

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

11

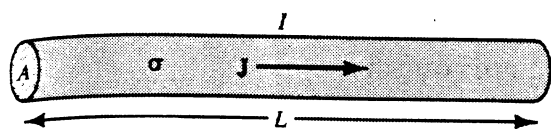
Η ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΕΔΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΕΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL

11-1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο σημείο αυτό τού βιβλίου αξίζει να σκεθούμε για λίγες στιγμές τους ποικίλους τρόπους με τους οποίους η θεωρία πεδίου που έχουμε μάθει σχετίζεται με την θεωρία κυκλωμάτων. Παρατηρούμε ότι, αν και η θεωρία πεδίου είναι εφαρμόσιμη σε όλες τις συνθήκες, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου η θεωρία κυκλωμάτων είναι πλήρως επαρκής και είναι πολύ απλούστερη στην χρήση. Ας το δείξουμε αυτό παρουσιάζοντας περιπτώσεις όπου η θεωρία κυκλωμάτων είναι αποτελεσματική και περιπτώσεις όπου δεν είναι, και ας εξετάσουμε το γιατί. Αυτό θα μας βοηθήσει να αποκτήσουμε καλύτερη συνολική άποψη τών πεδίων και τών κυκλωμάτων. Θα δούμε πώς οι εξισώσεις κυκλωμάτων είναι ειδικές περιπτώσεις τών εξισώσεων πεδίου, και, τέλος, θα εξετάσουμε πώς οι εξισώσεις τού Maxwell αποτελούν γενίκευση τών εξισώσεων κυκλωμάτων. Με αυτήν την ευρεία άποψη τού αλληλοσυσχετισμού κυκλωμάτων και πεδίων θα είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε μέσα στο βασίλειο τών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων τα οποία καλύπτονται απ' όλες τις απόψεις στα υπόλοιπα κεφάλαια.

Αρχίζοντας την εξέταση τών κυκλωμάτων-πεδίων ή πεδίων-κυκλωμάτων, σημειώνουμε ότι στην θεωρία κυκλωμάτων ασχολούμαστε με τα στοιχεία τών κυκλωμάτων, την τάση V στα άκρα τους και συνολικό ρεύμα I το οποίο τα διαρρέει. Στην θεωρία πεδίου ασχολούμαστε με την μεταβολή τών πεδιακών ποσοτήτων E , D , B και H ως συνάρτηση τής θέσης. Αυτές οι πεδιακές ποσότητες είναι διανύσματα ενώ οι ποσότητες τών κυκλωμάτων V και I είναι βαθμωτά. Σε περιπτώσεις χρονικής μεταβολής, οι ποσότητες τών πεδίων και τών κυκλωμάτων μπορεί να περιέχουν διαφορές φάσεως και να είναι φασικά διανύσματα.

Ας θεωρήσουμε μία αγώγιμη ράβδο μικρού μήκους L και εμβαδού επιφανείας εγκαρσίας τομής A (Σχ.11-1). Στη θεωρία κυκλωμάτων, η οποία ισχύει για χαμηλές συχνότητες, βολικό είναι να περιγράψουμε την ράβδο βάσει μιάς ποσότητας, τής αντιστάσεώς της R , η οποία δίδεται από τον νόμο τού Ohm



ΣΧΗΜΑ 11-1

Αγώγιμη ράβδος. Με ολοκλήρωση τού J επάνω στην επιφάνεια A έχουμε το I . Με ολοκλήρωση τού J/σ κατά μήκος τού L έχουμε το V .

$$R = \frac{V}{I} \quad (\Omega) \quad \text{Μία εξίσωση κυκλώματος} \quad (1)$$

όπου V είναι η τάση στα άκρα τής αντίστασης και I το ρεύμα που την διαρρέει.

Το μήκος τής ράβδου, το εμβαδόν τής επιφανείας της και το σχήμα της είναι δευτερευούσης σημασίας.

Απο την άποψη τής θεωρίας κυκλωμάτων ασχολούμαστε με την τιμή τού ηλεκτρικού πεδίου E μέσα στην ράβδο. Από τον νόμο τού Ohm για σημείο έχουμε

$$E = \frac{J}{\sigma} \quad (V \cdot m^{-1}) \quad \text{Μία εξίσωση πεδίου} \quad (2)$$

όπου J = πυκνότης ρεύματος αγωγιμότητος, $A \cdot m^{-2}$

σ = ειδική αγωγιμότης, $mho \cdot m^{-1}$

Ολοκληρώνοντας την (2) για το μήκος τής ράβδου, βρίσκουμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ τών άκρων

$$V = \int E \cdot dL = \int \frac{J}{\sigma} \cdot dL \quad (3)$$

Για ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος η (3) γίνεται

$$V = \frac{JL}{\sigma} = JA \frac{L}{\sigma A} \quad (V) \quad (4)$$

όπου A εμβαδόν επιφανείας εγκάρσιας τομής τής ράβδου, m^2

Αναδιατάσσοντας την (4) έχουμε

$$\frac{L}{\sigma A} = \frac{V}{JA} = \frac{V}{I} = R \quad (\Omega) \quad (5)$$

Αρα, ξεκινώντας από μία πεδιακή αντιμετώπιση, φθάνουμε στον νόμο τού Ohm για τα κυκλώματα, όπως στην (1).

Από ιστορική άποψη, πρώτα η σχέση αυτή καθώς και άλλες σχέσεις για κυκλώματα διατυπώθηκαν και επαληθεύθηκαν. Επειτα, ως γενίκευση, επεκτάθηκαν για να εφαρμοστούν στην γενικότερη περίπτωση τών πεδίων. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οι σχέσεις για τα κυκλώματα είναι απλώς ειδικές περιπτώσεις τών εξισώσεων πεδίου και μπορούν να εξαχθούν από αυτές. Αν και οι εξισώσεις πεδίου είναι περισσότερο γενικές, είναι συνήθως πολύ απλούστερη η χρήση τών εξισώσεων κυκλωμάτων, όπου αυτές είναι εφαρμόσιμες.

Η εξίσωση (1) είναι καθαρά εξίσωση κυκλώματος. Η (2), όμως, είναι καθαρή εξίσωση πεδίου. Πολλές εξισώσεις δεν αμιγώς τού ενός είδους ή τού άλλου αλλά ένα συνδυασμός, ή ανάμιξή τους. Τέτοιες μικτές σχέσεις είναι αναγκαίες, για παράδειγμα, για να υπάρξει

μία σύνδεση μεταξύ τής θεωρίας πεδίου και τής θεωρίας κυκλωμάτων. Δύο σημαντικές εξισώσεις που μας παρέχουν τέτοιους συνδετικούς κρίκους είναι

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (V) \quad (6)$$

και

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (A) \quad (7)$$

Η εξίσωση (6) συσχετίζει το V (ποσότητα κυκλώματος) μεταξύ δύο σημείων με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα τού $\mathbf{E}$ (ποσότητα πεδίου) μεταξύ των δύο αυτών σημείων. Παρομοίως, η (7) η οποία είναι ο νόμος τού Ampere, συσχετίζει το I (ποσότητα κυκλώματος) με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα τού $\mathbf{H}$ (ποσότητα πεδίου) επάνω σε κλειστή διαδρομή.

11-2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΕΔΙΟΥ

Ενώ οι εξισώσεις πεδίου εφαρμόζονται γενικά, οι εξισώσεις των κυκλωμάτων είναι συνήθως περισσότερο βολικές όποτε τα V και I έχουν απλή, καλά ορισμένη σημασία.

Επομένως, προσδιορίζοντας την χωρητικότητα πυκνωτή ακανόνιστου σχήματος με την βοήθεια ενός γραφικού χάρτη τού πεδίου (Βλ. Σχ.4-18) στην πραγματικότητα στρέφουμε την προσοχή μας προς το πεδίο και την τιμή του ως συνάρτηση τής θέσης στο εσωτερικό τού πυκνωτή. Εν τούτοις, μόλις έχουμε προσδιορίσει την χωρητικότητα, μπορούμε, στις χαμηλές συχνότητες, να θεωρούμε τον πυκνωτή απλά σαν ένα στοιχείο στοιχείο κυκλώματος δύο ακροδεκτών με χωρητικότητα C και διαφορά δυναμικού V . Το φυσικό μέγεθος, το σχήμα τού πυκνωτή και η μορφή πεδίου στο εσωτερικό του γίνονται τότε θέματα δευτερεύουσας σημασίας.

Ως ένα άλλο παράδειγμα ας θεωρήσουμε την ομοαξονική γραμμή μεταφοράς που φαίνεται στην εγκάρσια τομή τού Σχ.11-2 σε δύο περιπτώσεις. Στην μία τα V και I είναι χρήσιμες ποσότητες, στην άλλη όχι. Η ομοαξονική γραμμή έχει εσωτερικό αγωγό ακτίνας a και εξωτερικό αγωγό εσωτερικής ακτίνας b . Για σταθερή διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών οι γραμμές τού ηλεκτρικού πεδίου είναι ακτινικές, όπως δείχνει το σχήμα. Αν υπάρχει ρεύμα I , οι γραμμές τού μαγνητικού πεδίου είναι όπως σχεδιάστηκαν. Τώρα, από την (11-1-6), η διαφορά δυναμικού μεταξύ εσωτερικού και εξωτερικού αγωγού είναι

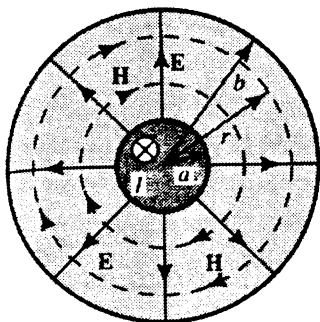
$$V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (V) \quad (1)$$

Παρομοίως, από την (11-1-7) το ρεύμα I στον εσωτερικό αγωγό είναι

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H r d\theta \quad (A) \quad (2)$$

Στην (1), το V είναι ανεξάρτητο τής διαδρομής μεταξύ των αγωγών, ενώ στην (2) η τιμή τού I , η οποία λαμβάνεται από ολοκλήρωση τού $\mathbf{H}$, είναι ανεξάρτητη τής ακτίνας r αν υποτεθεί ότι $a < r < b$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, τα V και I έχουν απλή, συγκεκριμένη έννοια και είναι χρήσιμες ποσότητες.

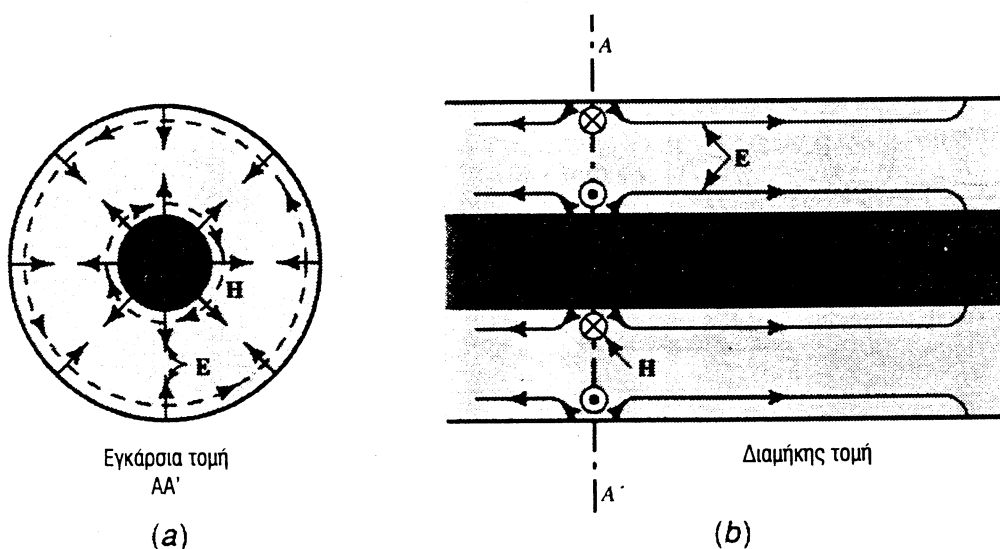
Η μορφή πεδίου που φαίνεται στο Σχ.11-2 ονομάζεται *εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό* (TEM) *πεδίο* (transverse electromagnetic field) διότι το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι



ΣΧΗΜΑ 11-2

Ομοαξονική γραμμή μεταφοράς με εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό ρυθμό. Οι γραμμές του E είναι ακτινικές (συνεχείς). Οι γραμμές του H είναι περιφέρειες κύκλων (διακεκομμένες).

εξ ολοκλήρου εγκάρσια (δεν υπάρχει συνιστώσα στην αξονική διεύθυνση). Αυτός ο τύπος πεδίου είναι ο μόνος δυνατός υπό στατικές συνθήκες, αλλά και σε συνθήκες χρονικής μεταβολής όπου το μήκος κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο από την διάμετρο. Σε υψηλότερες συχνότητες (μικρότερα μήκη κύματος) υπάρχουν περισσότερες σύνθετες μορφές πεδίου, γνωστές ως ρυθμοί υψηλότερης τάξης. Χαρακτηριστικό των ρυθμών αυτών είναι ότι έχουν κάποιες συνιστώσες πεδίου στην αξονική διεύθυνση. Αν και οι ομοαξονικές γραμμές δεν χρησιμοποιούνται υπό αυτές τις συνθήκες, υποθέστε ότι η συχνότητα είναι αρκετά υψηλή ώστε να υπάρξει ο ρυθμός που δείχνει το Σχ. 11-3. Η εγκάρσια μαζί με την διαμήκη (αξονική) τομή απαιτούνται για να δείξουν την μορφή του πεδίου αυτού. Αυτό το πεδίο ονομάζεται *εγκάρσιος μαγνητικός (TM) ρυθμός* (transverse magnetic mode) διότι το μαγνητικό πεδίο είναι εξ ολοκλήρου εγκάρσιο, ενώ το ηλεκτρικό πεδίο έχει διαμήκη συνιστώσα. Για τον ρυθμό αυτό, η τάση V μεταξύ των αγωγών, η οποία λαμβάνεται με χρήση της (1), μπορεί να είναι αμελητέα ενώ το ρεύμα I , το οποίο λαμβάνεται με χρήση της (2), εξαρτάται από την ακτίνα r της περιφέρειας ολοκλήρωσης. Επομένως τα V και I δεν έχουν πλέον απλή σημασία και είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε ποσότητες πεδίου. Η κατάρρευση της έννοιας του κυκλώματος συμβαίνει στην περίπτωση αυτή όταν οι εγκάρσιες



ΣΧΗΜΑ 11-3

Ομοαξονική γραμμή μεταφοράς με εγκάρσιο μαγνητικό ρυθμό (υψηλότερης τάξης). Η ανάλυσή της απαιτεί χρήση της θεωρίας πεδίου. Η θεωρία κυκλωμάτων είναι ανεπαρκής.

$$\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{L} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{L} + \oint \nabla V \cdot d\mathbf{L} + \oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{L} \quad (4)$$

Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους δίνει την ΗΕΔ $\mathcal{V}$ της γεννήτριας. Ολοκληρώνοντας τους δύο πρώτους όρους του δεξιού μέλους και γνωρίζοντας ότι $\nabla V = -\mathbf{E}$, έχουμε

$$\mathcal{V} = \frac{JL}{\sigma} + Ed + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} \quad (5)$$

Ο τελευταίος όρος μπορεί να ξαναεκφρασθεί ως εξής*

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \frac{dI}{dt} \oint \frac{\mathbf{A}}{I} \cdot d\mathbf{L} = L_i \frac{dI}{dt} \quad (6)$$

όπου $L_i = \oint \mathbf{A}/I \cdot d\mathbf{L}$ = επαγωγή του κυκλώματος (παρατηρείστε ότι εδώ το L_i συμβολίζει την επαγωγή για να διακρίνεται από το L του μήκους).

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dv = \text{διανυσματικό δυναμικό}$$

Παρατηρώντας ότι $J = I/\alpha$ και $E = D/\epsilon$, η (5) γίνεται

$$\mathcal{V} = I \frac{L}{\alpha\sigma} + \frac{Dd}{\epsilon} + L_i \frac{dI}{dt} \quad (7)$$

Αλλά, $L/\alpha\sigma = R$ και $D = Q/A$. Συνεπώς

$$\mathcal{V} = IR + \frac{Q}{A\epsilon/d} + L_i \frac{dI}{dt} \quad (8)$$

Αλλά $A\epsilon/d = C$ και το φορτίο $Q = \int I dt$. Συνεπώς η (8) παίρνει την μορφή

$$\mathcal{V} = IR + \frac{1}{C} \int I dt + L_i \frac{dI}{dt} \quad (9)$$

Αρα, αρχίζοντας με την εφαρμογή των εξισώσεων πεδίου (1), (2), και (3) σε ένα κύκλωμα σειράς, φθάσαμε στην οικεία εξίσωση των κυκλωμάτων (9). Για ημιτονοειδή (αρμονική) μεταβολή του ρεύματος, η (9), αν χρησιμοποιήσουμε διανύσματα φάσης, παίρνει την μορφή

$$\mathcal{V} = IR + \frac{I}{j\omega C} + j\omega L_i I \quad (10)$$

ή

$$\mathcal{V} = IR + jI \left(\omega L_i - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (11)$$

* Ο μετασχηματισμός (6) μπορεί να γραφεί με την βοήθεια του θεωρήματος Stokes, αν θυμηθούμε ότι και $\mathbf{A} = L_i I$ και $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, ως εξής:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \frac{d}{dt} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d\Lambda}{dt} = L_i \frac{dI}{dt}$$

όπου L_i = επαγωγή του βρόχου

I = ρεύμα του βρόχου

Η εξίσωση (11) είναι μία επέκταση τού νόμου τού Ohm (dc) $V = IR$ σε περιπτώσεις χρονικής μεταβολής.

Για την εξαγωγή τής (11) έγινε η υπόθεση ότι σε κάθε χρονική στιγμή το ρεύμα είναι το ίδιο για όλα τα σημεία τού κυκλώματος. Αυτό προϋποθέτει ότι μία διαταραχή μεταδίδεται μέσα στο κύκλωμα ακαριαία. Αν τó μήκος τού κυκλώματος είναι μικρό σε σύγκριση με το μήκος κύματος, αυτό είναι μία ικανοποιητική υπόθεση. Ομως, αν το μήκος τού κυκλώματος συγκριτικά με το μήκος κύματος είναι υπολογίσιμο ($\lambda/8$ ή μεγαλύτερο), οι μεταβολές τού ρεύματος και τής φάσεως κατά μήκος τού κυκλώματος μπορεί να γίνουν αξιόλογες. Υπό αυτές τις περιστάσεις οι απλές έννοιες τού κυκλώματος τείνουν να γίνουν ανεπαρκείς και ανακριβείς. Πρέπει να σημειωθεί, επίσης, ότι η προαναφερθείσα εξέταση τών κυκλωμάτων αγνοεί το φαινόμενο τής ακτινοβολίας, το οποίο είναι πολύ σημαντικό στις υψηλές συχνότητες (Βλ. Κεφ. 12).

Υπάρχουν συγκεκριμένες εξαιρέσεις στον προαναφερθέντα κανόνα ότι οι έννοιες τών κυκλωμάτων γίνονται ανεπαρκείς όταν το μήκος τού κυκλώματος είναι συγκρίσιμο με το μήκος κύματος. Για παράδειγμα, οι έννοιες κυκλώματος χρησιμοποιούνται με επιτυχία στις μεγάλους μήκους γραμμές μεταφοράς. Στην περίπτωση αυτή, η κατανεμημένη επαγωγή και χωρητικότητα συμβολίζεται κατάλληλα με συγκεντρωμένα (lumped) στοιχεία κυκλώματος. Αν και το μήκος τής γραμμής μπορεί να ισούται με πολλά μήκη κύματος, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι αυτή η επέκταση τής θεωρίας κυκλωμάτων εφαρμόζεται μόνο για γραμμές τών οποίων οι εγκάρσιες διαστάσεις είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με το μήκος κύματος.

11-4. ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL ΩΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Στο υπόλοιπο τού κεφαλαίου συγκεντρώνουμε έναν αριθμό εξισώσεων οι οποίες αναπτύχθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια και τις θεωρούμε ως ένα σύνολο. Αυτές οι εξισώσεις, γνωστές ως *εξισώσεις τού Maxwell*, αποτελούνται από τέσσερις εκφράσεις: μία προκύπτει από τον νόμο τού Ampere, μία από τον νόμο τού Faraday, και δύο προκύπτουν από τον νόμο τού Gauss. Αυτές οι εξισώσεις έχουν κεφαλαιώδη σημασία και, μαζί με τις οριακές συνθήκες, τις σχέσεις συνεχείας, και άλλες βοηθητικές σχέσεις, διαμορφώνουν τα βασικά εργαλεία ανάλυσης τών περισσότερων προβλημάτων τού ηλεκτρομαγνητισμού.*

Στο Κεφ. 6 ο νόμος τού Ampere, ο οποίος συσχετίζει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα τού $\mathbf{H}$ σε κλειστή διαδρομή με το διάρρευμα I , δόθηκε ως εξής

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας το ρεύμα I με το επιφανειακό ολοκλήρωμα τής πυκνότητας τού ρεύματος αγωγιμότητας $\mathbf{J}$ επάνω στην επιφάνεια την οποίαν οριοθετεί η καμπύλη ολοκλήρωσης τού $\mathbf{H}$, έχουμε την πιο γενική σχέση

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (2)$$

* James Clerk Maxwell, "A Treatise on Electricity and Magnetism", 2 vols., Oxford University Press, London, 1873, 3η έκδοση, 1904.

Στο Κεφ. 10 αυτή η σχέση έγινε ακόμη γενικότερη με την πρόσθεση τής πυκνότητας τού ρεύματος μετατόπισης στην πυκνότητα τού ρεύματος αγωγιμότητας. Με τον τρόπο αυτό, η (2) γίνεται

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (3)$$

Αυτή η σχέση ονομάζεται *εξίσωση τού Maxwell* η οποία προκύπτει από τον νόμο τού *Ampere*. Η (3) είναι η ολοκληρωματική μορφή της. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα τού $\mathbf{H}$ υπολογίζεται επάνω στην κλειστή καμπύλη η οποία οριοθετεί τήν επιφάνεια S . Στην γλώσσα τών κυκλωμάτων μία κλειστή καμπύλη ονομάζεται, συνήθως, *βρόχος*. Επομένως, η (3) είναι μία *εξίσωση βρόχου*. Εφαρμόζοντας το θεώρημα τού Stokes στην (3) παίρνουμε την αντίστοιχη *σημειακή εξίσωση*

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) είναι μία διαφορική εξίσωση και συσχετίζει τις πεδιακές ποσότητες σε ένα σημείο. Είναι η διαφορική μορφή τής εξίσωσης Maxwell η οποία προκύπτει από τον νόμο τού *Ampere*.

Στο Κεφ. 10 ο νόμος τού Faraday, οποίος συσχετίζει την επαγόμενη στο κύκλωμα ΗΕΔ $\mathcal{V}$ με τον ρυθμό μείωσης τής συνολικής μαγνητικής ροής η οποία εμπλέκει το κύκλωμα, δόθηκε ως εξής

$$\mathcal{V} = - \frac{d\Lambda}{dt} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την εμπλέκουσα ροή Λ με το επιφανειακό ολοκλήρωμα τού $\mathbf{B}$ επάνω στην επιφάνεια η οποία οριοθετείται από το κύκλωμα, έχουμε την γενικότερη εξίσωση

$$\mathcal{V} = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας το $\mathcal{V}$ στην (6) με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα τού $\mathbf{E}$ σε όλο το μήκος τού κυκλώματος, έχουμε την ακόμη γενικότερη εξίσωση (για στατικά κυκλώματα)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (7)$$

Αυτή η εξίσωση πεδίου είναι γενίκευση τού νόμου τού Faraday για τα κυκλώματα (5). Η εξίσωση (7) ονομάζεται *εξίσωση τού Maxwell* η οποία προκύπτει από τον νόμο τού Faraday. Στην (7) δίνεται σε ολοκληρωματική μορφή. Είναι, δηλαδή, μία εξίσωση βρόχου. Η αντίστοιχη σημειακή εξίσωση προκύπτει από την (7) με εφαρμογή τού θεωρήματος τού Stokes

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8)$$

Η εξίσωση (8) είναι μία διαφορική εξίσωση και συσχετίζει τις πεδιακές ποσότητες σε ένα σημείο. Είναι η διαφορική μορφή τής εξίσωσης τού Maxwell η οποία προκύπτει από τον

νόμο του Faraday.

Στο Κεφ. 2 ο νόμος του Gauss, ο οποίος συσχετίζει το επιφανειακό ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής πυκνότητας ροής D με το περικλειόμενο φορτίο Q , δόθηκε ως εξής:

$$\oint_S D \cdot ds = Q \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας στην (9) το Q με το ολοκλήρωμα της πυκνότητας ροής ρ μέσα στον όγκο ο οποίος οριοθετείται από την επιφάνεια S , μπορούμε να γράψουμε την (9) σε πιο γενική μορφή

$$\oint_S D \cdot ds = \int_V \rho \, dv \quad (10)$$

Αυτή η εξίσωση πεδίου είναι μία γενίκευση του νόμου του Gauss και ονομάζεται *εξίσωση Maxwell για τα ηλεκτρικά πεδία* η οποία προκύπτει από τον νόμο του Gauss. Στην (10) έχουμε την ολοκληρωματική της μορφή για όγκο V . Εφαρμόζοντας την (10) σε απειροστό όγκο, μπορούμε να πάρουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση η οποία συσχετίζει ποσότητες πεδίου σε ένα σημείο

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (11)$$

Η εξίσωση (11) είναι η διαφορική μορφή της εξίσωσης του Maxwell από τον νόμο του Gauss για τα ηλεκτρικά πεδία.

Για τα μαγνητικά πεδία το επιφανειακό ολοκλήρωμα B επάνω σε κλειστή επιφάνεια S είναι μηδέν. Επομένως, το μαγνητικό αντίστοιχο της σχέσης του Gauss για τα ηλεκτρικά πεδία (9) είναι

$$\oint_S B \cdot ds = 0 \quad (12)$$

Η αντίστοιχη διαφορική, ή σημειακή, σχέση είναι

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (13)$$

Οι εξισώσεις (12) και (13) μπορούν να αναφερθούν ως οι *εξισώσεις του Maxwell για τα μαγνητικά πεδία* οι οποίες προκύπτουν από το νόμο του Gauss. Η (12) είναι η ολοκληρωματική μορφή και η (13) η διαφορική μορφή.

Η ανάπτυξη των εξισώσεων του Maxwell ως γενίκευση των εξισώσεων κυκλωμάτων εμπεριέχει επαγωγική σκέψη μαζί με φυσική τεκμηρίωση. Κατά την διατύπωση των εξισώσεων του ο Maxwell άντλησε πάρα πολλά στοιχεία από την πειραματική εργασία του Faraday. Επίσης, ο Maxwell χρησιμοποίησε αναλογίες από υδραυλικά και άλλα μηχανικά συστήματα οι οποίες τον βοήθησαν στην μορφοποίηση των ιδεών του.

Δεν υπονοούμε ότι η "εξαγωγή" των εξισώσεων του Maxwell είναι μία διαδικασία αυστηρά μαθηματική. Οι εξισώσεις του δικαιώνονται από το γεγονός ότι τα συμπεράσματα τα οποία βασίστηκαν σ' αυτές ευρέθηκαν, σε αμέτρητες περιπτώσεις, σε τέλεια συμφωνία με το πείραμα. Με τον ίδιο τρόπο, οι προγενέστερες εξισώσεις κυκλωμάτων δικαιώθηκαν, στο πιο περιορισμένο πεδίο εφαρμογής τους, από την τέλεια συμφωνία μεταξύ των συμπερασμάτων τα οποία βασίστηκαν σε αυτές και του πειράματος. Αξίζει, ίσως, να θυμηθούμε ότι οι εξισώσεις του Maxwell δεν ήταν γενικώς αποδεκτές για αρκετά χρόνια έπειτα από την διατύπωσή τους (1873). Από τις εξισώσεις του οι οποίες περιέχουν στροφή (curl) (με $\nabla \times E$

και $\nabla \times \mathbf{H}$) εξυπακούετο ότι τα χρονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στο κενό είναι αλληλοεξαρτώμενα. Ενα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να παράγει ένα μαγνητικό πεδίο, κι αντιστρόφως. Από αυτά εξαγόταν το συμπέρασμα ότι ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα μετέδιδε ενέργεια μέσω του κενού χώρου με την ταχύτητα του φωτός (Κεφ. 12), και ακόμη, ότι η φύση του φωτός είναι ηλεκτρομαγνητική και είναι δυνατόν να υπάρξουν (ηλεκτρομαγνητικά) κύματα μεγαλύτερου μήκους κύματος. Πέρασαν 15 χρόνια μέχρι να δειχθούν στην πράξη αυτά τα μακρύτερα κύματα (ραδιοκύματα) από τον Heinrich Hertz, το 1888, και τότε οι εξισώσεις του Maxwell άρχισαν να γίνονται αποδεκτές.

Μαζί με τις εξισώσεις του Maxwell υπάρχουν και ορισμένες άλλες θεμελιώδεις εξισώσεις οι οποίες είναι μεγάλης σπουδαιότητας όταν ασχολούμαστε με προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού. Μεταξύ αυτών μπορούν να αναφερθούν:

Ο νόμος του *Ohm* για σημείο (5-7-2):

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

(14)

Η εξίσωση συνέχειας (5-13-3):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(15)

Η εξισώσεις για την δύναμη:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dL$$

(16)

Οι καταστατικές εξισώσεις μεταξύ των $\mathbf{E}$ και $\mathbf{D}$ και μεταξύ των $\mathbf{B}$ και $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

(17)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

(18)

11-5 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL ΣΤΟΝ ΚΕΝΟ ΧΩΡΟ

Στην προηγούμενη ενότητα, οι εξισώσεις του Maxwell διατυπώθηκαν στην γενική μορφή τους. Για την ειδική περίπτωση του κενού χώρου, όπου η πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J}$ και η πυκνότητα φορτίου ρ είναι μηδέν, οι εξισώσεις λαμβάνουν απλούστερη μορφή. Οι εξισώσεις σε ολοκληρωματική μορφή είναι

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

(1)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Οι εξισώσεις σε διαφορική μορφή είναι:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

11-6 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL ΓΙΑ ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Για αρμονική μεταβολή, οι εξισώσεις Maxwell, σε ολοκληρωματική και διαφορική μορφή, με συμβολισμό διανυσμάτων φάσης, είναι

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = (\sigma + j\omega\epsilon) \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad (5)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -j\omega\mu \int_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (6)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho \, dv \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (7)$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

11-7 ΠΙΝΑΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ MAXWELL

Οι εξισώσεις του Maxwell συνοψίζονται στους Πίνακες 11-1 και 11-2. Ο Πίνακας 11-1 δίνει τις εξισώσεις του Maxwell σε ολοκληρωματική μορφή και ο Πίνακας 11-2 σε διαφορική μορφή. Οι εξισώσεις διατυπώνονται για την γενική περίπτωση, τον κενό χώρο, την περίπτωση αρμονικής μεταβολής, την περίπτωση σταθερής κατάστασης (στατικά πεδία, σταθερά ρεύματα αγωγιμότητας), και την στατική περίπτωση (στατικά πεδία χωρίς ρεύματα). Στον Πίνακα 11-1 δείχνεται, επίσης, η σχέση μεταξύ διαφόρων πεδιακών ποσοτήτων και του ηλεκτρικού δυναμικού V , της ΗΕΔ $\mathcal{E}$, του μαγνητικού δυναμικού $\mathcal{U}$, της ΜΕΔ $\mathcal{M}$, του συνολικού ρεύματος $I_{\text{συνολ}}$, του ρεύματος μετατόπισης $I_{\text{μετ}}$, του ρεύματος αγωγιμότητας $I_{\text{αγωγ}}$, της ηλεκτρικής ροής ψ , και της μαγνητικής ροής ψ_m . Ο Πίνακας 11-3 καταγράφει τις εξισώσεις της αντίστασης, της χωρητικότητας και της επαγωγής σε πεδιακή και κυκλωματική διατύπωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 11-1
Εξισώσεις Maxwell σε ολοκληρωμένη μορφή

	Από Ampere	Από Faraday	Από Gauss	
Ποσότητα και μονάδες Ω	ΜΕΔ, A	ΗΕΔ, V	Ηλεκτρική ροή, C	Μαγνητική ροή, Wb
Περίπτωση				
Γενική	$F = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{total}}$	$\mathcal{V} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$	$\psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \, dv$	$\psi_m = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Κενό	$F = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{disp}}$	$\mathcal{V} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$	$\psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\psi_m = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Αρμονική μεταβολή	$F = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = (\sigma + j\omega\epsilon) \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{total}}$	$\mathcal{V} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -j\omega\mu \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$	$\psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \, dv$	$\psi_m = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Σταθερή κατάσταση	$F = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{cond}}$	$V = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$	$\psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \, dv$	$\psi_m = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Στατικές συνθήκες	$U = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = 0$	$V = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$	$\psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \, dv$	$\psi_m = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι και οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell είναι ενσωματωμένες στην σύντομη εξίσωση

$$\mathbf{f} = \square \cdot \bar{\mathbf{T}}_{mm} \quad m, n = 1, 2, 3, 4$$

όπου $\mathbf{f}$ = δύναμη ανά μονάδα όγκου, N m^{-3}

$\bar{\mathbf{T}}_{mm}$ = τανυστής τάσης (stress) του Maxwell, N m^{-2}

$\square$ = 4-διάστατη απόκλιση (divergence), m^{-1}

Η εξέταση της εξίσωσης είναι πέραν του ορίζοντα αυτής της έκδοσης. Εξηγείται στην Ενότητα 16-8 της 2ης έκδοσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 11-2

Εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή

Ποσότητα - διαστάσεις	Από Ampere	Από Faraday	Από Gauss	
	Ηλεκτρικό ρεύμα εμβαδόν	Ηλεκτρικό δυναμικό εμβαδόν	Ηλεκτρική ροή όγκος	Μαγνητική ροή όγκος
Περίπτωση				
Γενική	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Κενό	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Αρμονική μεταβολή	$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Σταθερή κατάσταση	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Στατικές συνθήκες	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

ΠΙΝΑΚΑΣ 11-3

Αντίσταση, χωρητικότητα και επαγωγή συναρτήσει κυκλωματικών και πεδιακών ποσοτήτων

	Κυκλωματικός ορισμός	Φυσικός ορισμός	Κυψελίδα πεδίου	Ορισμός ενέργειας ή ισχύος
Αντίσταση R	$\frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}$	$\frac{L}{\sigma A}$	$\frac{1}{\sigma d}$	$\frac{\iiint \frac{J^2}{\sigma} dv}{I^2}$
Χωρητικότητας C	$\frac{\iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}$	$\frac{\epsilon A}{L}$	ϵd	$\frac{\iiint \epsilon E^2 dv}{V^2}$
Επαγωγή L	$\frac{\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}$	$\frac{\mu A}{L}$	μd	$\frac{\iiint \mu H^2 dv}{I^2}$