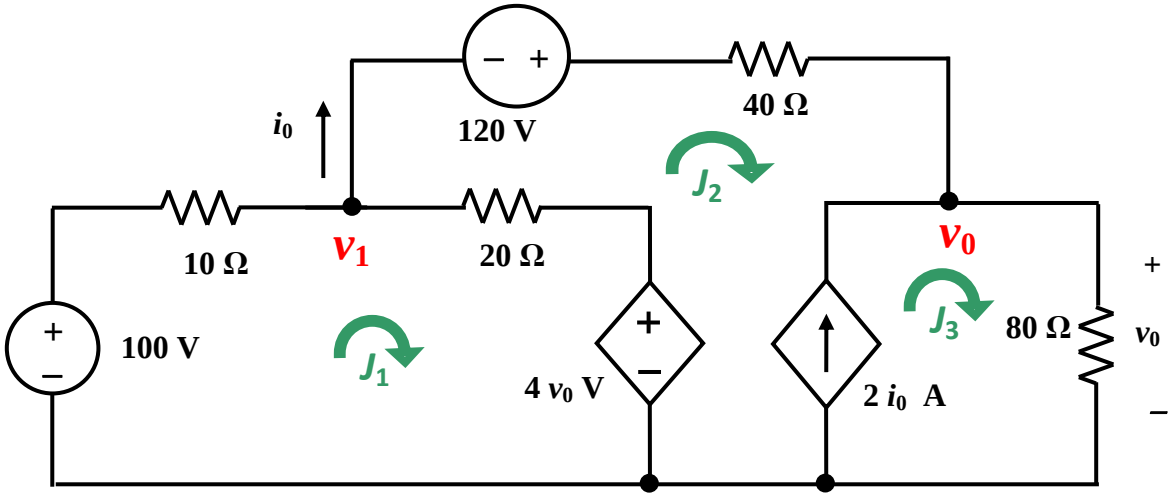
**ΘΕΜΑ 1.** **[25%]**

Στο πιο κάτω κύκλωμα προσδιορίστε το ρεύμα $i_0$ και την τάση $v_0$.




**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

ΜΕ ΚΟΜΒΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ($v_1$,$v_0$): Η τάση στον δεξιό κόμβο (με τον κάτω σαν κόμβο αναφοράς) ταυτίζεται με τη ζητούμενη $v_0$.

ΚΟΜΒΟΣ 1: $$\frac{v_1-100}{10}+i_0+\frac{v_1-4v_0}{20}=0$$

ΚΟΜΒΟΣ 2: $$-2i_0-i_0+\frac{v_0}{80}=0$$

Το ρεύμα $i_0$ μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση $i_0=\dfrac{v_1-\left(v_0+(-120)\right)}{40}$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στις αρχικές δυο, παίρνουμε

$$7v_1-9v_0=280$$
$$6v_1-7v_0=-720$$

που δίνει λύση $v_1=-1688$, $v_0=-1344$ V.

Προκύπτει από τη σχέση τού Κόμβου 2 ότι $i_0=\dfrac{v_0}{240}=\dfrac{-1344}{240}=-5,6$ A

---

- Εναλλακτικά, με ΒΡΟΧΙΚΕΣ ΕΝΤΑΣΕΙΣ, η λύση προκύπτει από τις σχέσεις:

$$10J_1+20(J_1-J_2)+4v_0-100=0$$
$$-120+40J_2+v_0-4v_0+20(J_2-J_1)=0$$
$$80J_3-v_0=0$$
$$J_3-J_2=2i_0$$
$$J_2=i_0$$

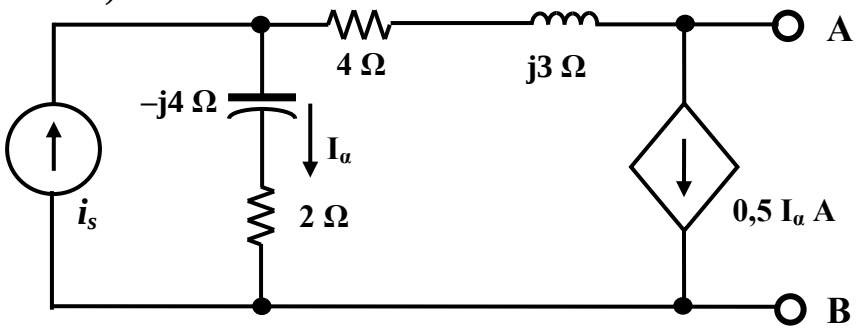
(Πολλοί ξέχασαν έναν ή παραπάνω όρους στις εξισώσεις αυτές)

- Εναλλακτικά, **χωρίς λύση συστήματος**: Από τον Κόμβο 1 έχουμε ότι $\dfrac{v_1-100}{10}+i_0+\dfrac{v_1-4v_0}{20}=0$ ενώ από τον τρίτο βρόχο (στα δεξιά) προκύπτει ότι $v_0=240\,i_0$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη παίρνουμε $\dfrac{v_1-100}{10}+i_0+\dfrac{v_1-960i_0}{20}=0$.

  Χρησιμοποιώντας τη σχέση $i_0=\dfrac{v_1-\left(v_0+(-120)\right)}{40}$ ανακαλύπτουμε ότι $v_1=280\,i_0-120$ οπότε η αρχική σχέση γίνεται τελικά $28\,i_0-22+i_0+14i_0-6-48i_0=0$ που δίνει το $i_0$.

**ΘΕΜΑ 2.** **[25%]**

Στο πιο κάτω κύκλωμα προσδιορίστε το ισοδύναμο Thevenin από τα σημεία A και B όταν $i_s(t) = 15\cos(\omega t + 30°)$ A




**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Για την τάση Thevenin μια από τις δυο γνωστές μεθόδους θα δώσει οπωσδήποτε τη λύση. Επειδή όμως το κύκλωμα είναι αρκετά μικρό μια απλή εφαρμογή των νόμων τού Kirchhoff θα είναι ίσως λιγότερο περίπλοκη.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στον πάνω αριστερό κόμβο ισχύει ότι

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_a + 0,5\mathbf{I}_a \Rightarrow \mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{I}_s}{1,5} = \frac{15\angle 30°}{1,5} = 10\angle 30° \text{ A}$$

Στον δεξιό βρόχο ισχύει από τον νόμο των τάσεων ότι

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{AB} = (2 - j4)\mathbf{I}_a - 0,5\mathbf{I}_a(4 + j3)$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}_{Th} = (2 - j4)10\angle 30° - 5\angle 30°(4 + j3)$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}_{Th} = 4,47\angle -63,44° \times 10\angle 30° - 5\angle 30° \times 5\angle 36,87°$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}_{Th} = (44,72\angle -33,44°) - (25\angle 66,87°)$$

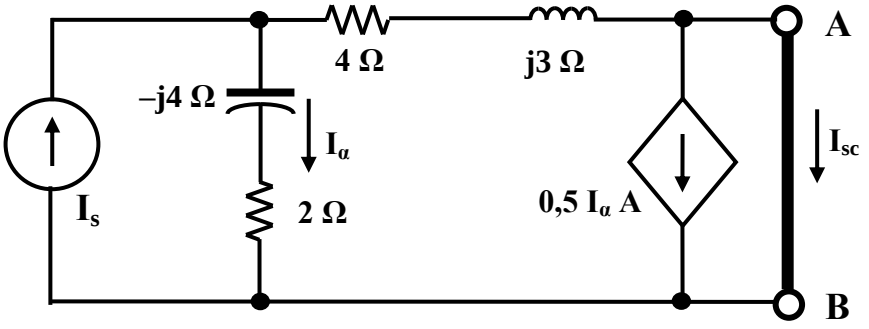
$$\Rightarrow \mathbf{V}_{Th} = (37,32 - j24,64) - (9,82 + j22,99)$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}_{Th} = 27,5 - j47,63 = 55\angle -60° \text{ V}$$

Για την εμπέδηση Thevenin έχουμε τις εξής επιλογές:

(1) Βραχυκυκλώνουμε τα A και B και υπολογίζουμε το σχετικό ρεύμα με κομβικές τάσεις
(2) Βραχυκυκλώνουμε τα A και B και υπολογίζουμε το σχετικό ρεύμα με βροχικές εντάσεις
(3) Εξουδετερώνουμε τις πηγές, που στη συγκεκριμένη περίπτωση λόγω τής παρουσίας τής εξαρτημένης πηγής πρέπει επί πλέον να συνδέσουμε μια γνωστή πηγή στα A και B για να αναιρέσουμε την εξάρτηση.

***Αποφασίστε εσείς στο τέλος ποια είναι η καλύτερη επιλογή.***




**ΚΟΜΒΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ**: Με μέθοδο κομβικών τάσεων, στον πάνω αριστερό κόμβο έχουμε

$$-15\angle 30° + \frac{\mathbf{V}_1}{2 - j4} + \frac{\mathbf{V}_1}{4 + j3} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{V}_1=\frac{15\angle 30^\circ}{\frac{1}{2-j4}+\frac{1}{4+j3}}=\frac{15\angle 30^\circ}{\frac{6-j}{(4,47\angle -63,44^\circ)\times(5\angle 36,87^\circ)}}=\frac{(15\angle 30^\circ)(22,35\angle -26,57^\circ)}{6,08\angle -9,46^\circ}=55,14\angle 12,89^\circ$$

Θεωρώντας τον πάνω δεξιά κόμβο, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{4+j3}+0,5\mathbf{I}_a+\mathbf{I}_{sc}=0\Rightarrow\frac{-\mathbf{V}_1}{4+j3}+0,5\frac{\mathbf{V}_1}{2-j4}+\mathbf{I}_{sc}=0\Rightarrow\mathbf{I}_{sc}=\mathbf{V}_1\left(\frac{1}{4+j3}-\frac{0,5}{2-j4}\right)$$

Οπότε

$$\mathbf{I}_{sc}=55,14\angle 12,89^\circ\left(\frac{-j5,5}{(4+j3)(2-j4)}\right)=\frac{(55,14\angle 12,89^\circ)(5,5\angle -90^\circ)}{(22,35\angle -26,57^\circ)}=13,57\angle -50,54^\circ$$

και τελικά

$$\mathbf{Z}_{Th}=\frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_{sc}}=\frac{55\angle -60^\circ}{13,57\angle -50,54^\circ}=4,05\angle -9,46^\circ=4-j0,66$$

**ΒΡΟΧΙΚΕΣ ΕΝΤΑΣΕΙΣ:** Με μέθοδο βροχικών εντάσεων (που αριθμούνται από αριστερά προς τα δεξιά και είναι βέβαια ομόρροπες) έχουμε τις εξής σχέσεις

$$\mathbf{J}_1=\mathbf{I}_s$$
$$(2-j4)(\mathbf{J}_2-\mathbf{J}_1)+(4+j3)\mathbf{J}_2+0=0$$
$$\mathbf{J}_3=\mathbf{I}_{sc}$$
$$\mathbf{J}_2-\mathbf{J}_3=0,5\mathbf{I}_a$$
$$\mathbf{I}_a=\mathbf{J}_1-\mathbf{J}_2$$

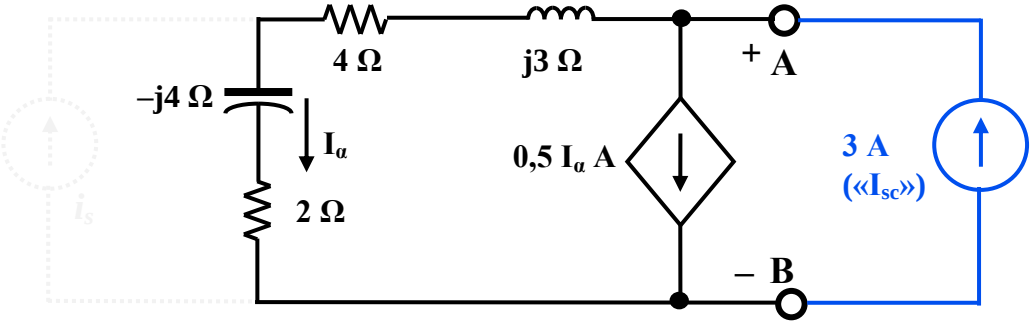
$$\Rightarrow\quad \mathbf{J}_2=\frac{(2-j4)\mathbf{I}_s}{(6-j)}$$
$$\mathbf{I}_{sc}=1,5\mathbf{J}_2-0,5\mathbf{I}_s$$

$$\Rightarrow\mathbf{I}_{sc}=\left(1,5\frac{4,47\angle -63,41^\circ}{6,08\angle -9,46^\circ}-0,5\right)\mathbf{I}_s=\left(\frac{6,71\angle -63,41^\circ}{6,08\angle -9,46^\circ}-0,5\right)(15\angle 30^\circ)$$

ώστε τελικά $\mathbf{I}_{sc}=13,57\angle -50,54^\circ$ και βέβαια $\mathbf{Z}_{Th}=\frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_{sc}}=\frac{55\angle -60^\circ}{13,57\angle -50,54^\circ}=4,05\angle -9,46^\circ=4-j0,66$

## ΕΞΟΥΔΕΤΕΡΩΣΗ ΠΗΓΩΝ

Εξουδετερώνουμε ανοιχτοκυκλώνοντας την πηγή ρεύματος και συνδέουμε στα Α και Β μια γνωστή πηγή. Μάς συμφέρει να συνδέσουμε μια πηγή ρεύματος με ρεύμα που είναι πολλαπλάσιο των υπόλοιπων ρευμάτων που σχετίζονται με τον κόμβο. Μια τιμή 3 Α ή 4,5 Α ή οποιοδήποτε πολλαπλάσιο τού 1,5 είναι κατάλληλη.




Θα είναι

$$\mathbf{I}_a+0,5\mathbf{I}_a=3\Rightarrow\mathbf{I}_a=2\text{ A}$$

οπότε

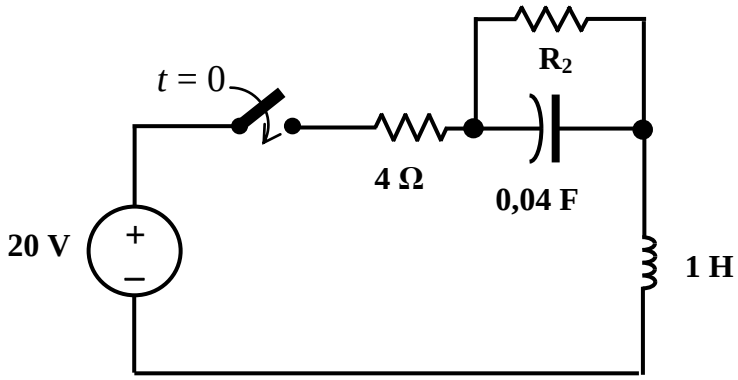
$$\mathbf{V}_{AB}=2(2-j4+4+3j)=2(6-j)$$

και τελικά

$$\mathbf{Z}_{Th}=\frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{I}_{sc}}=\frac{2(6-j)}{3}=4-j0,6\dot{6}$$

**ΘΕΜΑ 3.** **[30%]**

Αναπτύξτε ένα μαθηματικό μοντέλο για το πιο κάτω κύκλωμα και προσδιορίστε τουλάχιστον μια τιμή τού $\mathbf{R_2}$ για την οποία η απόκριση είναι κρίσιμη.




## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το κύκλωμα μοιάζει με RLC εκτός από το ότι ο πυκνωτής έχει συνδεθεί με μια αντίσταση $R_2$ που δεν είναι ούτε σε σειρά ούτε παράλληλα με την άλλη αντίσταση.
Άρα, το κύκλωμα δεν είναι RLC αλλά είναι δεύτερης τάξης και πρέπει να προσδιορίσουμε το μοντέλο του. Ο πιο δόκιμος τρόπος γι' αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε τελεστές εμπέδησης ή δεκτικότητας.

Έτσι:

$$20 = \left( 4 + \frac{R_2 \dfrac{1}{0,04D}}{R_2 + \dfrac{1}{0,04D}} + 1D \right) i$$

**ΠΡΟΣΟΧΗ!!!**
Ο τρόπος γραφής $20\left(0,04R_2D+1\right)$ είναι κακή επιλογή γιατί δεν επιτρέπει στον τελεστή να εφαρμοστεί. Κάθε τελεστής ή έκφραση που περιέχει τελεστή ***πρέπει να έχει στόχο***!!
Ο τρόπος γραφής $\left(0,04R_2D+1\right)20$ είναι κάπως «παράξενος», όμως αποτρέπει σφάλματα.

οπότε

$$20 = \left( 4 + \frac{R_2}{0,04R_2D+1} + 1D \right) i \Rightarrow \left(0,04R_2D+1\right)20 = \left(0,16R_2D + 4 + R_2 + D + 0,04R_2D^2\right) i$$

ή

$$\left[0,04R_2D^2 + \left(0,16R_2+1\right)D + 4 + R_2\right] i = 20$$

Για κρίσιμη απόκριση πρέπει να υπάρχουν δυο ίδιες πραγματικές ρίζες, δηλαδή:

$$\left(0,16R_2+1\right)^2 = 4 \times 0,04R_2\left(4+R_2\right) = 0,16R_2\left(4+R_2\right)$$

$$\Rightarrow 0,0256\,R_2^2 + 1 + 0,32R_2 = 0,64R_2 + 0,16R_2^2$$

$$\Rightarrow 0,1344R_2^2 + 0,32R_2 - 1 = 0$$

Που οδηγεί στο

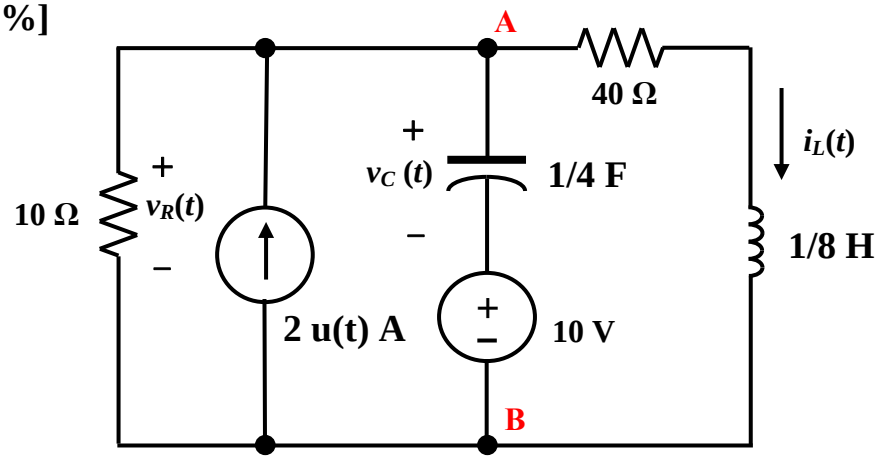
$$R_2 = \frac{-0,32 \pm \sqrt{0,1024 + 0,5376}}{0,2688} = \frac{-0,32 \pm 0,8}{0,2688} = 1,7857$$

όπου απορρίψαμε την αρνητική ρίζα.

Άρα τελικά η κατάλληλη τιμή τής $R_2$ είναι:

$R_2 = 1,7857\ \Omega$

**ΘΕΜΑ 4.** **[20%]**




Το πιο πάνω κύκλωμα ξεκίνησε τη λειτουργία του στον χρόνο $t = -\infty$. Ο όρος $u(t)$ συμβολίζει τη βηματική συνάρτηση. Προσδιορίστε τις τιμές των πιο κάτω μεγεθών:

$v_C(0^-) = -10$ V — Στο $t = 0^-$ το πηνίο είναι βραχυκύκλωμα (η πηγή τάσης σταθερή) και ο πυκνωτής ανοιχτοκυκλωμένος. Άρα στο κύκλωμα δεν κυκλοφορεί ρεύμα, όμως ο πυκνωτής έχει ήδη φορτιστεί. Λόγω της απουσίας ρεύματος, η τάση στα σημεία AB είναι 0. Για να συμβεί αυτό πρέπει (ΝΤΚ) ο πυκνωτής να έχει στα άκρα του –10 V.

$v_R(0^-) = 0$ V — Ο πυκνωτής και η πηγή τάσης, όπως πιο πάνω, κρατούν την τάση στο 0.

$i_L(0^-) = 0$ A — Εξηγήθηκε πιο πάνω.

$v_C(0^+) = -10$ V — Ο πυκνωτής διατηρεί στιγμιαία την τάση του.

$v_R(0^+) = 0$ V — Η τάση τής αντίστασης αυτής είναι το άθροισμα τής τάσης τού πυκνωτή και τής πηγής τάσης.

$i_L(0^+) = 0$ A — Το πηνίο διατηρεί στιγμιαία το ρεύμα του.

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = \left.\frac{i_C}{C}\right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{1/4} = 4i_C(0^+) = 8 \text{ V/s}$$

Επειδή η τάση στα άκρα της αντίστασης των 10 Ω διατηρείται στο 0, άρα και το ρεύμα της θα είναι μηδενικό, και επειδή το πηνίο διατηρεί το ρεύμα μηδενικό στον κλάδο του, η μόνη διέξοδος για το ρεύμα των 2 A τής πηγής είναι ο κλάδος τού πυκνωτή. Άρα, $i_C(0^+) = 2$ A.

$$\left.\frac{dv_R}{dt}\right|_{t=0^+} = \left.\frac{dv_C}{dt} + \frac{d10}{dt}\right|_{t=0^+} = \left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 8 \text{ V/s}$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \left.\frac{v_L}{L}\right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_L(0^+)}{1/8} = 0 \text{ V/s}$$

Επειδή η τάση στα AB είναι 0 και το μηδενικό ρεύμα τού πηνίου διατηρεί την τάση της αντίστασης των 40 Ω στο 0.

$v_C(\infty) = 6$ V — Στο $t = \infty$ το πηνίο είναι πάλι βραχυκύκλωμα (οι πηγές σταθερές) και ο πυκνωτής ανοιχτοκυκλωμένος. Τώρα όμως εξαιτίας τής πηγής ρεύματος στο κύκλωμα κυκλοφορεί ρεύμα και ο πυκνωτής «βλέπει» τον παράλληλο συνδυασμό των 10 Ω και 40 Ω. Έτσι, $v_C(\infty) = v_{AB} - 10 = 2 * (40 * 10) / (40 + 10) - 10 = 2 * 8 - 10 = 16 - 10 = 6$ V.

$v_R(\infty) = 16$ V — $v_R(\infty) = 10*(2 - i_L(\infty)) = 10*(2 - 0{,}4) = 16$ V

$i_L(\infty) = 0{,}4$ A — Στο $t = \infty$ το κύκλωμα που είναι «ζωντανό» αποτελείται από την πηγή ρεύματος και τις δυο αντιστάσεις. Έτσι, από τον διαιρέτη ρεύματος, $i_L(\infty) = 2*10/(40+10) = 2*1/5 = 0{,}4$ A.