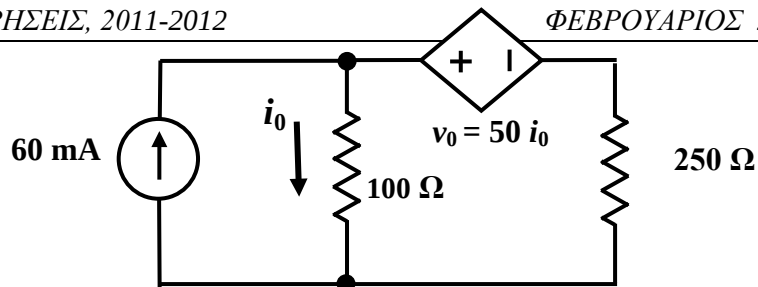


ΘΕΜΑ 1. [10%]

Για το κύκλωμα στα δεξιά, υπολογίστε την τάση v_0 .



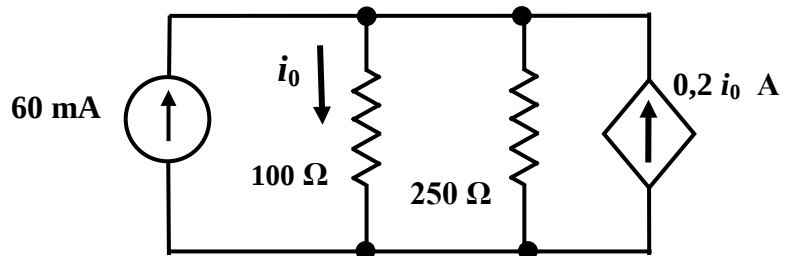
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από τους πολλούς τρόπους που μπορούμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, ένας μόνο είναι **λάθος**: αυτός που «πειράζει» το ρεύμα i_0 , π.χ. μια μετατροπή της πηγής ρεύματος σε πηγή τάσης. **Αντίθετα:**

Με μια μετατροπή της πηγής τάσης (βλ. δεξιά) εμφανίζεται ένα κύκλωμα με δυο μόνο κόμβους και πηγές ρεύματος μόνο, έτοιμο για ανάλυση με κομβικές τάσεις. Αν v είναι η μοναδική κομβική τάση (κόμβος αναφοράς ο κάτω):

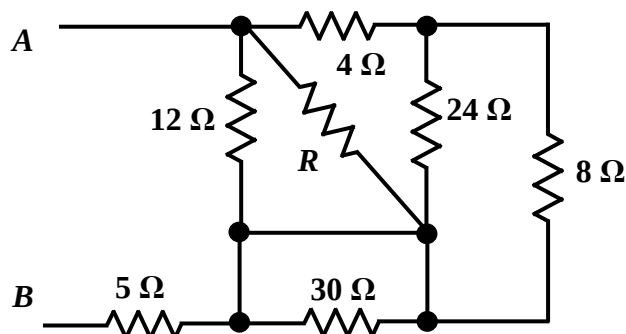
$$\frac{v}{250} + \frac{v}{100} - 0,060 - \frac{50i_0}{250} = 0$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $v = 100 i_0$, παίρνουμε μια απλή εξίσωση για το i_0 και βρίσκουμε ότι $i_0 = 0,05$ A. Άρα, $v_0 = 50 i_0 = 50 \times 0,05 = 2,5$ V.



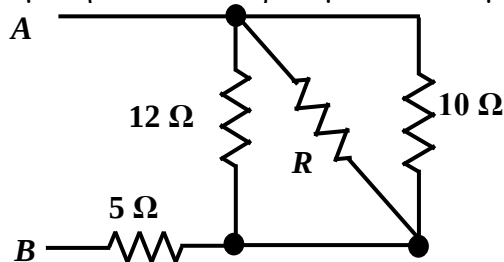
ΘΕΜΑ 2. [5%]

Στο κύκλωμα στα δεξιά, η ισοδύναμη αντίσταση από τα σημεία A και B είναι 9 Ω. Βρείτε την τιμή της R .



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η αντίσταση των 30 Ω είναι βραχυκυκλωμένη και μπορεί να αφαιρεθεί **αμέσως**. Στη συνέχεια, $24 \parallel 8 \rightarrow 6$ Ω, που είναι σε σειρά με την 4 Ω και παίρνουμε το κύκλωμα



«Μαζεύουμε» τις παράλληλες:

$$10 \parallel 12 \rightarrow 60/11 \text{ Ω}$$

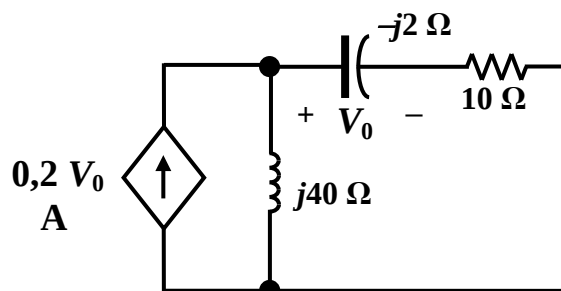
$$60/11 \parallel R \rightarrow \frac{60R}{11R + 60}$$

$$R_{AB} = 9 = 5 + \frac{60R}{11R + 60} \Rightarrow 60R = 4(11R + 60)$$

$$\Rightarrow 60R = 44R + 240 \Rightarrow 16R = 240 \Rightarrow R = 15 \text{ Ω}$$

ΘΕΜΑ 3. [15%]

Στο κύκλωμα στα δεξιά, προσδιορίστε την εμπέδηση εξόδου.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το κύκλωμα δεν έχει δική του ανεξάρτητη πηγή ισχύος. Άρα δεν μπορεί να λειτουργήσει

παρά μόνο αν το διεγείρουμε με μια γνωστή εξωτερική πηγή (ρεύματος ή τάσης) την τιμή της οποίας επιλέγουμε όπως μας συμφέρει καλύτερα. Εδώ πήραμε μια πηγή ρεύματος $1\angle 0^\circ \text{ A}$ (αν είμαστε τυπικοί, η τιμή «1 A» θα ήταν λάθος γιατί πρέπει να δηλώσουμε και τη φάση).

Μετά, πρέπει να βρούμε την τάση στα άκρα της ανεξάρτητης πηγής και ξέρουμε ότι θα έχει τη σημειωμένη πολικότητα επειδή η πηγή **πρέπει** να δίνει ισχύ στο κύκλωμα.

Με μια πηγή ρεύματος $1\angle 0^\circ \text{ A}$ διεγείρουμε το κύκλωμα και γράφουμε NTK για τον δεξιό βρόχο θεωρώντας ότι η τάση της ανεξάρτητης πηγής είναι V :

$$-V + 10 \times 1\angle 0^\circ - j2 \times 1\angle 0^\circ + j40 \times (1\angle 0^\circ + 0,2V_0) = 0 \Rightarrow$$

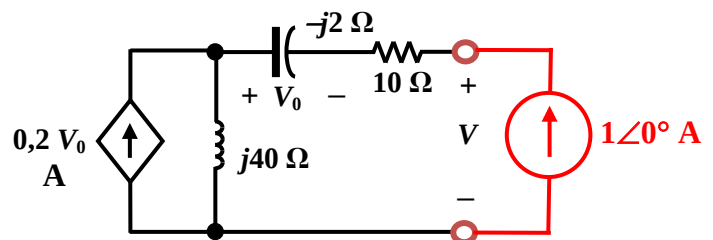
$$-V + 10 - j2 + j40 + j40 \times 0,2V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = -(1\angle 0^\circ) \times (-j2) = j2$$

$$-V + 10 - j2 + j40 + j40 \times 0,2j2 = 0 \Rightarrow$$

$$-V + 10 + j38 - 16 = 0 \Rightarrow V = -6 + j38$$

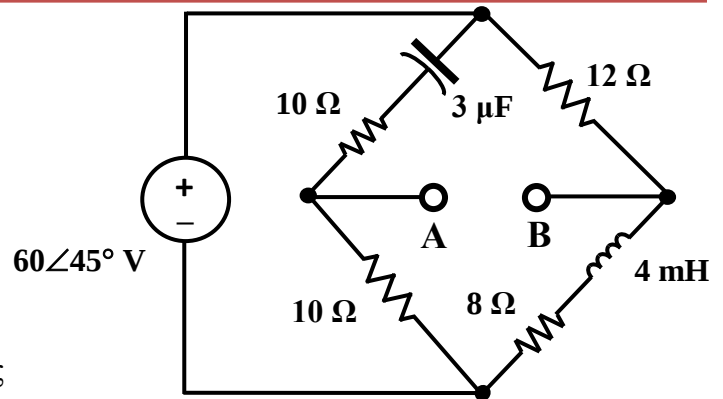
Οπότε, $Z_{εξόδου} = V/(1\angle 0^\circ) = (-6 + j38) \Omega$

[ΣΗΜΕΙΩΣΗ: στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τον «επίσημο» ορισμό της εμπέδησης, δηλ. τον λόγο μιας διέγερσης V προς το ρεύμα I που αναπτύσσεται εξαιτίας της διέγερσης αυτής.]



ΘΕΜΑ 4. [20%]

Για το κύκλωμα στα δεξιά προσδιορίστε την εμπέδηση Thevenin από τα σημεία A και B. Το κύκλωμα βρίσκεται σε μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση με $\omega = 330 \text{ rad/s}$.



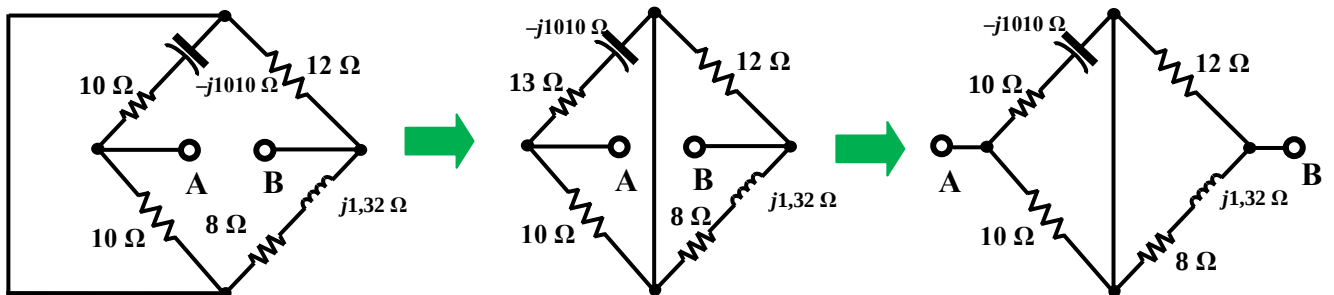
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αφού το κύκλωμα είναι σε ΜΗΚ, περνάμε αμέσως στο πεδίο της συχνότητας:

Ο πυκνωτής των $3 \mu\text{F}$ γίνεται $\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j330 \times 3 \times 10^{-6}} = \frac{10^6}{j990} = -j1010 \Omega$

Το πηνίο των 4 mH γίνεται $j\omega L = j330 \times 4 \times 10^{-3} = j1,32 \Omega$

Για τη σύνθετη αντίσταση Thevenin εξουδετερώνω την πηγή τάσης:



Εξουδετέρωση πηγής τάσης

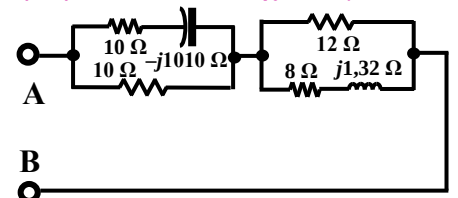
Βολικός επανασχεδιασμός

Ακόμα πιο βολικός επανασχεδιασμός

Μετά τα παραπάνω, είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= \{(10 - j1010) \parallel (10)\} + \{(8 + j1,32) \parallel (12)\} \\ &= \{(10 - j1010) \parallel (10)\} + \{(8 + j1,32) \parallel (12)\} \\ &= \frac{10(10 - j1010)}{(20 - j1010)} + \frac{12(8 + j1,32)}{(20 + j1,32)} = \frac{(100 - j10100)}{(20 - j1010)} + \frac{(96 + j15,84)}{(20 + j1,32)} \end{aligned}$$

Ακόμα περισσότερο βολικός επανασχεδιασμός



$$= \frac{10100,5 \angle -89,5^\circ}{1010,2 \angle -88,9^\circ} + \frac{97,298 \angle 9,4^\circ}{20,04 \angle 3,8^\circ} = 10 \angle -0,57^\circ + 4,86 \angle 5,6^\circ$$

$$= (10 - j0,099) + (4,831 + j0,473) \Rightarrow \boxed{Z_{Th} = 14,831 + j0,374 \Omega}$$

ΘΕΜΑ 5. [10%]

Θέλουμε να μετρήσουμε μια αντίσταση αλλά έχουμε στη διάθεσή μας μόνο ένα αναλογικό μιλιαμπερόμετρο κι ένα ψηφιακό βολτόμετρο. Το μιλιαμπερόμετρο έχει πλήρη κλίμακα στα 10 mA και ορθότητα $\pm 1\%$ ενώ το βολτόμετρο είναι $3\frac{1}{2}$ ψηφίων και σχετικά με ορθότητα αναφέρει $\pm(0,7\%$ της ένδειξης $+ 2)$. Κάνουμε τη σχετική σύνδεση για τις μετρήσεις και διαβάζουμε 4 mA και 16,2 V.

A. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το ρεύμα και την τάση;

B. Τι αβεβαιότητα (σε %) έχουμε για την αντίσταση;

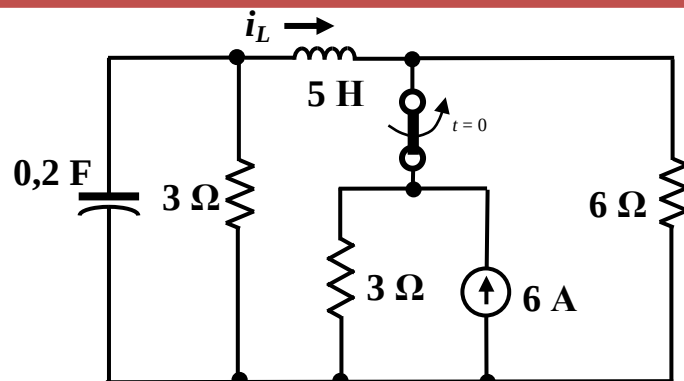
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Στο αναλογικό όργανο, το σφάλμα είναι 1% στα 10 mA, δηλ. 0,1 mA και διατηρείται ίδιο για κάθε μέτρηση, άρα για τα 4 mA ισχύει ότι το εύρος είναι $4 \pm 0,1$ mA $\equiv (3,9 \div 4,1)$ mA. Για την τάση, το ψηφιακό όργανο δείχνει XX,X, άρα το τελευταίο ψηφίο αντιστοιχεί σε 0,1 V οπότε παρουσιάζει σφάλμα $\left(\frac{0,7}{100} \times 16,2 + 2 \times 0,1 \right) = 0,3134$ V. Άρα, το εύρος είναι $16,2 \pm 0,3134$ V $\equiv (15,8866 \div 16,5134)$ V.

B. Η αντίσταση είναι $16,2/0,004 = 4050 \Omega$. Επειδή η εκτίμησή της έγινε μέσω κλάσματος, η αβεβαιότητα που εμφανίζει είναι το άθροισμα των ποσοστιαίων σφαλμάτων τού αριθμητή και του παρονομαστή. Ποσοστιαία, το εύρος τού ρεύματος είναι 2,5% ενώ της τάσης είναι $0,3134/16,2 = 1,9345\%$. Οπότε, η αντίσταση θα έχει αβεβαιότητα $2,5 + 1,9345 = 4,4345\%$ (αυτό αντιστοιχεί σε ένα εύρος τιμών από 3.870 έως 4.230 Ω).

ΘΕΜΑ 6. [30%]

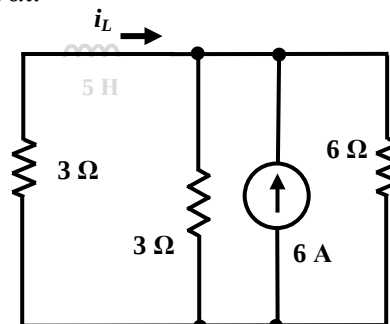
Το κύκλωμα στα δεξιά λειτουργεί για πολύ χρόνο. Στον χρόνο $t = 0$, ο διακόπτης ανοίγει. Να βρεθεί το ρεύμα $i_L(t)$ για κάθε t .



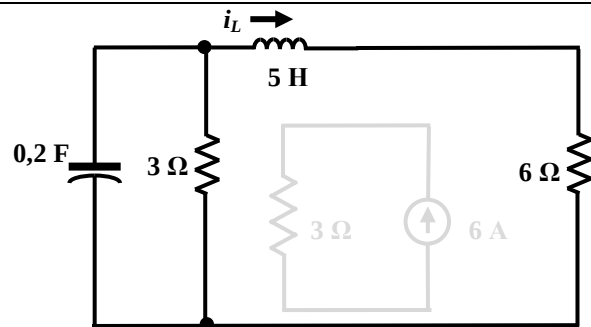
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για $t < 0$ το κύκλωμα είναι λόγω της σταθερής πηγής ρεύματος είναι:

Χρειαζόμαστε το ρεύμα τού πηνίου (που το αφήνουμε να φαίνεται με αχνό χρώμα για να ξέρουμε ακριβώς ποιο ρεύμα αναζητούμε) και την τάση τού πυκνωτή που συμπίπτει με την τάση τής αριστερής αντίστασης των 3 Ω . Η ισοδύναμη αντίσταση είναι $3 \parallel 3 \parallel 6$, δηλ. $1,5 \parallel 6$, δηλ. $9/7,5 = 1,2 \Omega$, οπότε η τάση στα άκρα τού παράλληλου συνδυασμού είναι $6 \times 1,2 = 7,2$ V ενώ το ρεύμα στην αριστερή 3 Ω είναι $7,2/3 = 2,4$ A το οποίο όμως κάνει το i_L να είναι $-2,4$ A λόγω του αντίθετου προσανατολισμού. Οπότε: $i_L(0^-) = -2,4$ A και $v_C(0^-) = 7,2$ V.



Για $t > 0$ το κύκλωμα γίνεται όπως φαίνεται στα δεξιά. Το γκρίζο κομμάτι δεν μας ενδιαφέρει καθώς δεν υπάρχει σχετική ερώτηση. Το κύκλωμα αυτό (το σκούρο) δεν εμπίπτει σε καμιά γνωστή κατηγορία με έτοιμη λύση (ΔΕΝ είναι RLC, όμως είναι 2^{ης} τάξης). Οπότε πρέπει να το λύσουμε με κάποια γενική μέθοδο. Η πιο πρόσφορη είναι να χρησιμοποιήσουμε κομβικές τάσεις με τελεστές δεκτικότητας φυσικά.



Έχουμε ένα κύκλωμα 2^{ης} τάξης και θέλουμε τη φυσική απόκριση. Με κομβικές τάσεις και κόμβο αναφοράς τον κάτω, παίρνουμε

$$\frac{v}{3} + v \times 0,2D + \frac{v}{5D+6} = 0 \Rightarrow [5D+6+0,2D \times 3 \times (5D+6)+3]v = 0 \Rightarrow (3D^2 + 8,6D+9)v = 0$$

Οπότε τελικά η διαφ. εξίσωση είναι $\ddot{v} + 2,867\dot{v} + 2,333v = 0$

Η ίδια διαφορική εξίσωση ισχύει και για όλα τα άλλα μεγέθη τού κυκλώματος, συμπεριλαμβανομένου του $i_L(t)$. Οι ρίζες είναι

$$s_1 = -1,433 + j0,972 \quad s_2 = -1,433 - j0,972$$

κι έχουμε υποκρίσιμη απόκριση. Άρα, τελικά

$$i_L(t) = e^{-1,433t} [A_1 \cos(0,972t) + A_2 \sin(0,972t)]$$

Για τον προσδιορισμό των A_1 και A_2 έχουμε ότι για $t = 0$:

$$A_1 + A_2 \times 0 = i_L(0^+) = i_L(0^-) = -2,4 \Rightarrow A_1 = -2,4$$

$$-1,433A_1 - 0,972A_2 = \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^-)}{L} = \frac{v_C(0^-) - 6i_L(0^-)}{L} = \frac{v_C(0^+) - 6i_L(0^+)}{L} = \frac{7,2 - 6 \times 2,4}{5} \Rightarrow$$

$$-1,433A_1 - 0,972A_2 = 4,32 \text{ A/s}$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις καταλήγουμε ότι $A_1 = -2,4$ $A_2 = -0,91$

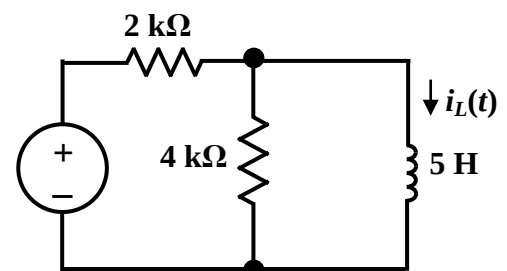
Οπότε τελικά

$$i_L(t) = -e^{-1,433t} [2,4 \cos(0,972t) + 0,91 \sin(0,972t)]$$

ΘΕΜΑ 7. [10%]

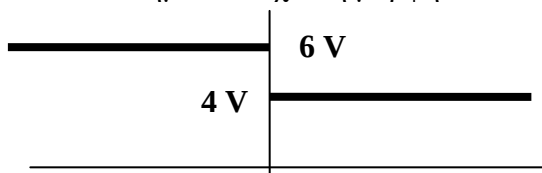
Για το κύκλωμα στα δεξιά προσδιορίστε τις τιμές τού ρεύματος $i_L(t)$ για κάθε μόνιμη κατάσταση στην οποία έχει περιέλθει.

$$6u(-t) + 4u(t) \text{ V}$$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η πηγή τάσης δίνει ένα σήμα που έχει τη μορφή



Επειδή μας ενδιαφέρει μόνο η μόνιμη κατάσταση και η πηγή είναι σταθερή, το πηνίο θα ισοδυναμεί με βραχυκύκλωμα. Άρα, η αντίσταση των 4 kΩ θα είναι βραχυκυκλωμένη και δεν θα επηρεάζει το κύκλωμα που θα αποτελείται από την πηγή τάσης και την αντίσταση των 2 kΩ.

Άρα, το ρεύμα θα είναι $6/2000 = 3 \text{ mA}$ για τη μόνιμη κατάσταση σε $t < 0$ και $4/2000 = 2 \text{ mA}$ για τη μόνιμη κατάσταση σε $t > 0$.