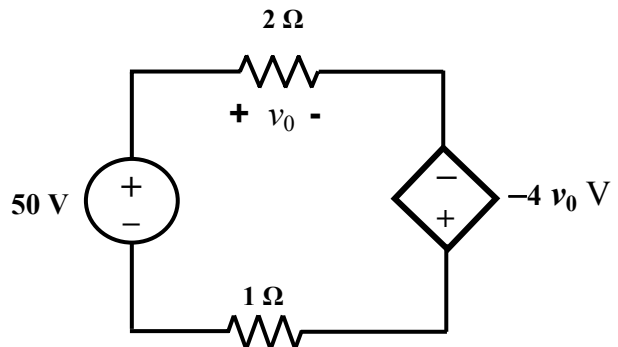
ΛΥΣΗ. Γράφω την εξίσωση κομβικών τάσεων για τον κόμβο A:

$$\frac{(v_A - 40)}{1} + \frac{(v_A - v_B)}{2} - 5 = 0$$

Βάζοντας τις δοθείσες τιμές βλέπω ότι δεν ικανοποιείται η εξίσωση. Άρα ο συνάδελφος έκανε λάθος. Εναλλακτικοί τρόποι είναι ο έλεγχος νόμων Kirchhoff έως όπου υπάρξει αποτυχία, ανεξάρτητη επίλυση από την αρχή, το θεώρημα Tellegen (ισορροπία ισχύων) αλλά όλοι καταλήγουν σε περισσότερες πράξεις.

ΘΕΜΑ 2. Υπολογίστε την τάση v_0 στο κύκλωμα:

[5 μονάδες]



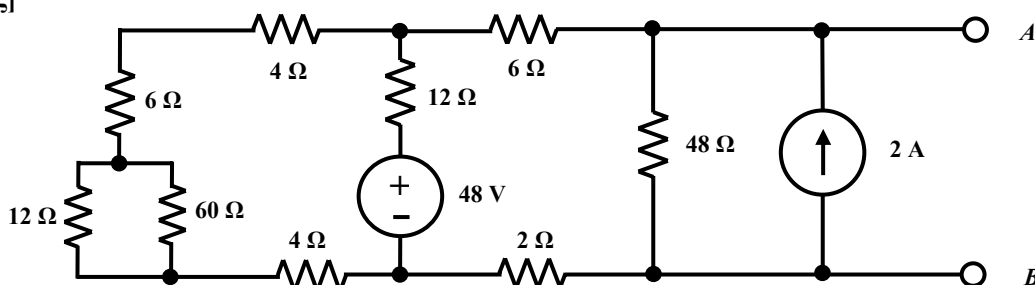
ΛΥΣΗ. KVL για τον βρόχο: $-50 + v_0 - (-4v_0) + v_{1\Omega} = 0$

Αλλά αφού ο βρόχος διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα i , $v_0 = 2i$ $v_{1\Omega} = i \cdot 1$ και $v_{1\Omega} = v_0/2$ οπότε τελικά παίρνουμε $-50 + v_0 - (-4v_0) + v_0/2 = 0 \Rightarrow 5,5v_0 = 50 \Rightarrow v_0 = 100/11 = 9,09 \text{ V}$

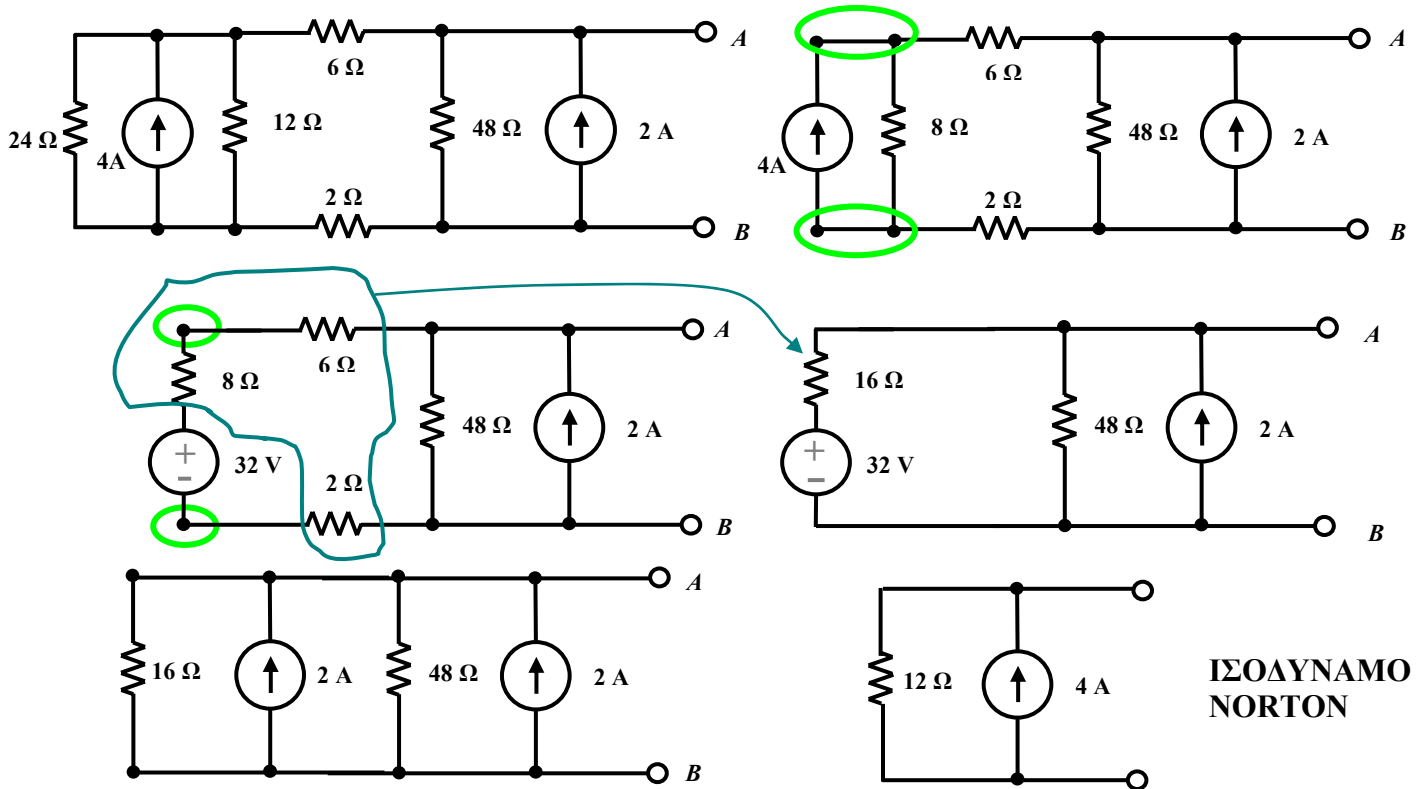
Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι επίλυσης, παρόμοιας πολυπλοκότητας.

ΘΕΜΑ 3. Να βρεθεί το ισοδύναμο Thévenin ή Norton του πιο κάτω κυκλώματος από τα σημεία A και B.

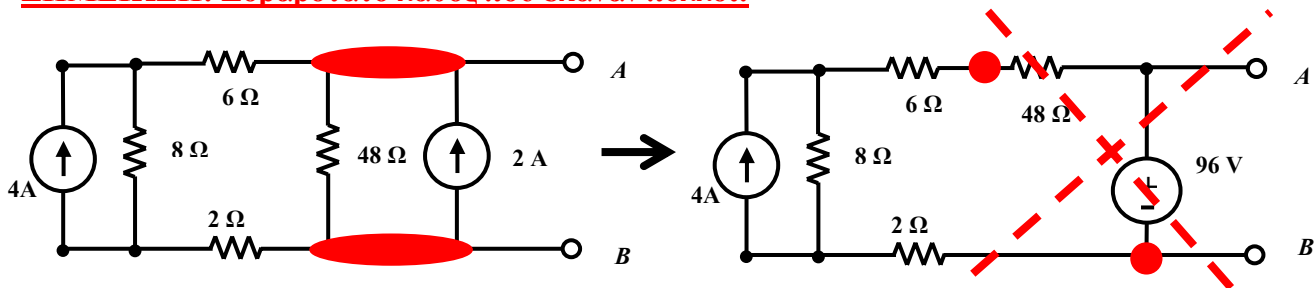
[10 μονάδες]



ΛΥΣΗ. Πριν κάνουμε οτιδήποτε, «μαζεύουμε» τους αντιστάτες αριστερά (4, 6, 12, 60, 4 Ω) σε ένα ισοδύναμο των 24 Ω. Μπορούμε να λύσουμε με κομβικές τάσεις αλλά υπάρχει και πιο εύκολος δρόμος. Μετατρέπουμε την πηγή των 48V/12Ω σε πηγή ρεύματος 4A/12Ω παράλληλα κι έχουμε:

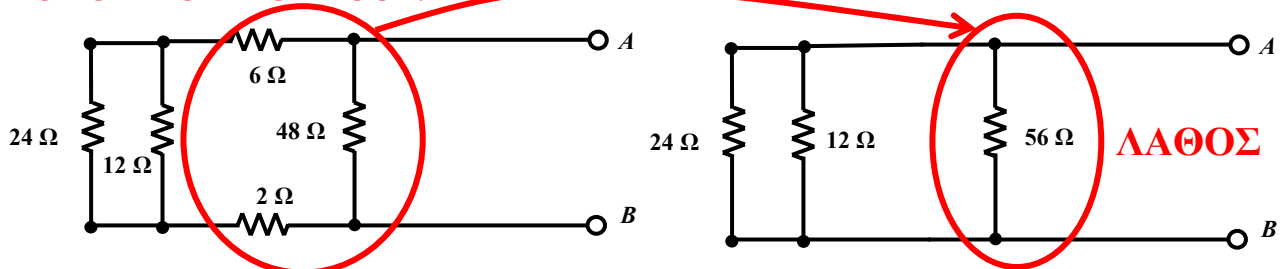


ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σοβαρότατο λάθος που έκαναν πολλοί:



Η κόκκινη τελεία πρέπει να είναι στο σημείο A. Σύγκρινε με πράσινο πιο πάνω.

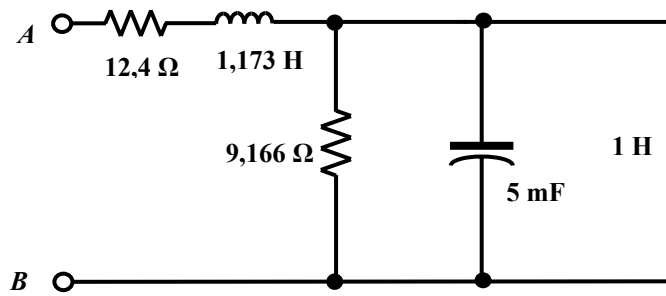
ΑΛΛΟ ΣΟΒΑΡΟΤΑΤΟ ΛΑΘΟΣ:



Πρέπει απολύτως να σεβαστούμε τα σημεία A και B γιατί από αυτά «βλέπουμε» το κύκλωμα.

ΘΕΜΑ 4. Το πιο κάτω κύκλωμα βρίσκεται σε μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση. Υπολογίστε την εμπέδηση από τα σημεία A και B για $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

[15 μονάδες]



ΛΥΣΗ. Λόγω της παράλληλης σύνδεσης των τριών στοιχείων δεξιά, μας συμφέρει (χωρίς να είναι δεσμευτικό αυτό) να δουλέψουμε με σύνθετες αγωγιμότητες. Έτσι, συνδυάζουμε το $1/9,166 = 0,1091 \text{ mho}$ με $j\omega C = j0,1 \text{ mho}$ για τον πυκνωτή και $1/j\omega L = -j0,05 \text{ mho}$ για τον επαγωγό. Απλή πρόσθεση δίνει $(0,1091 + j0,05) \text{ mho}$.

Αυτό το αντιστρέφουμε για να πάρουμε την εμπέδηση:

$$Y = 0,1091 + j0,05 = 0,12 \angle 24,6^\circ \Rightarrow Z = 1/Y = 1/(0,12 \angle 24,6^\circ) = 8,33 \angle -24,6^\circ = 7,574 - j3,468$$

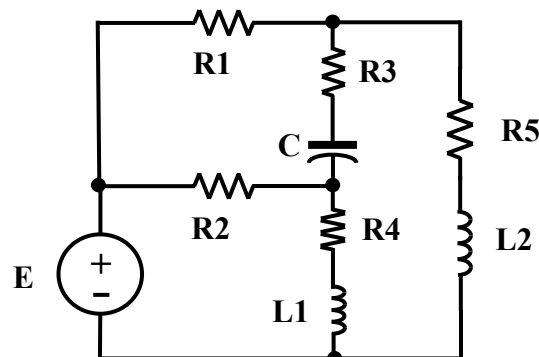
που προστιθέμενο με τις εμπεδήσεις των αριστερά (σε σειρά) στοιχείων, δηλ. $12,4 \Omega$ και $j\omega L = j23,46 \Omega$, δίνει τελικά (περίπου)

$$Z_{ολικό} = 12,4 + j23,46 + 7,574 - j3,468 \cong 20 + j20$$

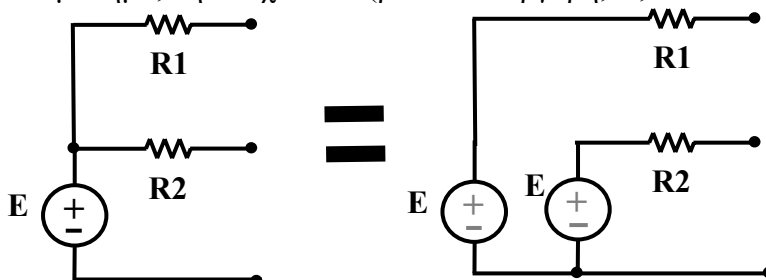
ΘΕΜΑ 5. Για το πιο κάτω κύκλωμα (στο οποίο δεν υπάρχει αρχικά αποθηκευμένη ενέργεια) καταστρώστε τις εξισώσεις **κομβικών τάσεων** σε μορφή πίνακα (οι κομβικές τάσεις θα είναι οι άγνωστοι) με τη μέθοδο της απλής επισκόπησης.

Απλά καταστρώστε τις εξισώσεις σαν γραμμικό σύστημα και **μη** δοκιμάσετε να τις λύσετε, ή να τις μετασχηματίσετε, ή να σχηματίσετε κάποια διαφορετική εξίσωση.

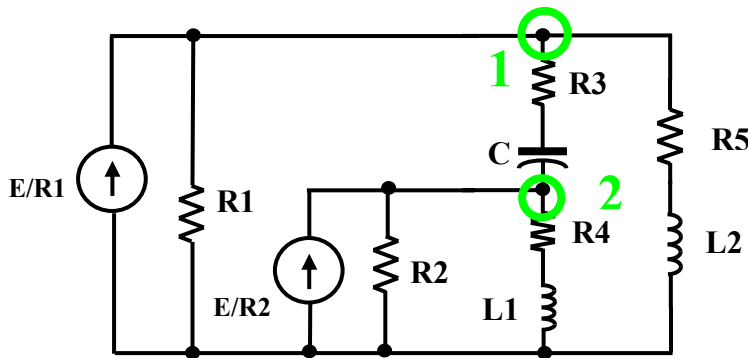
[20 μονάδες]



ΛΥΣΗ. Για να εφαρμόσω την τεχνική της επισκόπησης χωρίς προβλήματα πρέπει το κύκλωμα να έχει μόνο πηγές ρεύματος, δεδομένου ότι έχει απαιτηθεί η χρήση κομβικών τάσεων. Πρέπει λοιπόν να μετατραπεί η πηγή τάσης των $E \text{ Volt}$ σε πηγή ρεύματος. Αυτό είναι κατορθωτό με την τεχνική που αναφέρθηκε στο μάθημα, δηλ. ισχύει ότι (βλ. και Μάργαρη, Α, σ. 281-284):



Τώρα μπορούμε να μετατρέψουμε σε δυο πηγές ρεύματος με τους αντιστάτες παράλληλα και το κύκλωμα γίνεται

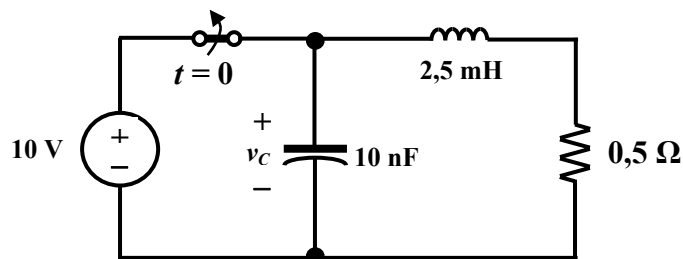


Οπότε

$$\begin{pmatrix} G1 + \frac{1}{R3 + \frac{1}{CD}} + \frac{1}{R5 + L2 D} & -\frac{1}{R3 + \frac{1}{CD}} \\ -\frac{1}{R3 + \frac{1}{CD}} & G2 + \frac{1}{R3 + \frac{1}{CD}} + \frac{1}{R4 + L1 D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/R1 \\ E/R2 \end{pmatrix}$$

ΘΕΜΑ 6. Στο πιο κάτω κύκλωμα, που λειτουργούσε για πολύ χρόνο, ο διακόπτης ανοίγει στον χρόνο $t = 0$. Διερευνήστε κατά πόσο η τάση v_C είναι επικίνδυνη.

[20 μονάδες]



ΛΥΣΗ.

$t < 0$

Μόνιμη κατάσταση: ο πυκνωτής λόγω της πηγής «βλέπει» 10 Volt ενώ το ρεύμα που κυκλοφορεί στο βρόχο του βραχυκυκλωμένου επαγωγού και αντιστάτη είναι $10/0,5 = 20$ A.

$t > 0$

Μόλις ανοίξει ο διακόπτης, η πηγή απομονώνεται και απομένει ένα κύκλωμα RLC με σύνδεση σε σειρά. Η διαφορική εξίσωση που το περιγράφει είναι η

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\rho^2 + 200\rho + 4 \times 10^{10} = 0$. Με την ορολογία που έχουμε χρησιμοποιήσει,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{0,5}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} = 100, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 4 \times 10^{10}$$

οπότε

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 = 4 \times 10^{10} - 10000 \Rightarrow \omega_d = 199999,975 \cong 200000$$

κι έτσι οι ρίζες είναι

$$\rho_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d = -100 \pm j200000$$

Οι ρίζες έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, οπότε δεν χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση και μπορούμε να συνεχίσουμε.

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης θα πάρει τη μορφή

$v_C(t) = A_0 e^{\rho_1 t} + B_0 e^{\rho_2 t} = A_0 e^{(-100+j200000)t} + B_0 e^{(-100-j200000)t} = e^{-100t} (A \cos(200000t) + B \sin(200000t))$
 και πρέπει να προσδιοριστούν οι σταθερές A και B από τις αρχικές συνθήκες $v_C(0^+)$ και $dv_C(0^+)/dt$.
 $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 = 1 \cdot (A \cdot 1 + B \cdot 0) \Rightarrow A = 10$

και

$$i_C = CDv_C \Rightarrow \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{-i_L(0^+)}{C} = \frac{-i_L(0^-)}{C} = \frac{-20}{10 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = -2 \times 10^9$$

$$\left. \frac{d}{dt} e^{-100t} (A \cos(200000t) + B \sin(200000t)) \right|_{t=0^+} = -100A + 200000B = -2 \times 10^9 \Rightarrow B \cong -10000$$

και τελικά

$$v_C(t) = e^{-100t} (10 \cos(200000t) - 10000 \sin(200000t))$$

Εναλλακτικά, $v_C(t) = K e^{-100t} \cos(200000t + \theta)$

και τα K και θ προκύπτουν από το σύστημα

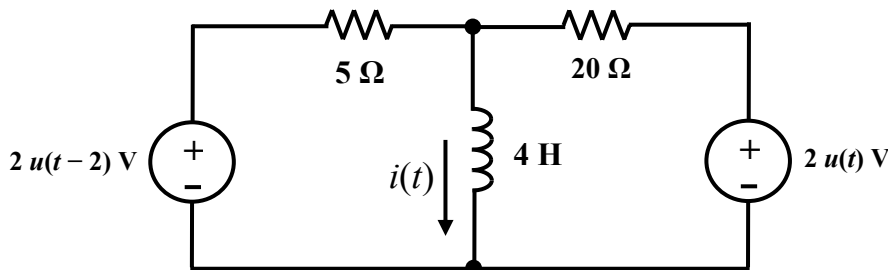
$$K \cos(\theta) = 10$$

$$K \sin(\theta) \cong 10000$$

Η τάση αυτή μπορεί να πάρει μεγάλες τιμές της τάξης των 10 kV ξεκινώντας από μια τάση/μπαταρία των 10 V!!! Η συχνότητα είναι κάπως υψηλή αλλά όχι αρκετά για να εμφανισθεί το επιδερμικό φαινόμενο (που πρακτικά δεν εμφανίζεται ποτέ στο ανθρώπινο σώμα). Είναι λοιπόν επικίνδυνη, ίσως όχι απειλητική επειδή φθίνει πολύ γρήγορα, αλλά σίγουρα θα δημιουργούσε ένα ενοχλητικό σοκ.

ΘΕΜΑ 7. Στο πιο κάτω κύκλωμα να βρεθεί το $i(t)$, $t > 0$, και να σχεδιασθεί προσεγγιστικά. Ισχύει ότι $i(0) = 0$ (και βέβαια $u(t)$ είναι η βηματική συνάρτηση).

[25 μονάδες]



ΛΥΣΗ.

$t < 0$

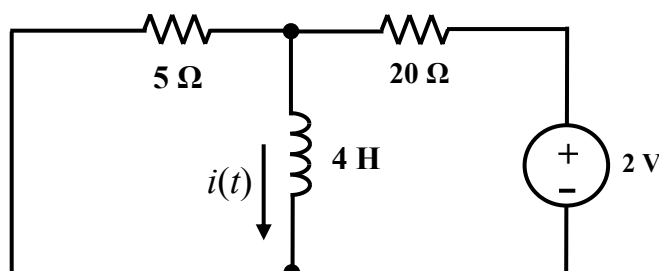
Οι πηγές βραχυκυκλωμένες, $i(0) = 0$, δηλ. όλα νεκρά.

$t > 0$

Λόγω της καθυστέρησης στην επενέργεια της αριστερής πηγής, μπορώ να χωρίσω τον χρόνο σε δυο τμήματα.

$0 < t < 2$ [$u(t)=1$, $u(t-2)=0$]

Το κύκλωμα είναι (η αριστερή πηγή δίνει 0, δηλαδή βραχυκύκλωμα)



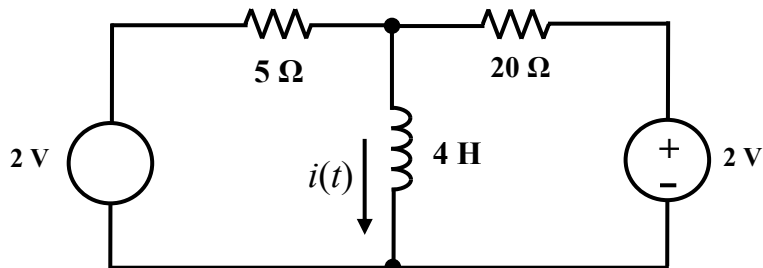
$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Και έχουμε $i(0) = 0$, $i(\infty) = 2/20 = 0,1 \text{ A}$, $\tau = L/R_{\text{ισοδύναμη}} = 4/(5||20) = 4/4 = 1 \text{ s}$
(επειδή ο επαγωγός «βλέπει» τον παράλληλο συνδυασμό των αντιστατών, π.χ. από Thevenin)

Τελικά λοιπόν, $i(t) = 0,1(1 - e^{-t})$, $0 < t < 2$

$t > 2$ [$u(t)=1$, $u(t-2)=1$]

Το κύκλωμα είναι



$$i(t) = i(\infty) + [i(2) - i(\infty)]e^{-(t-2)/\tau}$$

Και έχουμε $i(2) = 0,1(1 - e^{-2}) = 0,086 \text{ A}$
 $i(\infty) = 2/5 + 2/20 = 0,5 \text{ A}$,
 $\tau = L/R_{\text{ισοδύναμη}} = 4/(5||20) = 4/4 = 1 \text{ s}$ (το ίδιο, φυσικά)

Τελικά λοιπόν, $i(t) = 0,5 - 0,414e^{-(t-2)}$, $t > 2$

