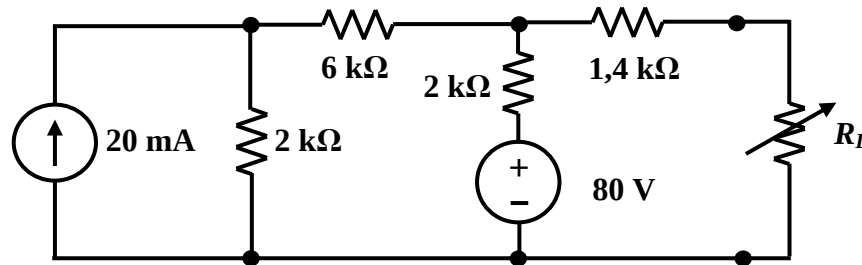


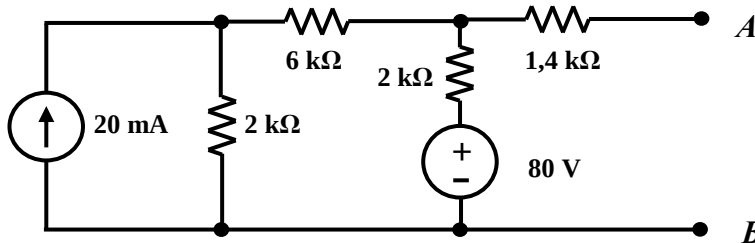
ΘΕΜΑ 1. [10%]

Στο πιο κάτω κύκλωμα η μεταβλητή αντίσταση ρυθμίζεται για μέγιστη μεταφορά ισχύος στον αντιστάτη R_L . Προσδιορίστε την τιμή της αντίστασης του R_L καθώς και τη μέγιστη δυνατή ισχύ που μπορεί να αποδοθεί στον R_L .

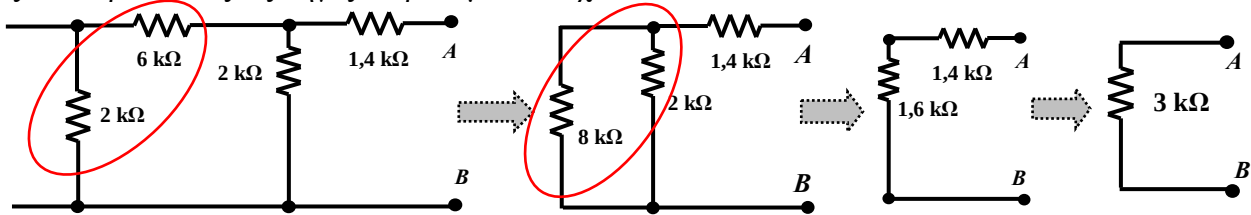


ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πρέπει να θυμηθούμε ότι η μέγιστη ισχύς αποδίδεται όταν η αντίσταση φορτίου ισούται με την αντίσταση του ισοδύναμου Thevenin του κυκλώματος που «βλέπει» η αντίσταση φορτίου. Ως εκ τούτου, πρέπει να προσδιορίσουμε το ισοδύναμο Thevenin του κυκλώματος που δεν περιλαμβάνει τον αντιστάτη R_L . Μάλιστα, αν δεν μας ρωτούσαν για την τιμή της αποδιδόμενης ισχύος, θα χρειαζόταν μόνο η τιμή της αντίστασης Thevenin και όχι η τάση. Εδώ όμως πρέπει να βρούμε και τα δυο μεγέθη. Έχουμε λοιπόν το παρακάτω κύκλωμα και θέλουμε το ισοδύναμο Thevenin από τα σημεία A και B .

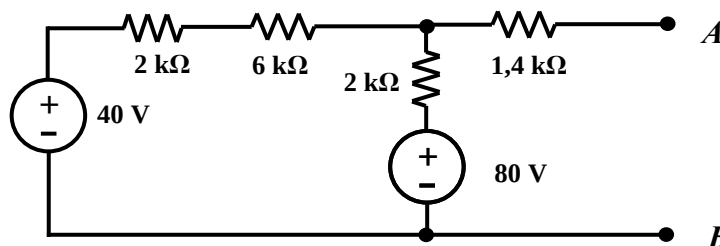


Εξουδετερώνοντας τις πηγές παίρνουμε διαδοχικά



Οπότε $R_{Th} = 3 \text{ k}\Omega$

Τώρα, για την τάση V_{Th} ισχύει ότι $V_{Th} = V_{AB}$ και για να την βρούμε με τη λιγότερη δυνατή εργασία (γιατί μπορεί να βρεθεί με διάφορους τρόπους) αρκεί να κάνουμε ένα μετασχηματισμό πηγών που θα μας δώσει κύκλωμα με ένα μόνο κόμβο. Έτσι αλλάζοντας την πηγή ρεύματος έχουμε

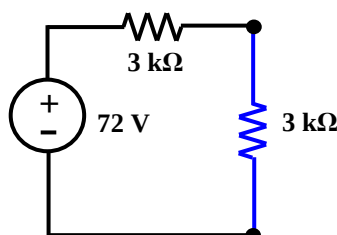


$$\frac{V_{Th} - 80}{2000} + \frac{V_{Th} - 40}{8000} = 0$$

$$\Rightarrow (0,5 + 0,125)V_{Th} = 45$$

$$\Rightarrow V_{Th} = 72 \text{ V}$$

**Ισοδύναμο
Thevenin**



$$\text{Ισχύς στο φορτίο} = \frac{(V_{R_L})^2}{R_L} = \frac{36^2}{3000} = 0,432 \text{ W}$$

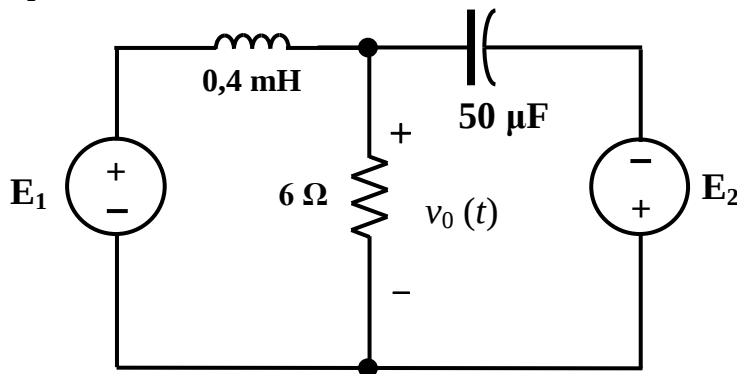
όπου η τάση 36 V προκύπτει από τον διαιρέτη τάσης.

ΘΕΜΑ 2. [20%]

Στο πιο κάτω κύκλωμα, που λειτουργεί σε μόνιμη κατάσταση, να βρεθεί η τάση $v_0(t)$ αν για τις πηγές τάσης ισχύει

$$E_1(t) = 10 \cos(5000t + 53,13^\circ) \text{ V}$$

$$E_2(t) = 8 \sin(3000t) \text{ V}$$

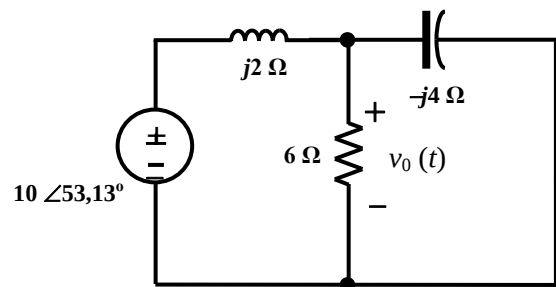


ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εξαιτίας της ύπαρξης δυο πηγών με διαφορετική συχνότητα, είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε **επαλληλία**. Πρέπει λοιπόν να λύσουμε το κύκλωμα δυο φορές.

I. Συχνότητα 5000 rad/s (E_2 εξουδετερωμένη):

Δεδομένης της μόνιμης ημιτονοειδούς κατάστασης, μπορούμε να περάσουμε σε φασορική αναπαράσταση του κυκλώματος (εικ. δεξιά). Για να βρούμε εύκολα την τάση V_0 (φάσορα της v_0) μπορούμε είτε να εφαρμόσουμε μέθοδο κομβικών τάσεων (ένας κόμβος μόνο) ή να θεωρήσουμε τον διαιρέτη τάσης. Με την πρώτη εναλλακτική λύση παίρνουμε ($10 \angle 53,13^\circ = 6 + j8$):



$$\frac{V_0}{6} + \frac{V_0}{-j4} + \frac{V_0 - 6 - j8}{j2} = 0$$

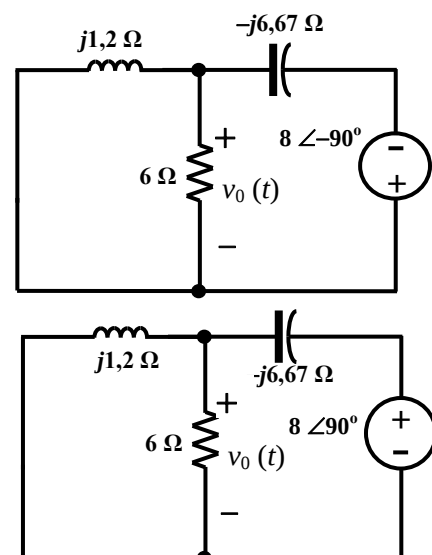
$$\Rightarrow 0,167V_0 + j0,25V_0 - j0,5V_0 + j3 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{4 - j3}{0,167 - j0,25}$$

$$\Rightarrow V_0^{5000} = 15,691 + j5,54 = 16,64 \angle 19,44^\circ$$

II. Συχνότητα 3000 rad/s (E_1 εξουδετερωμένη):

Όπως και πριν, κατασκευάζουμε τη φασορική μορφή (με νέες τιμές των στοιχείων αφού άλλαξε η συχνότητα λειτουργίας). Προσοχή στην πηγή E_2 που είναι συνδεδεμένη «ανάποδα». Αν και δεν είναι απαραίτητο, μπορούμε να αντιστρέψουμε την πολικότητα της πηγής μόνο που πρέπει να είμαστε προσεκτικοί: η αντιστροφή της τάσης σε μια ημιτονοειδή πηγή σημαίνει ουσιαστικά εισαγωγή μιας διαφοράς φάσης 180° . Έτσι, ενώ η δοθείσα πηγή έχει φασορική αναπαράσταση $8 \angle -90^\circ = -j8$ (λόγω του ημιτόνου) με τη νέα συνδεσμολογία γίνεται $j8 = 8 \angle -270^\circ$ ή $8 \angle 90^\circ$.



Με παρόμοιο συλλογισμό όπως στην προηγούμενη περίπτωση, αλλά επιλέγοντας τώρα τη λύση του διαιρέτη τάσης, παίρνουμε:

Παράλληλος συνδυασμός επαγωγού και αντιστάτη:

$$\mathbf{Z}_{RL} = \frac{j1,2 \times 6}{6 + j1,2} = \frac{7,2 \angle 90^\circ}{6,12 \angle 11,31^\circ} = 1,18 \angle 78,7^\circ = 0,231 + j1,16$$

Ολική σύνθετη αντίσταση:

$$\mathbf{Z}_{o\lambda} = 0,231 + j1,16 - j6,67 = 0,231 - j5,51 = 5,51 \angle -87,6^\circ$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0^{3000} &= \frac{\mathbf{Z}_{RL}}{\mathbf{Z}_{o\lambda}} \times 8 \angle 90^\circ \\ &= \frac{1,18 \angle 78,7^\circ}{5,51 \angle -87,6^\circ} \times 8 \angle 90^\circ \\ &= 0,214 \angle 166,3^\circ \times 8 \angle 90^\circ \\ &= 1,712 \angle 256,3^\circ \end{aligned}$$

Έτσι τελικά, από την επαλληλία θα έχουμε

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{V}_0^{5000} e^{j5000t} + \mathbf{V}_0^{3000} e^{j3000t} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 16,64 \angle 19,44^\circ e^{j5000t} + 1,712 \angle 256,3^\circ e^{j3000t} \right\} \end{aligned}$$

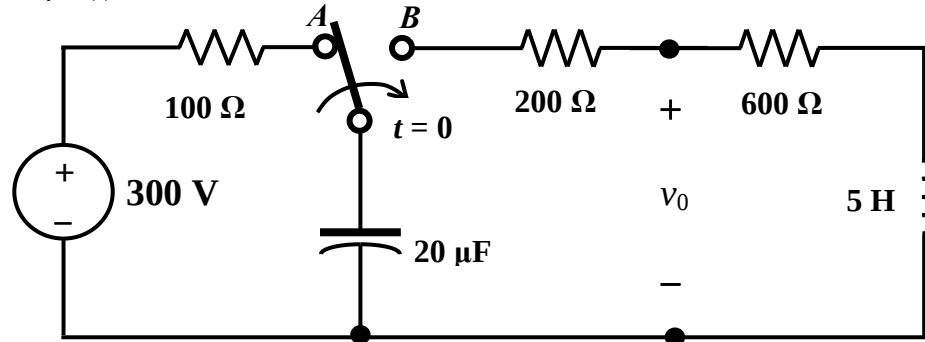
$$v_0(t) = 16,64 \cos(5000t + 19,44^\circ) + 1,712 \cos(3000t + 256,3^\circ)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το άθροισμα $\mathbf{V}_0^{5000} + \mathbf{V}_0^{3000}$ δεν έχει κανένα (ηλεκτρολογικό) νόημα!

ΘΕΜΑ 3. [35%]

Στο πιο κάτω κύκλωμα ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση A για πολύ χρόνο. Στη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης μεταβαίνει στιγμιαία στη θέση B και παραμένει εκεί. Να βρεθούν:

1. Η τάση στα άκρα του πυκνωτή πριν τη μεταγωγή του διακόπτη
2. Η τάση $v_0(0^+)$
3. Η ποσότητα $\left. \frac{dv_0}{dt} \right|_{t=0^+}$
4. Η τάση $v_0(t)$, $t > 0$.

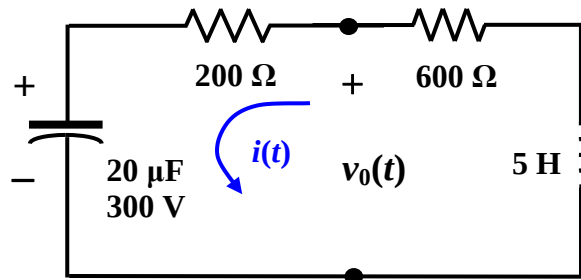


ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Βεβαίως ο πυκνωτής θα έχει πάρει την τάση της πηγής. Έτσι

$$v_C(0^-) = 300 \text{ V}$$

2. Το νέο κύκλωμα είναι



Θα ισχύει βέβαια ότι

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 300 \text{ V}$$

αλλά επίσης ότι

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Επειδή το ρεύμα του επαγωγού είναι το ρεύμα που θα κυκλοφορήσει στον βρόχο, η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι στους δυο αντιστάτες δεν υπάρχει πτώση τάσης, άρα

$$v_0(0^+) = v_C(0^+) + 0 = 300 \text{ V}$$

3. Ακολουθώντας τη συνηθισμένη σύμβαση για τη φορά του ρεύματος σύμφωνα με την τάση του πυκνωτή, θα έχουμε για τα στοιχεία αριστερά από την τάση $v_0(t)$:

$$v_0(t) = 200i(t) + 300 + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{dv_0(t)}{dt} = 200 \frac{di(t)}{dt} + 5 \times 10^4 i(t)$$

Επίσης προκύπτει ότι

$$\left. \frac{dv_0(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = 200 \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+} + 5 \times 10^4 i(0^+) = 200 \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+}$$

Από τη δεξιά πλευρά της τάσης $v_0(t)$ θα πάρουμε:

$$300 = -600i(0^+) - 5 \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+} \Rightarrow 300 = -5 \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+} \Rightarrow \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -60 \text{ A/s}$$

Οπότε τελικά θα είναι

$$\left. \frac{dv_0(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = 200 \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = 200 \times (-60) = -12000 \text{ V/s}$$

4. Για τον προσδιορισμό της τάσης $v_0(t)$ θα πρέπει να λύσουμε τη σχετική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού για σειριακό RLC. Σχηματίζουμε την εξίσωση υπολογίζοντας τις παραμέτρους

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{600 + 200}{10} = 80 \text{ nepers}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{5 \times 20 \times 10^{-6}} = 10^4 \text{ rad/s}$$

Οι ρίζες θα είναι

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -80 \pm \sqrt{6400 - 10^4} = -80 \pm j60$$

οπότε θα έχουμε τελικά

$$v_0(t) = A_1 e^{-80t} \cos 60t + A_2 e^{-80t} \sin 60t$$

Με αρχικές συνθήκες

$$v_0(0^+) = 300$$

$$\left. \frac{dv_0(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -12000$$

και υπολογίζοντας την παράγωγο της τάσης $v_0(t)$

$$\frac{dv_0(t)}{dt} = -80A_1 e^{-80t} \cos 60t - 60A_1 e^{-80t} \sin 60t - 80A_2 e^{-80t} \sin 60t + 60A_2 e^{-80t} \cos 60t$$

θα πάρουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} v_0(t) \Big|_{t=0^+} &= v_0(0^+) & A_1 &= 300 \\ \left. \frac{dv_0(t)}{dt} \right|_{t=0^+} &= \left. \frac{dv_0(0^+)}{dt} \right| & \Rightarrow & -80A_1 + 60A_2 = -12000 \end{aligned}$$

που δίνει $A_1 = 300$ και $A_2 = 200$, άρα τελικά

$$v_0(t) = 300e^{-80t} \cos 60t + 200e^{-80t} \sin 60t \text{ V}$$

Άλλα μεγέθη (για πιθανή επιβεβαίωση, κλπ.):

$$i(t) = -e^{-80t} \sin 60t$$

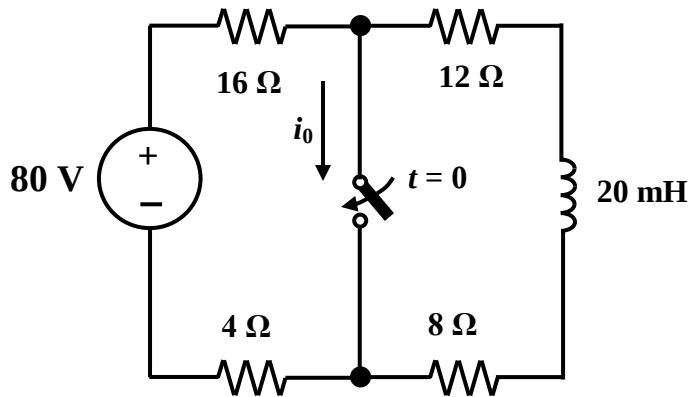
$$\left. \frac{dv_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i(0^+)}{C} = 0$$

$$v_C(t) = 300e^{-80t} \cos 60t + 400e^{-80t} \sin 60t$$

ΘΕΜΑ 4. [20%]

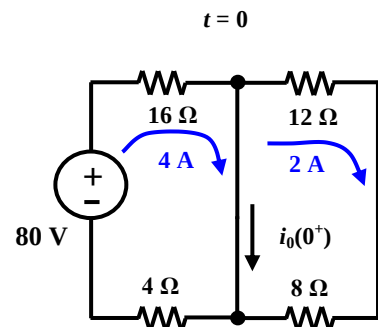
Στο πιο κάτω κύκλωμα, που λειτουργούσε για πολύ χρόνο, τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει. Προσδιορίστε τα

1. $i_0(0^+)$
2. $i_0(\infty)$
3. $i_0(t)$, $t \geq 0$
4. Πόσα μs μετά το κλείσιμο του διακόπτη το ρεύμα i_0 θα είναι ίσο με 3,5 A;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Κατάσταση πριν το γεγονός (κλείσιμο του διακόπτη): ο επαγωγός έχει γίνει βραχυκύκλωμα και διαρρέεται από ρεύμα $80/(16+12+8+4) = 80/40 = 2$ A. Μόλις κλείσει ο διακόπτης, δημιουργείται δρόμος για να περάσει ρεύμα. Οι αντιστάτες $16\ \Omega$ και $4\ \Omega$ αντιδρούν στιγμιαία και άγουν δια μέσου του νέου δρόμου οπότε αμέσως κυκλοφορεί ένα ρεύμα $80/(16+4) = 80/20 = 4$ A. Δεδομένου όμως ότι ο επαγωγός θα διατηρήσει ακέραιο το ρεύμα του για την χρονική στιγμή αμέσως μετά το γεγονός. Άρα θα κυκλοφορήσει και ένα ρεύμα 2 A στον κλάδο του επαγωγού. Από τον νόμο ρευμάτων του Kirchhoff προκύπτει ότι $i_0(0^+) = 4 - 2 = 2$ A.



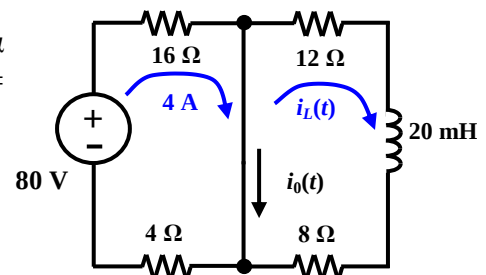
2. Εξαιτίας της βραχυκύκλωσης, οι αντιστάτες των $12\ \Omega$ και $8\ \Omega$ καθώς και ο επαγωγός, τελικά (αφού παρέλθει πολύς χρόνος μετά το κλείσιμο του διακόπτη) δεν θα παίζουν κανένα ρόλο. Οπότε, $i_0(\infty) = 80/(16+4) = 4$ A.

3. Από την εκφόρτιση του επαγωγού έχουμε ότι το ρεύμα που θα «προκαλέσει» είναι $i_L(t) = 2 e^{-t/\tau}$ όπου $\tau = L/R = (20 \times 10^{-3})/20 = 0,001$ s, οπότε

$$i_L(t) = 2 e^{-1000t} \text{ A}$$

και τελικά $i_0(t) = 4 - 2 e^{-1000t} \text{ A}$

4. Από την απάντηση στο ερώτημα 3, $4 - 2 e^{-1000x} = 3,5$ οπότε $2 e^{-1000x} = 0,5 \Rightarrow -1000x = \ln 0,25 \Rightarrow x = 1,386 \times 10^{-3}$ s και τελικά το ρεύμα θα είναι 3,5 A μετά από 1386 μs.

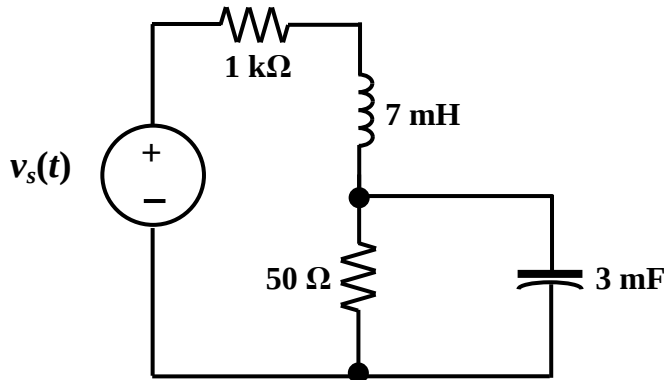


ΘΕΜΑ 5. [15%]

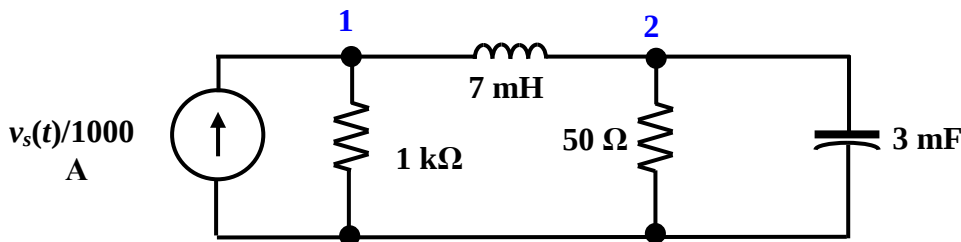
Για το πιο κάτω κύκλωμα (στο οποίο δεν υπάρχει αρχικά αποθηκευμένη ενέργεια) καταστρώστε σε μορφή πίνακα

1. τις εξισώσεις κομβικών τάσεων
2. τις εξισώσεις βροχικών εντάσεων

Απλά καταστρώστε τις εξισώσεις σε μορφή γραμμικού συστήματος και **μη** δοκιμάσετε να τις λύσετε.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο κομβικών τάσεων με τον «αυτόματο» τρόπο, πρέπει το κύκλωμά μας να είναι στην κατάλληλη μορφή, δηλαδή να μην περιέχει πηγές τάσης αλλά μόνο πηγές ρεύματος. Με έναν απλό μετασχηματισμό πηγών, μπορούμε να πάρουμε



Τώρα, με απλή επισκόπηση, για τις κομβικές τάσεις:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1000} + \frac{1}{7 \times 10^{-3} D} & -\frac{1}{7 \times 10^{-3} D} \\ -\frac{1}{7 \times 10^{-3} D} & \frac{1}{7 \times 10^{-3} D} + \frac{1}{50} + 3 \times 10^{-3} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_s}{1000} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Με απλή επισκόπηση (στο αρχικό κύκλωμα), για τις βροχικές εντάσεις:

$$\begin{pmatrix} 1000 + 50 + 7 \times 10^{-3} D & -50 \\ -50 & 50 + \frac{1}{3 \times 10^{-3} D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_s \\ 0 \end{pmatrix}$$