

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η έννοια του φάσορα (ή στρεφόμενου διανύσματος) διευκολύνει την ανάλυση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου κυκλώματος που δέχεται ημιτονοειδή διέγερση σε μια συγκεκριμένη συχνότητα και βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση. Η τεχνική αυτή βασίζεται στη δημιουργία μιας αφαίρεσης «αγνοώντας» τη συχνότητα και χρησιμοποιώντας μιγαδική αναπαράσταση για όλα τα μεγέθη που εμπλέκονται.

Με την τεχνική των φασόρων έχουμε λοιπόν τον εξής μετασχηματισμό:

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = A_m e^{j\varphi} \\ x(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{A}e^{j\omega t}\} \end{cases}$$

Οι φάσορες συνιστούν την πιο εύκολη μέθοδο για να προσδιορίσουμε τη **μερική λύση** μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές) όταν η διέγερση είναι ημιτονοειδής συνάρτηση. Εξετάζουμε λοιπόν τη λύση της

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = A_m \cos(\omega t + \varphi),$$
$$a_0, a_1, \dots, a_n, A_m, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$$

Το «κλειδί» εδώ είναι ότι γνωρίζουμε πως η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι ίδιας μορφής με τη διέγερση, δηλαδή θα έχει ημιτονοειδή μορφή και μάλιστα ίδιας συχνότητας, έστω $x(t) = X_m \cos(\omega t + \psi)$. Ορίζουμε λοιπόν

$$\mathbf{A} = A_m e^{j\varphi}, \quad \mathbf{X} = X_m e^{j\psi}$$

και αντικαθιστούμε:

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} \operatorname{Re}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \operatorname{Re}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\} + a_n \operatorname{Re}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{A}e^{j\omega t}\}$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των φασόρων¹ και πιο συγκεκριμένα από το Λήμμα I, έχουμε ότι

$$\frac{d^n}{dt^n} \operatorname{Re}\{a_0 \mathbf{X}e^{j\omega t}\} + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \operatorname{Re}\{a_1 \mathbf{X}e^{j\omega t}\} + \dots + \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{a_{n-1} \mathbf{X}e^{j\omega t}\} + \operatorname{Re}\{a_n \mathbf{X}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{A}e^{j\omega t}\}$$

¹ Βασικά λήμματα:

ΛΗΜΜΑ I. Το πραγματικό μέρος $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ είναι προσθετικό και ομογενές.

ΛΗΜΜΑ II. Το πραγματικό μέρος $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ και ο τελεστής διαφορίσης $\mathbf{D}$ μπορούν να αντιμετωπιστούν.

ΛΗΜΜΑ III. $A, B \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re}\{\mathbf{A}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{B}e^{j\omega t}\}, \forall t \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$

Από το Λήμμα II κι εφαρμόζοντάς το n φορές, παίρνουμε ότι

$$\operatorname{Re}\left\{a_0 \mathbf{X} \frac{d^n}{dt^n} e^{j\omega t}\right\} + \operatorname{Re}\left\{a_1 \mathbf{X} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{j\omega t}\right\} + \dots + \operatorname{Re}\left\{a_{n-1} \mathbf{X} \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right\} + \operatorname{Re}\left\{a_n \mathbf{X} e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{A} e^{j\omega t}\right\}$$

κι εκτελώντας τη διαφορίση

$$\operatorname{Re}\left\{a_0 \mathbf{X} (j\omega)^n e^{j\omega t}\right\} + \operatorname{Re}\left\{a_1 \mathbf{X} (j\omega)^{n-1} e^{j\omega t}\right\} + \dots + \operatorname{Re}\left\{a_{n-1} \mathbf{X} (j\omega) e^{j\omega t}\right\} + \operatorname{Re}\left\{a_n \mathbf{X} e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{A} e^{j\omega t}\right\}$$

οπότε από το Λήμμα III

$$\left[a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n\right] \mathbf{X} = \mathbf{A}$$

και τελικά

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{A}}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n}$$

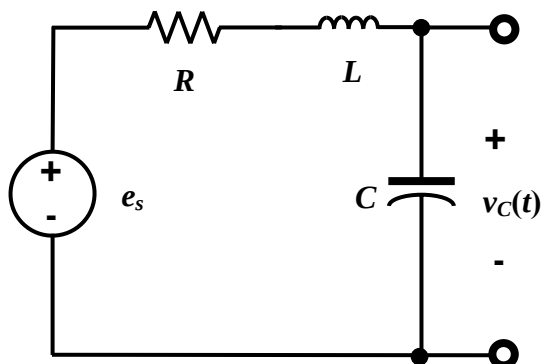
πράγμα που σημαίνει ότι

$$X_m = \frac{A_m}{\sqrt{\left(a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots\right)^2 + \left(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots\right)^2}}$$

και

$$\psi = \varphi - \tan^{-1} \left(\frac{a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots}{a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots} \right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



Στο σειριακό αυτό κύκλωμα RLC, η διέγερση (είσοδος) θα είναι ημιτονοειδής, έστω λοιπόν

$$e_s(t) = |E| \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{E} e^{j\omega t}\right\}$$

όπου $\mathbf{E}$ ο αντίστοιχος φάσορας.

Η απόκριση (έξοδος) είναι η τάση $v_C(t)$ στα άκρα του πυκνωτή, που θα είναι και αυτή ημιτονοειδής με την ίδια συχνότητα αφού πρόκειται για γραμμικό χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα:

$$v_C(t) = |V_C| \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re}\{V_C e^{j\omega t}\}$$

όπου V_C ο αντίστοιχος φάσορας.

Η διαφορική εξίσωση θα είναι

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = e_s$$

Αντικαθιστώντας τις φασορικές μορφές των $e_s(t)$ και $v_C(t)$ και σύμφωνα με τη θεωρητική ανάπτυξη πιο πάνω, βλέπουμε ότι ισχύει

$$\left[LC(j\omega)^2 + (j\omega)RC + 1 \right] V_C = E$$

Οπότε παίρνουμε για τη μερική λύση

$$V_C = \frac{E}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

δηλαδή

$$|V_C| = \frac{|E|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

$$\angle V_C \equiv \psi = \varphi - \tan^{-1} \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$$

Από τα στοιχεία αυτά μπορεί να οριστεί η $v_C(t)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η πλήρης απόκριση θα ήταν της μορφής

$$k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + v_C(t)$$

όπου $s_{1,2}$ είναι οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης $LCs^2 + RCs + 1 = 0$ και οι σταθερές k_1 και k_2 προσδιορίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.