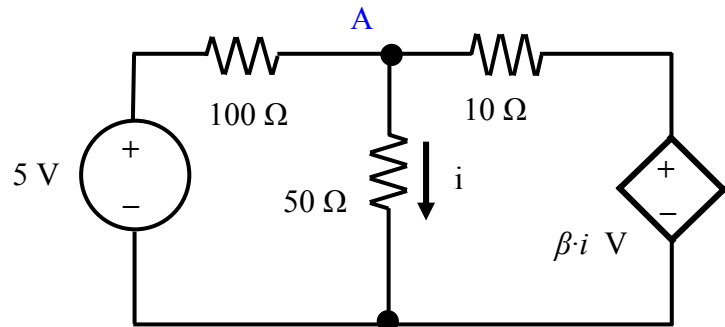


ΘΕΜΑ 1. [15%]

Στο κύκλωμα δεξιά, να βρεθεί η τιμή του συντελεστή β έτσι ώστε το ρεύμα i να είναι ίσο με 5 A.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Σχηματίζουμε την εξίσωση κομβικών τάσεων:

$$\frac{v-5}{100} + \frac{v}{50} + \frac{v-\beta i}{100} = 0$$

όπου v η τάση κόμβου A. Γνωρίζοντας πως $i = 5$, βρίσκουμε $v = 50 \cdot 5 = 250$ V, οπότε $\beta = 64,9$.

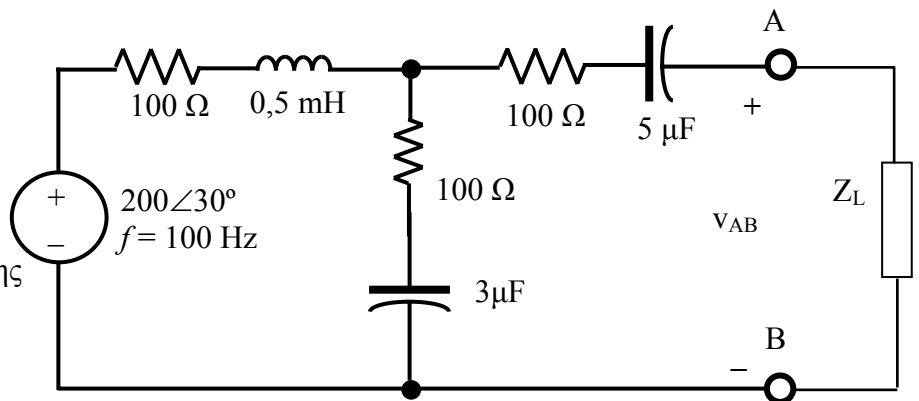
Αυτός είναι ο πιο «κατάλληλος» τρόπος από τους πολλούς που υπάρχουν, επειδή ελαχιστοποιεί τις πράξεις που πρέπει να εκτελεστούν. Με μέθοδο βροχικών εντάσεων, για παράδειγμα, θα πρέπει να λύσουμε σύστημα 2×2 (πολλοί το έκαναν και μάλιστα με ορίζουσες!!—μόνο 2 βρήκαν σωστό αποτέλεσμα...)

ΘΕΜΑ 2. [30%]

Το κύκλωμα στα δεξιά βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση και η πηγή διέγερσης είναι ημιτονοειδής με παραμέτρους όπως σημειώνονται στο σχήμα.

Να βρεθεί η τιμή της σύνθετης αντίστασης φορτίου Z_L για την οποία συμβαίνει η μέγιστη μεταφορά ισχύος από το κύκλωμα στο φορτίο.

(2) Να βρεθεί η τάση $v_{AB}(t)$ όταν η σύνθετη αντίσταση φορτίου Z_L δεν είναι συνδεδεμένη.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

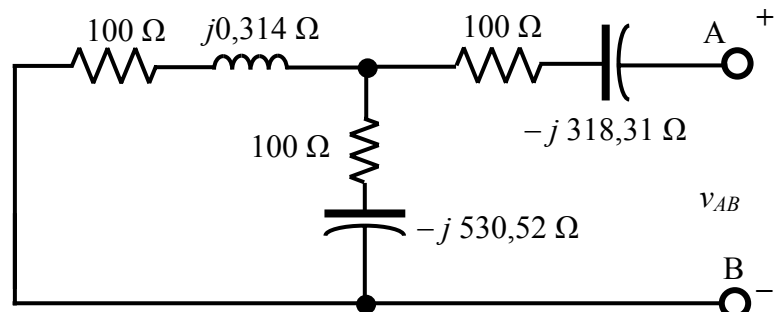
Για μέγιστη μεταφορά ισχύος, πρέπει η αντίσταση που φαίνεται από την Z_L να είναι ίση με την ισοδύναμη αντίσταση Thevenin (δεδομένου ότι το κύκλωμα βρίσκεται στη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση, η σύνθετη αντίσταση Z_L πρέπει να είναι ίση με τη συζυγή της αντίστασης Thevenin).

Ξανασχεδιάζουμε το κύκλωμα αντικαθιστώντας τις τιμές των στοιχείων που αποθηκεύουν ενέργεια με τις αντιδράσεις τους (π.χ. για $5 \mu\text{F}$, $X = 1/(j\omega C) = -j/(2\pi \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}) = -j1000/\pi = -j318,31 \Omega$) και βραχυκυκλώνοντας την πηγή τάσης για να την εξουδετερώσουμε. Από τα A και B, η σύνθετη αντίσταση αποτελείται από την $100 - j318,31$ σε σειρά με τον παράλληλο συνδυασμό των $100 - j0,314$ και $100 - j530,52$, που τελικά είναι $193,875 - j334,546 \Omega$ ($386,66 \angle -59,9^\circ$). Άρα πρέπει $Z_L = 193,875 + j334,546 \Omega$.

Η ζητούμενη τάση είναι η τάση Thevenin, που υπολογίζεται από τον διαιρέτη τάσης:

$$200 \angle 30^\circ \frac{100 - j530,52}{(100 - j530,52) + (100 + j0,314)} = 179,038 + j65,191 = 190,54 \angle 20^\circ$$

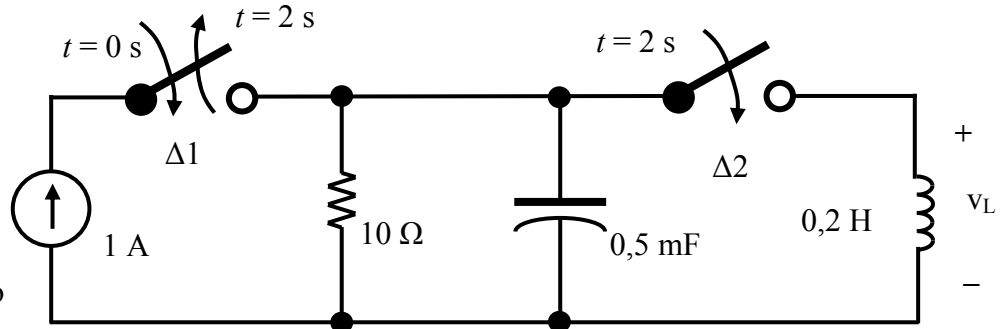
αφού η $100 - j318,31 \Omega$ δεν διαρρέεται από ρεύμα.



Για να απαντηθεί αυτό το θέμα, πρέπει να εκτελεστούν συνολικά: 2 πολλαπλασιασμοί, 2 διαιρέσεις και 3 προσθέσεις μιγαδικών αριθμών...

ΘΕΜΑ 3. [35%]

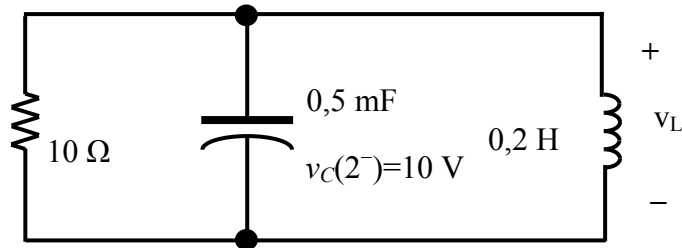
Στο κύκλωμα στα δεξιά, που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, ο διακόπτης Δ1 κλείνει στον χρόνο $t = 0$ και ανοίγει μετά από 2 s. Ο διακόπτης Δ2 κλείνει όταν $t = 2$ s, απόλυτα συγχρονισμένος με το άνοιγμα του Δ1. Να υπολογιστεί ο χρόνος κατά τον οποίο η τάση v_L στα άκρα του επαγωγού είναι ίση με 2 V.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αρχικά υπάρχει ένα κύκλωμα RC που στη συνέχεια μετατρέπεται σε παράλληλο κύκλωμα RLC. Αφού το ερώτημα αφορά τον επαγωγό, το μόνο που μας ενδιαφέρει από το RC είναι η επίδραση που έχει στα στοιχεία που συμμετέχουν στο RLC, δηλαδή σε τι κατάσταση τα «παραδίδει» όταν $t = 2$ s.

Η σταθερά χρόνου του RC είναι $10 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,005$ s. Άρα, μετά από 4 σταθερές χρόνου, και για περισσότερη ασφάλεια ας πούμε 6 σταθερές χρόνου, δηλ. σε 30 ms, το κύκλωμα RC έχει φτάσει σε μόνιμη κατάσταση. Άρα ο πυκνωτής έχει πλήρως φορτιστεί στα 10 V μετά από 2 s και το κύκλωμα γίνεται για $t > 2$ s



Κατά τα γνωστά σχηματίζουμε τη διαφορική εξίσωση (ομογενή στην περίπτωση μας) ή υπολογίζουμε κατευθείαν τις παραμέτρους. Έτσι, $\alpha = 100$ Neper και $\omega_0 = 100$ rad/s. Άρα το RLC είναι στην κρίσιμη κατάσταση και η λύση δίνεται από τη σχέση

$$v_L(t-2) = [K_1 + K_2(t-2)]e^{-100(t-2)}, \quad t \geq 2$$

Για ευκολία, και λόγω της γραμμικότητας, μπορούμε να «μηδενίσουμε» τον χρόνο αρκεί να θυμόμαστε ότι σε κάθε τιμή χρόνου που διαβάζουμε ή υπολογίζουμε πρέπει να προσθέτουμε 2s:

$$v_L(\tau) = [K_1 + K_2\tau]e^{-100\tau}, \quad \tau \geq 0$$

Επειδή ο πυκνωτής θα διατηρήσει την τάση του και βέβαια επειδή $v_C = v_L$

$$K_1 + K_2 \cdot 0 = v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 \Rightarrow K_1 = 10$$

Για την άλλη αρχική συνθήκη, ισχύει ότι

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$$

όπου i_C είναι το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή. Δεδομένου ότι ο επαγωγός θα διατηρήσει το ρεύμα του για τη χρονική στιγμή 0^+ κι επειδή ο αντιστάτης «βλέπει» αμέσως τα 10 V που παρέχει ο πυκνωτής, από τον νόμο ρευμάτων του Kirchhoff παίρνουμε ότι $i_C(0^+) = -1$ A. Άρα

$$\left. \frac{dv_L}{dt} \right|_{\tau=0^+} = \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{\tau=0^+} = \frac{i_C}{C} = \frac{-1}{0,5 \cdot 10^{-3}} = -2000$$

Οπότε

$$\dot{v}_L(0^+) = \frac{d}{d\tau}([10 + K_2\tau]e^{-100\tau}) \Big|_{\tau=0^+} \Rightarrow -2000 = K_2e^{-100 \cdot 0^+} - 100(10 + K_2 \cdot 0^+)e^{-100 \cdot 0^+} \Rightarrow K_2 = -1000$$

και τελικά

$$v_L(\tau) = (10 - 1000\tau)e^{-100\tau}, \quad \tau \geq 0$$

Για το βασικό ερώτημα του προβλήματος, ψάχνουμε τη χρονική στιγμή τ^* για την οποία ισχύει

$$2 = (10 - 1000\tau^*)e^{-100\tau^*} \quad \text{ή} \quad 0,2 = (1 - 100\tau^*)e^{-100\tau^*}$$

Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση σε κλειστή μορφή. Αλλά ο καλός μηχανικός δεν τα παρατάει. Μπορούν να γίνουν διάφορα πράγματα χρησιμοποιώντας την εφευρετικότητά μας και ότι μέσο έχουμε στη διάθεσή μας:

1. Προσεγγίζουμε το εκθετικό με ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης (για να μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση που προκύπτει) και παίρνουμε

$$(1 - 100\tau^*)(1 - 100\tau^*) = 0,2 \Rightarrow \tau^* = 0,00553 \text{ (Συγχαρητήρια στον κ. Κ. Κρομμύδα)}$$

2. Φράζουμε και εντοπίζουμε τη λύση. Επειδή πρέπει να ισχύει

$$1 - 100\tau^* > 0 \Rightarrow \tau^* < 0,01$$

στη συνέχεια δοκιμάζουμε τιμές και βρίσκουμε $\tau^* = 0,0055$ (Συγχαρητήρια στην κ. Σ.-Μ. Δήμα)

3. Φράζουμε τη λύση:

$$0,2 = (1 - 100\tau^*)e^{-100(\tau^*-2)} \Rightarrow 0,2 = (1 - 100\tau^*)e^{-100\tau^*}e^{200} \Rightarrow \frac{0,2}{e^{200}} = (1 - 100\tau^*)e^{-100\tau^*} \Rightarrow$$

$$0 = (1 - 100\tau^*)e^{-100\tau^*} \Rightarrow \tau^* \approx 0,01$$

(Συγχαρητήρια στον κ. Π. Μέρμιγκα και την κα. Α. Φωτοπούλου)

4. Υπολογιστικές δοκιμές μέχρι να ικανοποιηθεί περίπου η εξίσωση

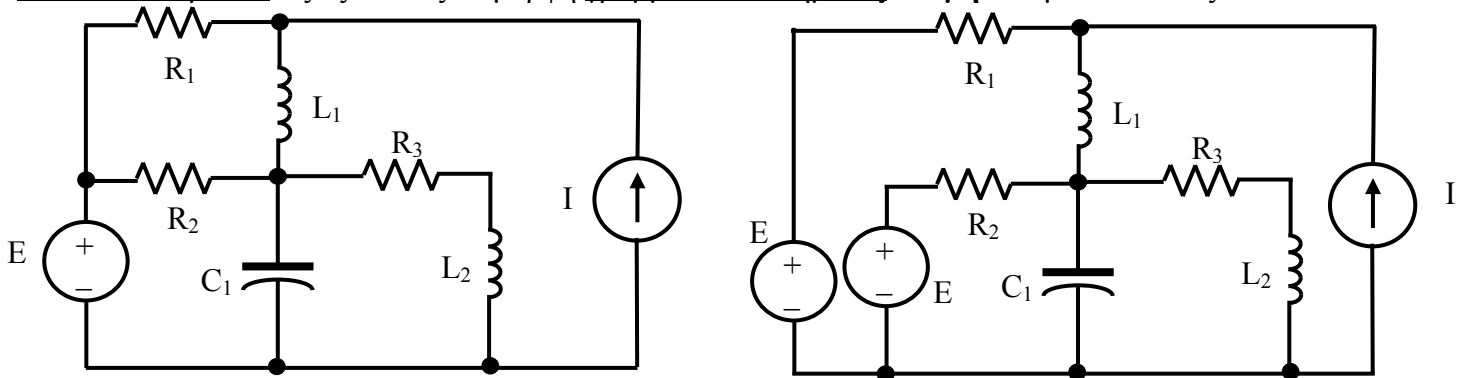
(Συγχαρητήρια στους κκ. Α. Ρεκάτσινα [0,0629], Α. Σαρηγιαννίδη [0,0077])

Η ορθή τιμή όπως τη δίνει το Mathematica είναι $\tau^* = 0,00625983$ δηλ. στην πραγματικότητα $\tau^* = 2,00626 \text{ s}$

ΘΕΜΑ 4. [20%]

Για το κύκλωμα στα δεξιά (στο οποίο δεν υπάρχει αρχικά αποθηκευμένη ενέργεια) καταστρώστε σε μορφή γραμμικού συστήματος τις εξισώσεις κομβικών τάσεων.

Απλά καταστρώστε τις εξισώσεις σε μορφή γραμμικού συστήματος και μη δοκιμάσετε να τις λύσετε.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αρχικά πρέπει να φέρουμε το κύκλωμα σε μορφή που περιέχει μόνο πηγές ρεύματος (αφού θέλουμε κομβικές τάσεις). Με τον γνωστό τρόπο (όπως εξηγήθηκε στο μάθημα και βλ. Μάργαρη, Τόμο Α, σελ. 282) παίρνουμε το ισοδύναμο κύκλωμα επάνω δεξιά και με τον επίσης γνωστό τρόπο τις εξισώσεις του γραμμικού συστήματος.

