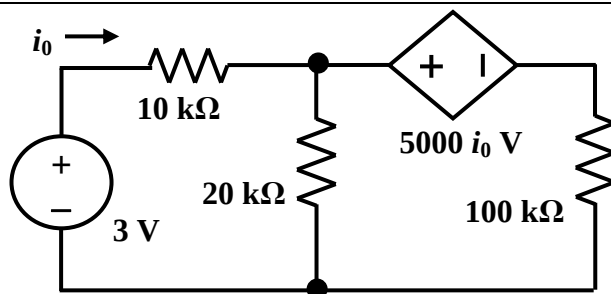


ΘΕΜΑ 1. [10%]

Στο κύκλωμα στα δεξιά, προσδιορίστε την ενέργεια που αποδίδεται σε ημερήσια βάση (24 ώρες) στον δεξιό κλάδο (εξαρτημένη πηγή και αντίσταση $100 \text{ k}\Omega$).



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ο απλούστερος τρόπος είναι με κομβικές τάσεις:

$$\frac{v-3}{10000} + \frac{v}{20000} + \frac{v-5000 i_0}{100000} = 0 \Rightarrow 10v - 30 + 5v + v - 5000 i_0 = 0 \Rightarrow 16v - 5000 i_0 = 30$$

Το ρεύμα i_0 δίνεται από τη σχέση $i_0 = \frac{3-v}{10000}$

Συνδυάζοντας, παίρνουμε ότι $v = 63/33 = 1,909 \text{ V}$. Επομένως, $i_0 = 0,109 \text{ mA}$ ενώ $0,0955 (=1,909/20000) \text{ mA}$ διαρρέουν την αντίσταση των 20000Ω , οπότε ο δεξιός κλάδος διαρρέεται από $0,0136 \text{ mA}$.

ΙΣΧΥΣ: $5000 i_0 0,0136 10^{-3} + (0,0136 10^{-3})^2 100000 = 5000 0,109 10^{-3} 0,0136 10^{-3} + (0,0136 10^{-3})^2 100000$

(το ρεύμα μπαίνει από το +, άρα η πηγή απορροφά ισχύ) $= 7,44 10^{-6} + 1,86 10^{-5} = 2,6 10^{-5} \text{ W}$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ: $2,6 10^{-5} \times 24 \times 60 \times 60 = 2,25 \text{ J} (= 0,625 \text{ mWh})$

ΘΕΜΑ 2. [15%]

Στο κύκλωμα στα δεξιά, ισχύει ότι το ρεύμα $i_1(0^-) = 10 \text{ A}$ και το ρεύμα $i_2(0^-) = 5 \text{ A}$.

Να βρεθούν:

A. το ρεύμα $i_1(0^+)$

B. το ρεύμα $i_2(0^+)$

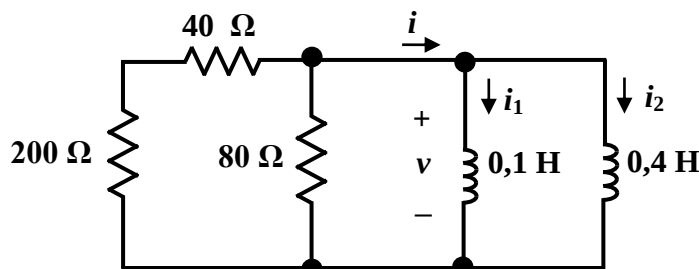
Γ. το ρεύμα $i(0^+)$

Δ. η τάση $v(t)$, $t > 0$

Ε. το ρεύμα $i_1(t)$, $t > 0$

Ζ. το ρεύμα $i_2(t)$, $t > 0$

Η. Δείξτε ότι η αποθηκευμένη ενέργεια στο $t = 0$ είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας που καταναλώνεται στο ωμικό μέρος τού κυκλώματος μεταξύ $t = 0$ και $t = \infty$ συν την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στους επαγωγούς για $t = \infty$.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΠΡΟΣΟΧΗ! Το κύκλωμα είναι 2^{ης} τάξης αλλά όπου μας συμφέρει θα το μετατρέψουμε σε 1^{ης} τάξης.

A,B,Γ: Δεδομένου ότι τα πηνία διατηρούν το ρεύμα τους, $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 10 \text{ A}$, $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 5 \text{ A}$ και φυσικά $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = 15 \text{ A}$.

Δ. Συνδυάζοντας τις αντιστάσεις και τα πηνία (που είναι παράλληλα συνδεδεμένα) παίρνουμε το κύκλωμα (RL):

Τότε, από την αντίσταση, $v(0^+) = -i(0^+) 60 = -900 \text{ V}$.

Η σταθερά $\tau = L/R = 0,08/60 = 1,333 \text{ ms}$ έτσι ώστε τελικά $v(t) = -900e^{-750t} \text{ V}$

Ε. Αφού έχουμε προσδιορίσει την τάση στα άκρα κάθε πηνίου, το ρεύμα i_1 είναι:

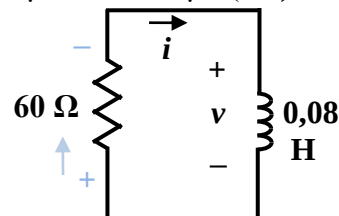
$$i_1(t) = i_1(0^+) + \frac{1}{0,1} \int_0^t (-900)e^{-750z} dz = 10 + 12(e^{-750t} - 1) = \underline{12e^{-750t} - 2 \text{ A}}$$

Ζ. Παρομοίως για το ρεύμα i_2 :

$$i_2(t) = i_2(0^+) + \frac{1}{0,4} \int_0^t (-900)e^{-750z} dz = 5 + 3(e^{-750t} - 1) = \underline{3e^{-750t} + 2 \text{ A}}$$

Η. $W(0) = \frac{1}{2} 0,1 i_1^2(0) + \frac{1}{2} 0,4 i_2^2(0) = 5 + 5 = 10 \text{ J}$, $W_R(\infty) = \int_0^\infty R [i_1(t) + i_2(t)]^2 dt = 60 \int_0^\infty 15^2 e^{-1500t} dt = 9 \text{ J}$

Από τα Ε και Ζ έχουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = -2 \Rightarrow W_L(\infty) = \frac{1}{2} 0,1 (-2)^2 = 0,2 \text{ J}$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = 2 \Rightarrow W_{L_2}(\infty) = \frac{1}{2} 0,4(2)^2 = 0,8 \text{ J}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο: $W(0) = W_R(\infty) + W_{L_1}(\infty) + W_{L_2}(\infty)$.

[ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1: Αυτό είναι ένα ιδιαίτερο κύκλωμα καθώς ένα ρεύμα 2 A κυκλοφορεί αέναα στον βρόχο των δυο πηνίων. Φυσικά, ένα λίγο πιο ρεαλιστικό, αλλά και πιο πολύπλοκο, μοντέλο με αντιστάσεις σε σειρά με τα πηνία θα έδειχνε ότι η ισχύς τελικά καταναλώνεται εξ ολοκλήρου.]

[ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2: Ο τύπος του κυκλώματος 1ης τάξης $x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)] e^{-t/\tau}$ ΔΕΝ έχει εφαρμογή στα ρεύματα των πηνίων καθώς το κύκλωμα είναι 2^{ης} τάξης. Έχει όμως εφαρμογή (και το χρησιμοποιήσαμε) στην κοινή τους τάση επειδή από τα συγκεκριμένα σημεία το κύκλωμα φαίνεται σαν 1^{ης} τάξης.]

ΘΕΜΑ 3. [10%]

Για το κύκλωμα στα δεξιά καταστρώστε:

(Α) τις εξισώσεις βροχικών εντάσεων και

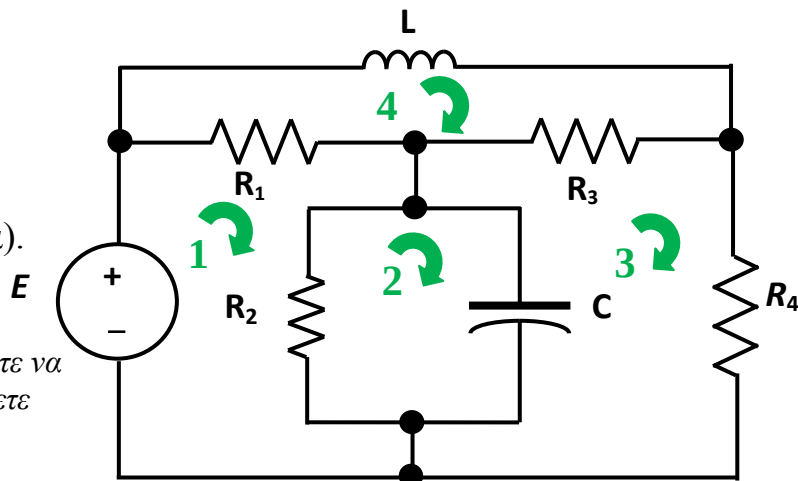
(Β) τις εξισώσεις κομβικών τάσεων

σε μορφή γραμμικού συστήματος (πίνακα).

Στο κύκλωμα δεν υπάρχει αρχικά

αποθηκευμένη ενέργεια.

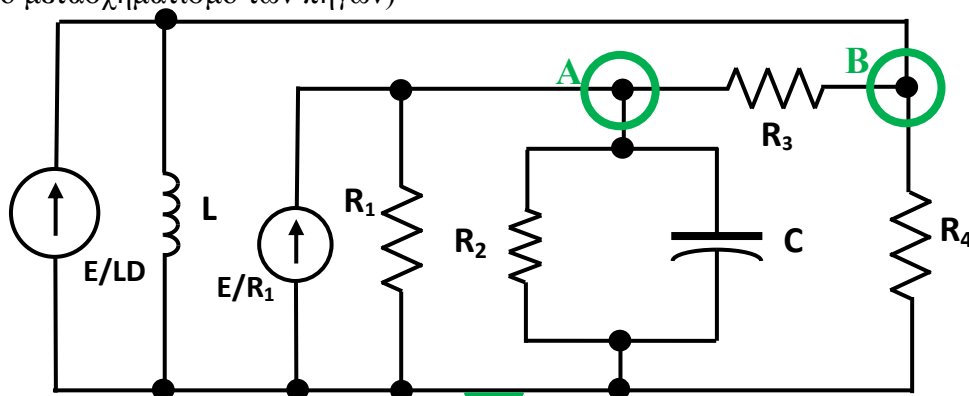
Απλά καταστρώστε τις εξισώσεις και μη δοκιμάσετε να τις λύσετε, να τις μετασχηματίσετε, ή να σχηματίσετε κάποια διαφορική εξίσωση.



ΒΡΟΧΙΚΕΣ ΕΝΤΑΣΕΙΣ

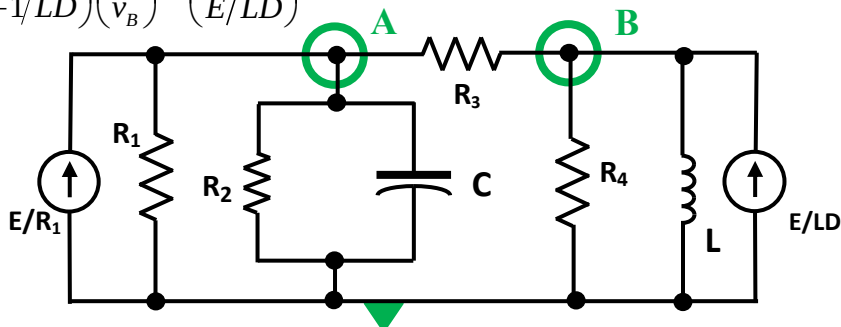
$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{CD} & \frac{-1}{CD} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{CD} & R_3 + R_4 + \frac{1}{CD} & -R_3 \\ -R_1 & 0 & -R_3 & R_1 + R_3 + LD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ΚΟΜΒΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ (μετά από μετασχηματισμό των πηγών)



$$\begin{pmatrix} 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + CD & -1/R_3 \\ -1/R_3 & 1/R_3 + 1/R_4 + 1/LD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/R_1 \\ E/LD \end{pmatrix}$$

[ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ
ΓΙΑ ΚΟΜΒΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ]

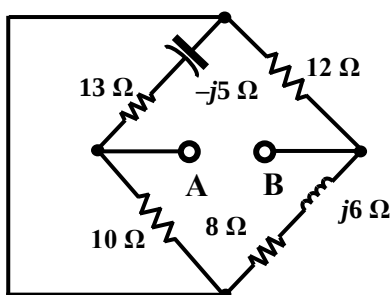
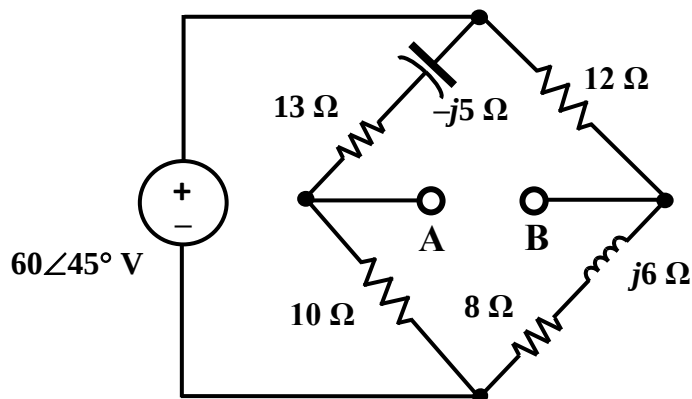


ΘΕΜΑ 4. [20%]

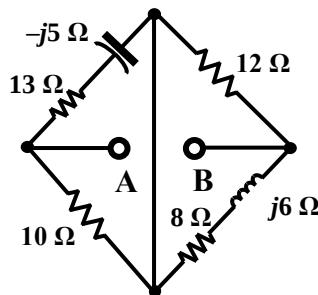
Για το κύκλωμα στα δεξιά προσδιορίστε το ισοδύναμο Thevenin και το ισοδύναμο Norton από τα σημεία A και B. Το κύκλωμα βρίσκεται σε μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

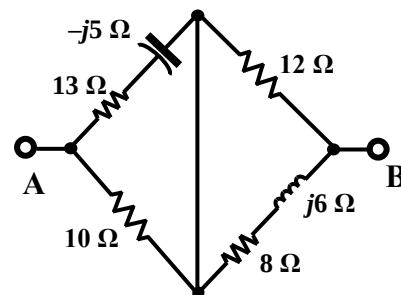
Για τη σύνθετη αντίσταση Thevenin:



Εξουδετέρωση πηγής τάσης



Βολικός επανασχεδιασμός



Ακόμα πιο βολικός επανασχεδιασμός

Μετά τα παραπάνω, είναι προφανές ότι

$$Z_{Th} = \{(13 - j5) \parallel (10)\} + \{(8 + j6) \parallel (12)\}$$

$$= \frac{10(13 - j5)}{(23 - j5)} + \frac{12(8 + j6)}{(20 + j6)} = (5,85 - j0,90) + (5,39 + j1,98) \Rightarrow$$

$$Z_{Th} = 11,24 + j1,08 \, \Omega$$

Για την τάση Thevenin, πρέπει να υπολογίσουμε την τάση στα σημεία A και B στο αρχικό κύκλωμα.

Μπορούμε να γράψουμε ότι (NTK): $(13 - j5)I_1 + V_{AB} - 12I_2 = 0$, όπου τα ρεύματα I_1 και I_2 έχουν κατεύθυνση από τον πάνω κόμβο προς τα κάτω. Τότε:

$$I_1 = \frac{60\angle 45^\circ}{(23 - j5)} = 1,38 + j2,14$$

$$I_2 = \frac{60\angle 45^\circ}{(20 + j6)} = 2,53 + j1,36$$

$$V_{AB} = 12I_2 - (13 - j5)I_1 = 1,72 - j4,64 \, \text{V}$$

Οπότε

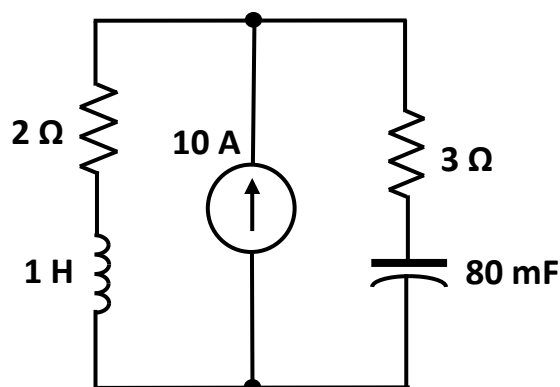
$$V_{AB} = 4,9\angle -69^\circ \, \text{V}$$

Με βάση τα παραπάνω, το ρεύμα Norton είναι

$$I_N = \frac{4,90\angle -69^\circ}{11,24 + j1,08} = 0,43\angle -74^\circ \, \text{A}$$

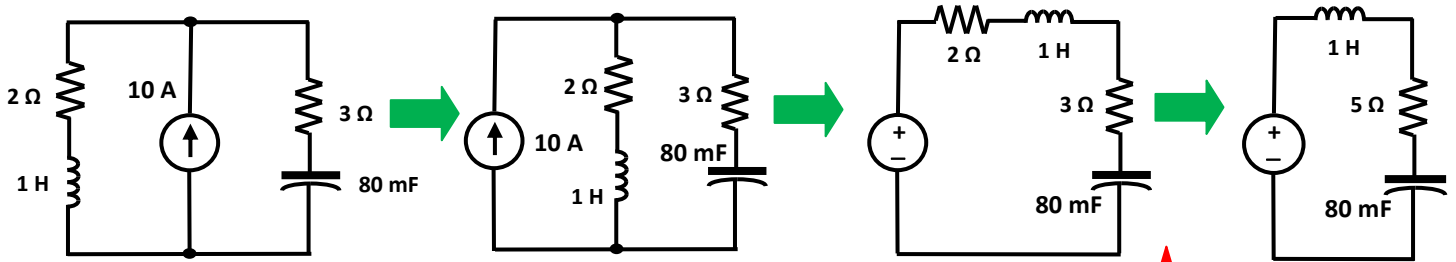
ΘΕΜΑ 5. [25%]

Το κύκλωμα στα δεξιά λειτουργεί για πολύ χρόνο. Στο $t = 0$, το ρεύμα της πηγής αυξάνεται στιγμιαία και παραμένει στα 20 A. Να βρεθεί η τάση στα άκρα της πηγής ρεύματος για κάθε t .



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι πιο κάτω μετασχηματισμοί μπορούν να μας βοηθήσουν για να καταλάβουμε καλύτερα το είδος και τη λειτουργία του κυκλώματος.



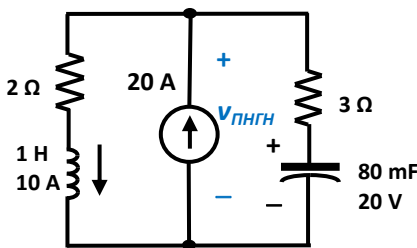
Πρόκειται λοιπόν για ένα σειριακό RLC με $R = 5 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ και $C = 80 \text{ mF}$ στο οποίο συμβαίνει μια ξαφνική αλλαγή στη διέγερση. Συνεπώς κάνουμε ανάλυση του τύπου ΠΙΝ-META.

$t < 0$:

Το κύκλωμα βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση. Επειδή η διέγερσή του είναι σταθερή, το πηνίο έχει γίνει βραχυκύκλωμα και ο πυκνωτής ανοιχτό κύκλωμα. Αυτό σημαίνει ότι όλο το ρεύμα της πηγής κυκλοφορεί στο πηνίο: $i_L(0^-) = 10 \text{ A}$. Από τη μεριά του ο πυκνωτής «βλέπει» την τάση στα άκρα της πηγής που είναι ίση με την τάση στα άκρα της αντίστασης των 2Ω , δηλ. $v_C(0^-) = 2 \times 10 = 20 \text{ V}$.

$t > 0$:

Το κύκλωμα γίνεται



Με το ίδιο σκεπτικό όπως και παραπάνω, $i_L(\infty) = 20 \text{ A}$ και $v_C(\infty) = 2 \times 20 = 40 \text{ V}$, οπότε και η (ζητούμενη) τιμή της τάσης της πηγής στη μόνιμη κατάσταση θα είναι 40 V .

[ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1: Μια τέτοια διαδικασία θα απέτρεπε σίγουρα το **χονδροειδές λάθος** που έκαναν πολλοί θεωρώντας ότι το κύκλωμα αποτελείται από δυο υποκυκλώματα, ένα RL κι ένα RC.]

[ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2:

Αγνοώντας τα περί RLC και έτοιμων λύσεων, με κομβικές τάσεις παίρνουμε $\frac{v_{\pi\eta\gamma\eta}(t)}{2+D} + \frac{v_{\pi\eta\gamma\eta}(t)}{3+\frac{1}{0,08D}} - 20 = 0$ που καταλήγει στην ίδια διαφ. εξίσωση, φυσικά.]

Για το RLC θα έχουμε ότι $\alpha = R/(2L) = 5/2 = 2,5$ και $(\omega_0)^2 = 1/(LC) = 1/0,08 = 12,5$.

Δεδομένου ότι $\alpha < \omega_0$ το κύκλωμα θα έχει υποκρίσιμη απόκριση με ρίζες

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2,5 \pm \sqrt{6,25 - 12,5} = -2,5 \pm \sqrt{-6,25} = -2,5 \pm j2,5$$

Τώρα, **οποιοδήποτε** μέγεθος στο κύκλωμα δίνεται από τη σχέση που εμπλέκει τις δυο ρίζες και την αντίστοιχη μερική λύση.

Για τη συνέχεια:

Ο ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ, δουλεύοντας με ένα βασικό μέγεθος, π.χ. το ρεύμα του πηνίου i_L :

$$i_L(t) = e^{-2,5t} (A_1 \cos 2,5t + A_2 \sin 2,5t) + i_L(\infty) = e^{-2,5t} (A_1 \cos 2,5t + A_2 \sin 2,5t) + 20$$

Από τις αρχικές συνθήκες θα πάρουμε

$$(A) \quad A_1 + 20 = i_L(0^+) = i_L(0^-) = 10 \Rightarrow A_1 = -10$$

(B) Για την παράγωγο, το αριστερό μέλος είναι

$$e^{-2,5t} (2,5A_2 \cos 2,5t - 2,5A_1 \sin 2,5t) - 2,5e^{-2,5t} (A_1 \cos 2,5t + A_2 \sin 2,5t) \Big|_{t=0^+} = -2,5A_1 + 2,5A_2$$

ενώ το δεξιό (από τον νόμο τάσεων)

$$\frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0^+} = \frac{v_L}{L} \Big|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_L(0^+)}{1} = v_L(0^+) = -v_{R=2\Omega}(0^+) + v_{R=3\Omega}(0^+) + v_C(0^+)$$

$$= -10 \times 2 + 10 \times 3 + 20 = 30 \text{ V}$$

$$\text{έτσι ώστε } 25 + 2,5A_2 = 30 \Rightarrow A_2 = 2$$

και τελικά

$$i_L(t) = e^{-2,5t} (-10 \cos 2,5t + 2 \sin 2,5t) + 20$$

Με βάση τα παραπάνω, η τάση της πηγής είναι

$$\begin{aligned}
 v_{\Pi\text{H}\Gamma\text{H}}(t) &= 2 \times i_L(t) + v_L(t) = 2 \times i_L(t) + \frac{1}{1} \frac{di_L(t)}{dt} = 40 + e^{-2,5t} (-20 \cos 2,5t + 4 \sin 2,5t) \\
 &\quad - 2,5e^{-2,5t} (-10 \cos 2,5t + 2 \sin 2,5t) + e^{-2,5t} (5 \cos 2,5t + 25 \cos 2,5t) \\
 &= 40 + e^{-2,5t} (10 \cos 2,5t + 24 \sin 2,5t) \text{ V}
 \end{aligned}$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ, δουλεύοντας **κατευθείαν** με τη ζητούμενη τάση της πηγής, $v_{\Pi\text{H}\Gamma\text{H}}$:

$$v_{\Pi\text{H}\Gamma\text{H}}(t) = e^{-2,5t} (B_1 \cos 2,5t + B_2 \sin 2,5t) + v_{\Pi\text{H}\Gamma\text{H}}(\infty) = e^{-2,5t} (B_1 \cos 2,5t + B_2 \sin 2,5t) + 40$$

Από τις αρχικές συνθήκες θα πάρουμε

$$(A) \quad B_1 + 40 = v_{\Pi\text{H}\Gamma\text{H}}(0^+) = v_{R=3\Omega}(0^+) + v_C(0^+) = 3 \times [20 - i_L(0^+)] + 20 = 30 + 20 \Rightarrow B_1 = 10$$

(B) Για την παράγωγο, το αριστερό μέλος είναι

$$e^{-2,5t} (2,5B_2 \cos 2,5t - 2,5B_1 \sin 2,5t) - 2,5e^{-2,5t} (B_1 \cos 2,5t + B_2 \sin 2,5t) \Big|_{t=0^+} = -2,5B_1 + 2,5B_2$$

ενώ το δεξιό (από τον νόμο τάσεων)

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_{\Pi\text{H}\Gamma\text{H}}}{dt} \Big|_{t=0^+} &= \frac{dv_{R=3\Omega}}{dt} \Big|_{t=0^+} + \frac{dv_C}{dt} \Big|_{t=0^+} = 3 \times \frac{di_C}{dt} \Big|_{t=0^+} + \frac{i_C}{C} \Big|_{t=0^+} = 3 \times \frac{d(20 - i_L)}{dt} \Big|_{t=0^+} + \frac{(20 - i_L)}{C} \Big|_{t=0^+} \\
 &= -3 \times \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0^+} + \frac{20 - i_L(0^+)}{C} = -3 \times 30 + \frac{20 - 10}{0,08} = -90 + 125 = 35
 \end{aligned}$$

$$\text{έτσι ώστε } -25 + 2,5B_2 = 35 \Rightarrow B_2 = 24$$

και τελικά η τάση της πηγής είναι

$$v_{\Pi\text{H}\Gamma\text{H}}(t) = 40 + e^{-2,5t} (10 \cos 2,5t + 24 \sin 2,5t) \text{ V}$$

ΘΕΜΑ 6. [20%]

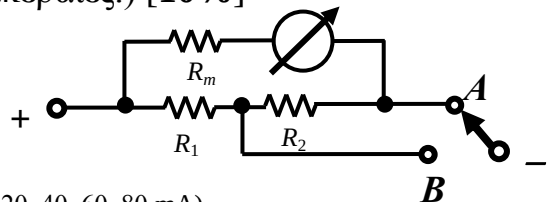
A. Πόση είναι η αναλυτική ικανότητα και πόσο το σφάλμα μετατροπής ενός μετατροπέα από αναλογικό σε ψηφιακό σήμα (ADC) που δουλεύει με 10 δυαδικά ψηφία; [5%]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στη σελ. 82 των σημειώσεων.

B. Χρησιμοποιούμε ένα όργανο με πλήρη κλίμακα στα 10 V που έχει ορθότητα $\pm 1,5\%$ και παίρνουμε μια μέτρηση 5,6 V. Σε ποιο εύρος τιμών βρίσκεται η πραγματική τιμή; [5%]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στη σελ. 41 των σημειώσεων. {5,45, 5,75}

Γ. Σε αμπερόμετρο με όργανο κινητού πηνίου με μόνιμο μαγνήτη και συνδεσμολογία Ayrton, έχουμε τις εξής τιμές: $R_m = 1 \text{ k}\Omega$, ρεύμα πλήρους απόκλισης ίσο με 50 μA , $R_1 = 0,05 \Omega$, και $R_2 = 0,55 \Omega$. Ποια εύρη τιμών ρεύματος μπορεί να μάς δείξει το όργανο αυτό; Αφού προσδιοριστεί το εύρος τιμών, πώς θα γίνει η βαθμονόμηση του οργάνου; (Σημ.: οι αναγραφόμενες στην κλίμακα τιμές πρέπει να είναι ακέραιες.) [10%]



ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στη σελ. 23/24 των σημειώσεων.

{83,38 mA και 1,0005 A} $\rightarrow$ {80 mA και 1 A} όπου η βαθμονόμηση θα γίνει με προσεκτική επισήμανση σημείων που αντιστοιχούν σε τιμές που καλύπτουν ομοιόμορφα το εύρος (π.χ. 20, 40, 60, 80 mA).

Οι ενδιάμεσες υποδιαίρεσεις μπορούν να σημειωθούν εκ των υστέρων.