

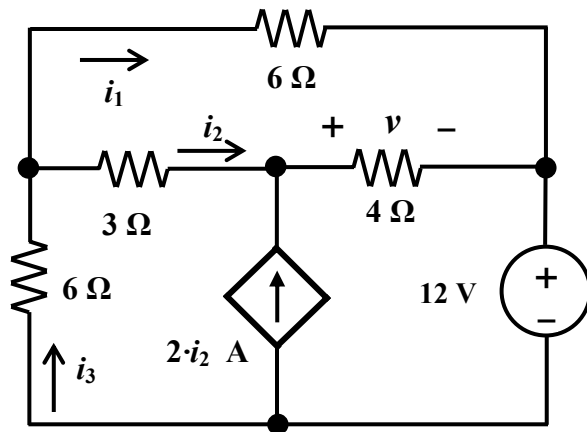
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ ΜΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΧΡΩΜΑ

ΘΕΜΑ 1. [10%]

Για το κύκλωμα δεξιά, ένα λογισμικό ανάλυσης κυκλωμάτων έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$i_1 = -0,833 \text{ A} \quad i_2 = -0,333 \text{ A} \quad i_3 = -1,167 \text{ A} \\ \text{και} \quad v = -2,0 \text{ V}.$$

Είναι οι απαντήσεις σωστές;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Δοκιμάζουμε νόμο ρευμάτων Kirchhoff στον αριστερό κόμβο: $i_3 = i_1 + i_2 \Rightarrow -1,167 = -0,833 - 0,333$ ✓😊

[Σημ.: η διαφορά στο τελευταίο δεκαδικό προέρχεται από τους υπολογισμούς και είναι αναμενόμενη]

Δοκιμάζουμε νόμο τάσεων Kirchhoff για να εμπλέξουμε ρεύματα και τάσεις:

$$\text{Στον πάνω βρόχο: } 6 i_1 - v - 3 i_2 = 0 \Rightarrow 6 \times (-0,833) - (-2,0) - 3 \times (-0,333) = 0 \Rightarrow -1,999 = 0 \quad \times \text{☠}$$

Άρα, δεν μπορούμε να εμπιστευτούμε τις απαντήσεις που έδωσε ο υπολογιστής.

Έχουμε τρεις εναλλακτικές προσεγγίσεις:

- (1) Επαλήθευση νόμων Kirchhoff (μπορεί να απαιτήσει πολλές πράξεις σε μεγάλο κύκλωμα)
- (2) Θεώρημα Tellegen (απαιτεί εύρεση και των υπόλοιπων μεγεθών του κυκλώματος και τους σχετικούς πολλαπλασιασμούς)
- (3) Επίλυση ξανά από την αρχή (σίγουρα πολλές πράξεις)

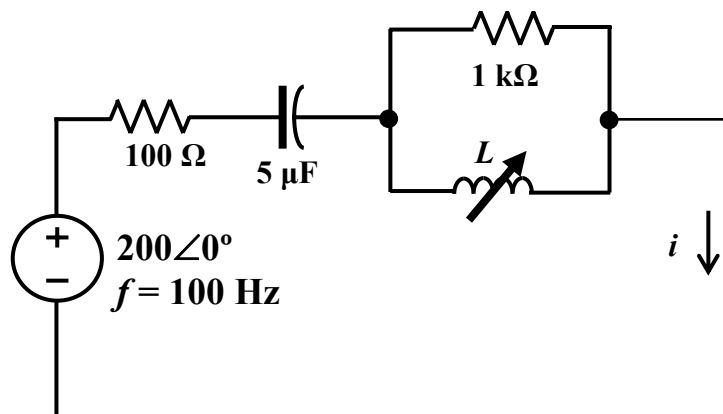
Άρα, λόγω του μεγέθους του κυκλώματος, ο πρώτος τρόπος είναι μάλλον ο πιο ενδεδειγμένος.

ΘΕΜΑ 2. [20%]

Το κύκλωμα στα δεξιά βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση και η πηγή διέγερσης είναι ημιτονοειδής με παραμέτρους όπως σημειώνονται στο σχήμα. Η επαγωγή L μεταβάλλεται έως ότου:

(1) το ρεύμα i είναι σε φάση με την τάση της πηγής. Βρείτε για ποια ή ποιες τιμές του L συμβαίνει αυτό.

(2) το ρεύμα i έχει καθυστέρηση 0,1 ms σε σχέση με την τάση της πηγής. Βρείτε για ποια ή ποιες τιμές του L συμβαίνει αυτό.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ (έχει λυθεί ουσιαστικά η ίδια άσκηση στα Φροντιστήρια):

Λόγω ΜΗΚ η εμπέδηση του πυκνωτή είναι $\frac{-j}{2\pi \times 100 \times 5 \times 10^{-6}} \Omega$, που μας δίνει όχι το **κομψό αλλά δύσχηστο** $\frac{-j1000}{\pi} \Omega$ αλλά το **χρήσιμο** $-j318,47 \Omega$.

Η εμπέδηση του παράλληλου συνδυασμού είναι $\frac{1000 \times j2\pi 100L}{1000 + j2\pi 100L} = \frac{j1000\pi L}{5 + j\pi L} \Omega$, που στα πλαίσια της ανάγκης

για τις απλούστερες δυνατές παραστάσεις γίνεται $\frac{j1000\pi L}{(5 + j\pi L)} \frac{(5 - j\pi L)}{(5 - j\pi L)} = \frac{9.870L^2}{25 + 9,87L^2} + j \frac{15.708L}{25 + 9,87L^2} \Omega$

[μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η σχέση $\pi^2 \approx 10$]

Η συνολική εμπέδηση είναι $100 + \frac{9.870L^2}{25 + 9,87L^2} + j \left(\frac{15.708L}{25 + 9,87L^2} - 318,47 \right) \Omega$

Επειδή $Z = V/I$, δηλαδή φάση(Z) = φάση(V) - φάση(I), και θέλουμε το ρεύμα σε φάση με την τάση, πρέπει η εμπέδηση να μην εισάγει διαφορά φάσης, δηλαδή πρέπει το φανταστικό της μέρος να είναι 0. Άρα:

$$\frac{15.708L}{25 + 9,87L^2} = 318,47 \Rightarrow 3143,17L^2 - 15707,96L + 7961,75 = 0$$

ή $L^2 - 5L + 2,533 = 0$ που δίνει $L^{(1)} = 4,43 \text{ H}$ ή $L^{(2)} = 0,57 \text{ H}$ που είναι και οι δυο αποδεκτές.

Για το δεύτερο ερώτημα, η χρονική καθυστέρηση πρέπει να μεταφραστεί σε γωνία φάσης. Τα 2π αντιστοιχούν στην πλήρη περίοδο, οπότε

$$\frac{\varphi}{360} = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \varphi = \frac{360 \Delta t}{T} \text{ και με τα δεδομένα του προβλήματος } \varphi = \frac{360 \cdot 0,1 \times 10^{-3}}{1/100} = 3,6^\circ (= 0,062 \text{ rad})$$

Επειδή πάλι φάση(Z) = φάση(V) - φάση(I) και θέλουμε το ρεύμα να καθυστερεί $3,6^\circ$ σε σχέση με την τάση, πρέπει

$$\tan^{-1} \left(\frac{\frac{15.708L}{25 + 9,87L^2} - 318,47}{100 + \frac{9.870L^2}{25 + 9,87L^2}} \right) = 3,6^\circ \Rightarrow \frac{15.708L}{25 + 9,87L^2} - 318,47 = (\tan 3,6) \left(100 + \frac{9.870L^2}{25 + 9,87L^2} \right)$$

οπότε

$$15.708L - 7961,75 - 3143,17L^2 = 157,29 + 684L^2 \Rightarrow$$

$$L^2 - 4,104L + 2,121 = 0$$

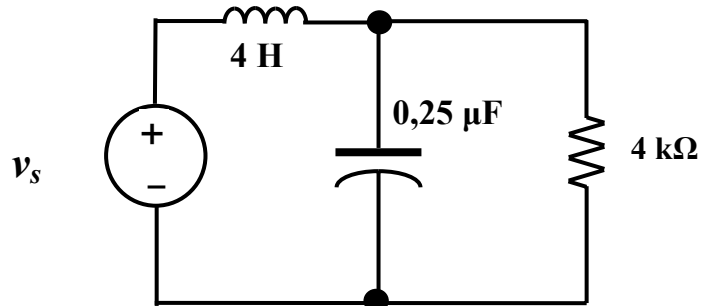
δίνει $L^{(1)} = 3,5 \text{ H}$ ή $L^{(2)} = 0,607 \text{ H}$ που είναι και οι δυο αποδεκτές.

ΘΕΜΑ 3. [20%]

Για το κύκλωμα στα δεξιά:

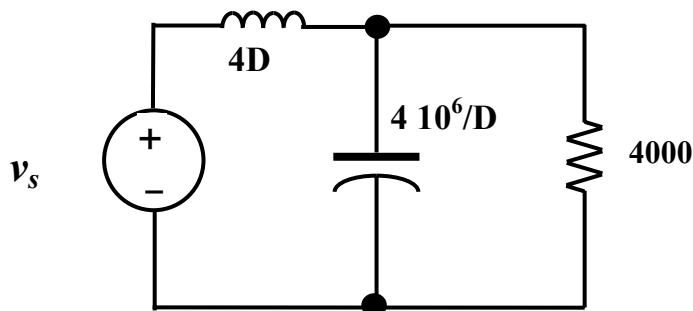
- (1) προσδιορίστε τη διαφορική εξίσωση που διέπει τη λειτουργία του και
- (2) προσδιορίστε το είδος της απόκρισης υπολογίζοντας τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης
- (3) δώστε τη μορφή της λύσης (χωρίς να υπολογίσετε τις σταθερές)

όταν $v_s(t) = 12 \cos(10\pi t)$ V.

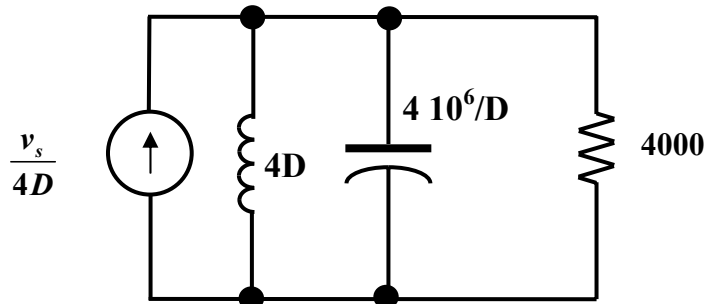


ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Ξαναγράφουμε το κύκλωμα χρησιμοποιώντας τελεστές εμπέδησης



και μετατρέποντας τον συνδυασμό πηγής τάσης και επαγωγού σε παράλληλη σύνδεση



φτάνουμε σε παράλληλο RLC του οποίου τη λύση γνωρίζουμε ή μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε π.χ. με κομβική τάση:

$$\frac{1}{4D} + 0,25 \times 10^{-6} D + \frac{1}{4000} = \frac{v_s}{4D} \Rightarrow 1 + 10^{-6} D^2 + \frac{D}{1000} = v_s$$

Η διαφορική εξίσωση είναι τελικά

$$(D^2 + 1.000D + 1.000.000)v_c = 12.000.000 \cos(10\pi t)$$

που έχει χαρακτηριστική εξίσωση $s^2 + 1.000s + 1.000.000 = 0$ με ρίζες $(-500 \pm j866)$.

Άρα η λύση είναι υποκρίσιμη τής μορφής

$$A_1 e^{(-500+j866)t} + A_2 e^{(-500-j866)t} + [\text{μερική λύση με συχνότητα } 5 \text{ Hz}]$$

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Θα μπορούσαμε να είχαμε εφαρμόσει τη μέθοδο κομβικών τάσεων απευθείας (πάντα χρησιμοποιώντας τελεστές).
2. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να «παλέψουμε» με νόμους Kirchhoff για να επιλύσουμε το αρχικό κύκλωμα.
3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ:

$$\left(D^2 + \frac{1}{RC}D + \frac{1}{LC}\right)i_L = \frac{1}{L}Dv_s + \frac{1}{RCL}v_s \quad \left(D^2 + \frac{1}{RC}D + \frac{1}{LC}\right)v_c = \frac{1}{LC}v_s$$

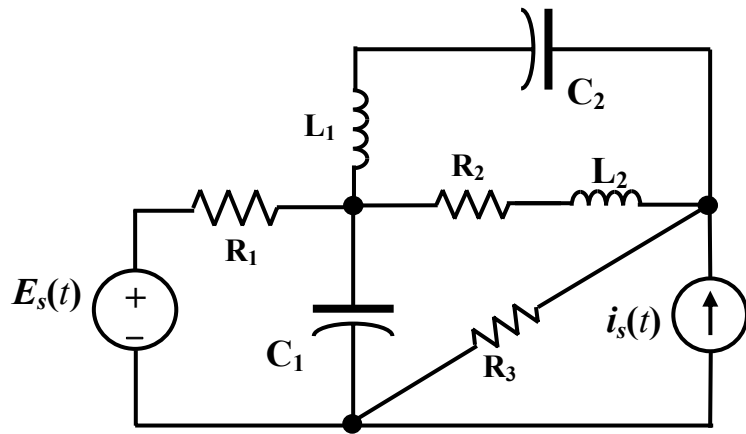
ΘΕΜΑ 4. [15%]

Για το κύκλωμα στα δεξιά (στο οποίο δεν υπάρχει αρχικά αποθηκευμένη ενέργεια) καταστρώστε σε μορφή γραμμικού συστήματος:

(1) τις εξισώσεις κομβικών τάσεων και

(2) τις εξισώσεις βροχικών εντάσεων.

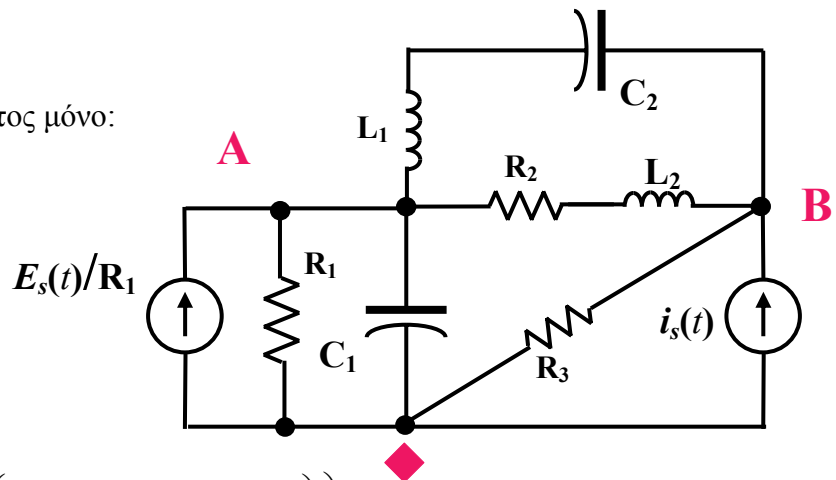
Απλά καταστρώστε τις εξισώσεις σε μορφή γραμμικού συστήματος και μη δοκιμάσετε να τις λύσετε.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

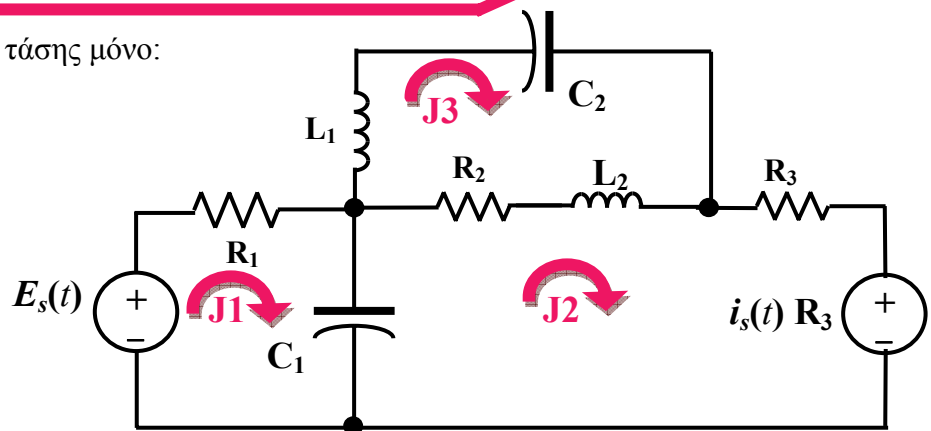
ΚΟΜΒΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

Μετατροπή σε κύκλωμα με πηγές ρεύματος μόνο:



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + C_1 D + \frac{1}{L_1 D + \frac{1}{C_2 D}} + \frac{1}{R_2 + L_2 D} & - \left(\frac{1}{L_1 D + \frac{1}{C_2 D}} + \frac{1}{R_2 + L_2 D} \right) \\ - \left(\frac{1}{L_1 D + \frac{1}{C_2 D}} + \frac{1}{R_2 + L_2 D} \right) & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{L_1 D + \frac{1}{C_2 D}} + \frac{1}{R_2 + L_2 D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s / R_1 \\ i_s \end{pmatrix}$$

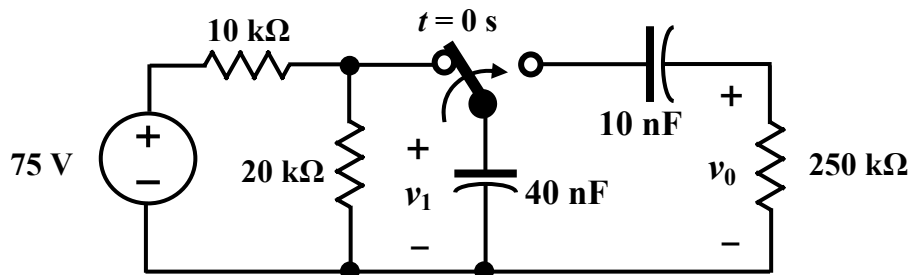
Μετατροπή σε κύκλωμα με πηγές τάσης μόνο:



$$\begin{pmatrix} R_1 + \frac{1}{C_1 D} & -\frac{1}{C_1 D} & 0 \\ -\frac{1}{C_1 D} & R_2 + L_2 D + R_3 + \frac{1}{C_1 D} & -(R_2 + L_2 D) \\ 0 & -(R_2 + L_2 D) & R_2 + L_2 D + L_1 D + \frac{1}{C_2 D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s \\ -i_s R_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ΘΕΜΑ 5. [20%]

Στο πιο κάτω κύκλωμα, που λειτουργεί για πολλή ώρα, ο διακόπτης αλλάζει θέση στον χρόνο $t = 0$. Προσδιορίστε τις τάσεις $v_0(t)$ και $v_1(t)$ για κάθε t .



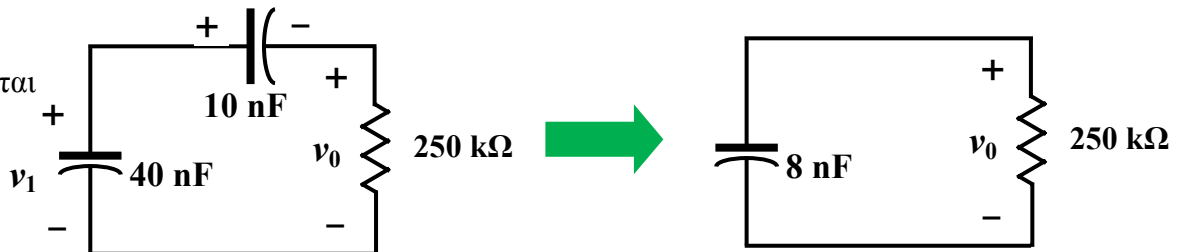
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για $t < 0$:

Εξ αιτίας της σταθερής πηγής, στο **αριστερό μέρος** ο πυκνωτής έχει φορτιστεί στην τάση της αντίστασης 20 kΩ που από τον διαιρέτη τάσης είναι $75 \cdot 20000 / 30000 = 50$ V.

Για $t \geq 0^+$:

Το κύκλωμα γίνεται



Το κύκλωμα αυτό δεν έχει αναλυθεί στη θεωρία, άρα πρέπει να το χειριστούμε προσεκτικά. Αν «συνδυάσουμε» τους δυο πυκνωτές, τότε έχουμε ένα απλό κύκλωμα RC με $C = 8$ nF όπως φαίνεται δεξιά πιο πάνω που έχει σταθερά χρόνου $RC = 8 \times 10^{-9} \times 250000 = 2$ ms. Στο νέο αυτό κύκλωμα «διατηρείται» από τα ζητούμενα αναλλοίωτη η τάση $v_0(t)$. Έτσι

$$v_0(t) = v_0(0)e^{-t/(RC)} = v_0(0)e^{-500t}$$

Από τον βρόχο στο κύκλωμα πάνω αριστερά βρίσκουμε ότι επειδή οι πυκνωτές θα διατηρήσουν τις τάσεις τους, $-v_1(0) + 0 + v_0(0) = 0$ και η τάση $v_0(0)$ θα είναι ίση με $v_1(0) = v_1(0^-) = 50$ V. Άρα

$$v_0(t) = 50e^{-500t}, \quad t \geq 0$$

Για να παραμείνουμε σε ασφαλές έδαφος, αυτό που σίγουρα μπορούμε να υπολογίσουμε είναι το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση και είναι φυσικά το ρεύμα του βρόχου:

$$i_0(t) = \frac{50e^{-500t}}{250000} = 0,2e^{-500t} \text{ mA}, \quad t \geq 0$$

Τώρα πια μπορούμε να γράψουμε:

$$v_1(t) = v_1(0) + \frac{1}{40 \times 10^{-9}} \int_0^t (-0,2 \times 10^{-3}) e^{-500z} dz$$

(επειδή το ρεύμα διαρρέει τον πυκνωτή αντίθετα με τη σημειωμένη φορά της πολικότητας της τάσης)

Έτσι:

$$v_1(t) = 50 - 5000 \int_0^t e^{-500z} dz = 50 + 10e^{-500z} \Big|_{z=0}^{z=t} = 50 + 10(e^{-500t} - 1)$$

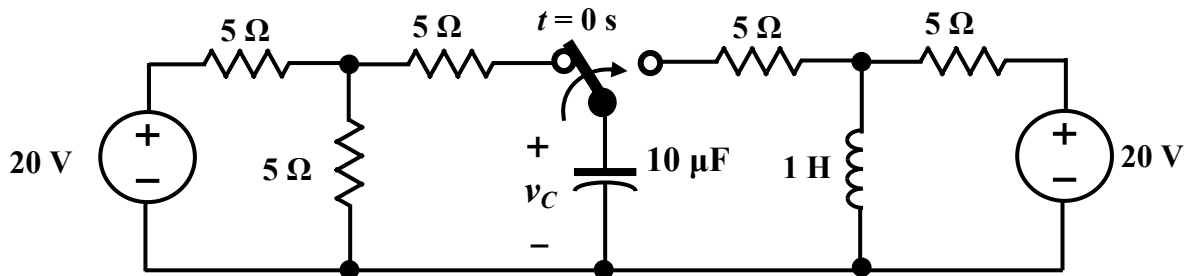
$$\Rightarrow v_1(t) = 10e^{-500t} + 40 \text{ V}, \quad t \geq 0$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Εδώ εμφανίζεται ένα (ας πούμε) παράδοξο: παρόλο που έχουμε απόκριση μηδενικής διέγερσης και αναμένουμε «σβήσιμο» όλων των μεγεθών, υπάρχει ένας σταθερός όρος στην απόκριση!! Αυτή η συμπεριφορά προέρχεται από την ύπαρξη του δεύτερου πυκνωτή: ο ένας πυκνωτής εμποδίζει τον άλλον από το να εκφορτιστεί πλήρως στην αντίσταση. Αν υπολογίσουμε την τάση του άλλου πυκνωτή, έστω v_2 (με το + αριστερά): $v_2(t) = -40e^{-500t} + 40$ V, $t \geq 0$, που σημαίνει ότι παραμένει μόνιμη (αλληλοαναιρούμενη όμως σε ότι αφορά την αντίσταση) φόρτιση στους δυο πυκνωτές αλλά βέβαια ισχύει και ο NTK αφού ο βρόχος συνολικά μάς δίνει $-10e^{-500t} - 40 - 40e^{-500t} + 40 + 50e^{-500t} = 0$.

ΘΕΜΑ 6. [10%]

Στο πιο κάτω κύκλωμα, που λειτουργεί για πολλή ώρα, ο διακόπτης αλλάζει θέση στον χρόνο $t = 0$. Προσδιορίστε όλες τις τάσεις και όλα τα ρεύματα στο δεξιό μέρος του κυκλώματος (από τον πυκνωτή και πέρα) για τον χρόνο $t = 0^+$ μόνο.



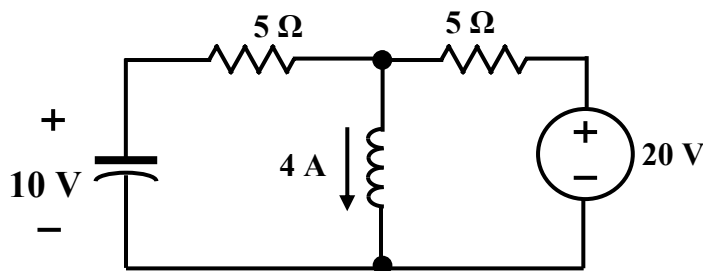
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για $t < 0$:

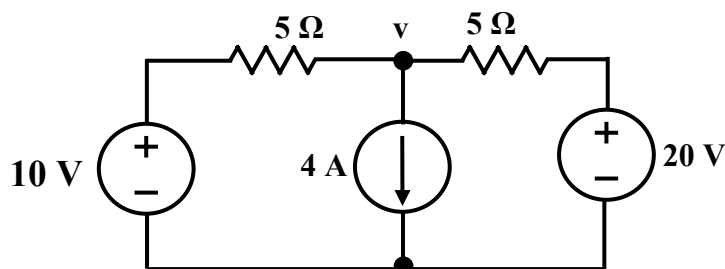
Εξ αιτίας των σταθερών πηγών, στο **αριστερό μέρος** ο πυκνωτής έχει φορτιστεί στην τάση της αντίστασης $5\ \Omega$ που από τον διαιρέτη τάσης είναι $20 \cdot 5 / 10 = 10\text{ V}$.

Στο **δεξιό μέρος** (που πολλοί αγνόησαν εντελώς) ο επαγωγός διαρρέεται από ρεύμα $20/5 = 4\text{ A}$.

Για $t = 0^+$:



όπου οι τιμές του πυκνωτή και του επαγωγού δεν έχουν καμία σημασία και τα στοιχεία θα μπορούσαν (**μόνο για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = 0^+$**) να αντικατασταθούν από πηγή τάσης και πηγή ρεύματος, αντίστοιχα.



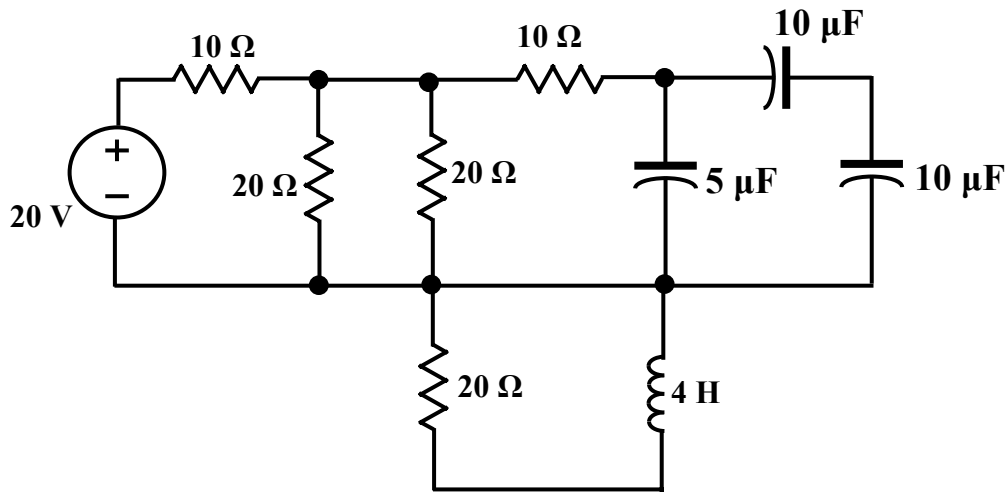
Με κομβική τάση για τον κεντρικό κόμβο:

$$\frac{v-10}{5} + 4 + \frac{v-20}{5} = 0 \Rightarrow v = 5\text{ V}$$

Οπότε η τάση του επαγωγού είναι 5 V , οι τάσεις στις αντιστάσεις είναι 5 V (με το + αριστερά) στην αριστερή και 15 V (με το + δεξιά) στη δεξιά και αντίστοιχα ρεύματα 1 A και 3 A .

☛ ΘΕΜΑ 7. [5%]

Βρείτε τις σταθερές χρόνου του πιο κάτω κυκλώματος:



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Πρόκειται για δυο ανεξάρτητα κυκλώματα, ένα RL στο κάτω μέρος με σταθερά $L/R = 0,2 \text{ s}$ και ένα RC στο πάνω μέρος όπου τα ισοδύναμα των στοιχείων υπολογίζονται εύκολα, ακόμα και «με το μάτι»:

- C: $10\mu\text{F}$ και $10\mu\text{F}$ σε σειρά, άρα $5\mu\text{F}$ που είναι παράλληλα με $5\mu\text{F}$, άρα σύνολο **$10\mu\text{F}$** .
- R: 20Ω και 20Ω παράλληλα, άρα 10Ω , που είναι παράλληλα με 10Ω αν κάνουμε μετασχηματισμό πηγής. Οπότε 5Ω και μετασχηματίζοντας την πηγή ρεύματος πίσω σε πηγή τάσης έχουμε 5Ω και 10Ω σε σειρά, δηλ. **15Ω** .

Άρα, $RC = 15 \times 10 \times 10^{-6} = 0,15 \text{ ms}$