

ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΚΟΥΤΙ

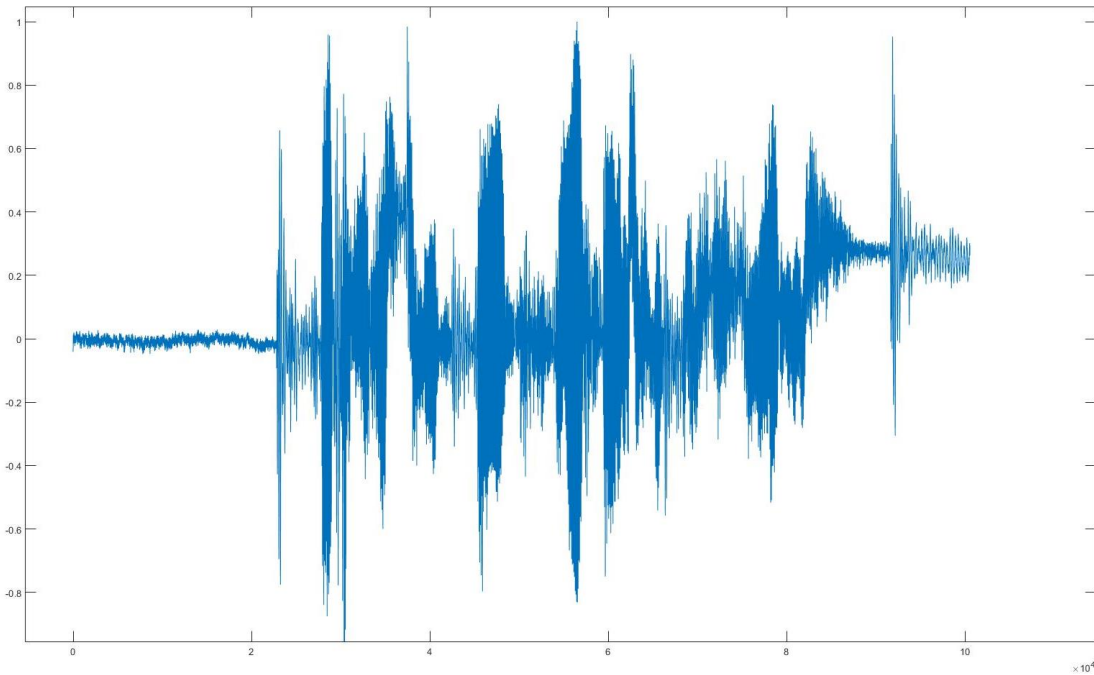


1. Το περιεχόμενο του μαύρου κουτιού
(απλά ηλεκτρικά στοιχεία)
2. **Είσοδος:** σήματα (κυματομορφές) διέγερσης
3. **Έξοδος:** απόκριση

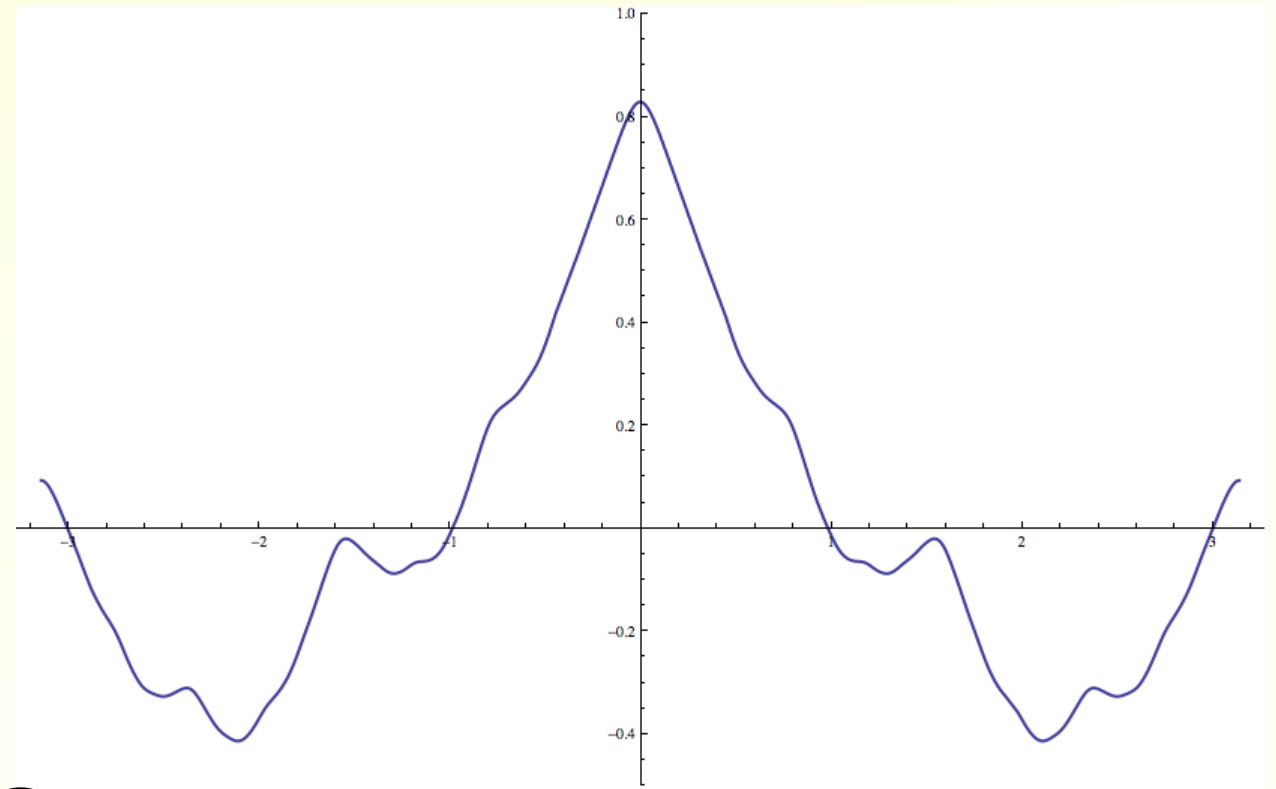
ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΕΣ

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ

Κυματομορφή $\equiv$ Σήμα $\equiv$ Είσοδος $\equiv$ Διέγερση $\equiv$
Μαθηματική συνάρτηση



∞



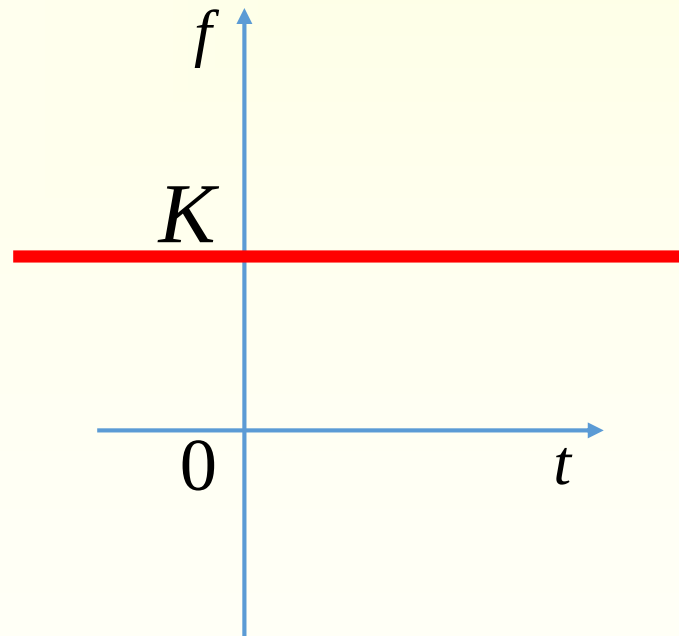
ΟΛΕΣ ΟΙ ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΕΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ

- Από τις άπειρες κυματομορφές κάποιες είναι πιο σημαντικές επειδή:
 - Εμφανίζονται πιο συχνά
 - Έχουν μια ιδιαίτερη πρακτική σημασία
 - Έχουν μια ιδιαίτερη θεωρητική σημασία
- Θα εξετάσουμε μόνο τις απαραίτητες

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 1: Η ΣΤΑΘΕΡΗ

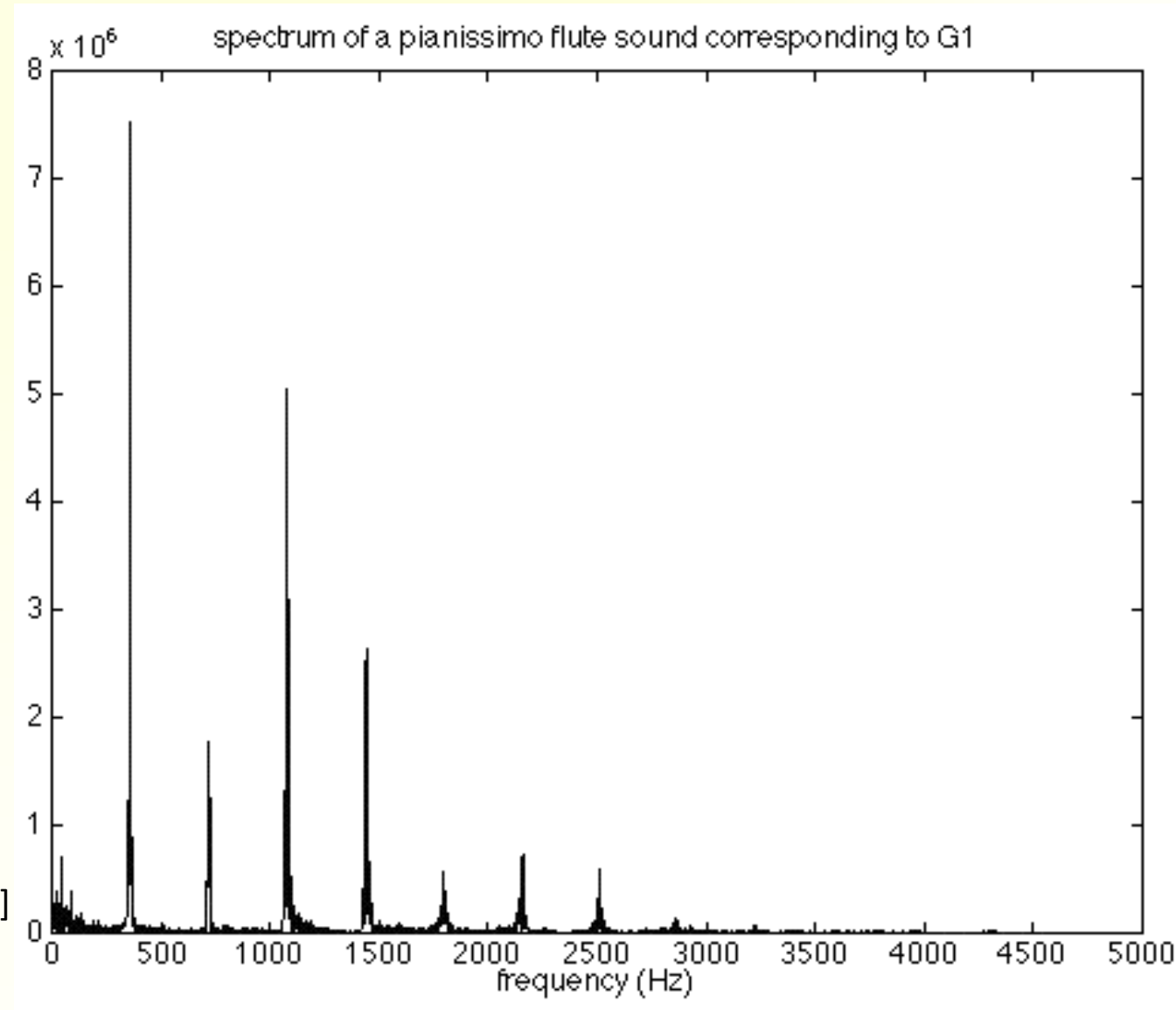
- Η **σταθερή** κυματομορφή

$$f(t) = K, \quad \forall t, \quad K \in \mathbb{R}$$



ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 2: Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

- Συμπεριλαμβάνει και το **ημίτονο** και το **συνημίτονο**
- Η πιο σημαντική κυματομορφή
- Αποτελεί **δομικό στοιχείο**:
- Κάθε «μη παθολογικό» σήμα αποτελεί ένα σταθμισμένο άθροισμα από ημιτονοειδείς [π.χ. μουσικό όργανο]
- Φασματική ανάλυση [391,995 Hz + αρμον.]



ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 2: Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

- Η **ημιτονοειδής** κυματομορφή

$$g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

↑
εύρος (πλάτος)



γωνιακή συχνότητα **rad/s**

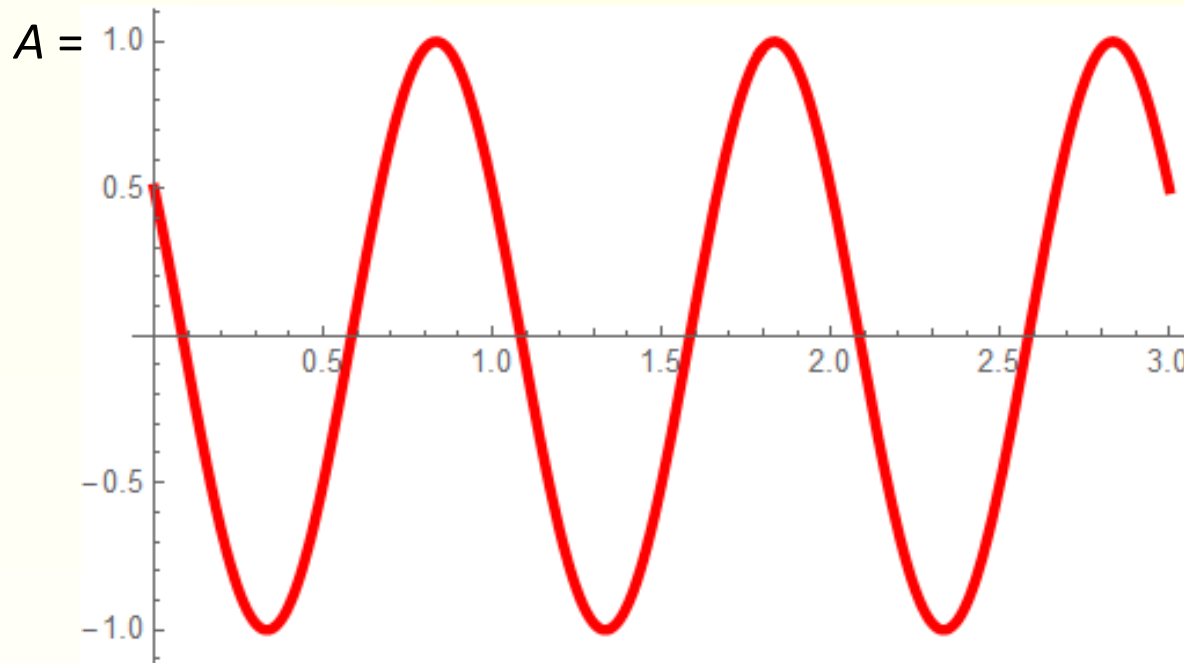
↑
φάση ° (μοίρες)

$$\omega = 2\pi f$$



συχνότητα **Hz**

Cos[2 Pi t + 60 Degree]



ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 2: Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

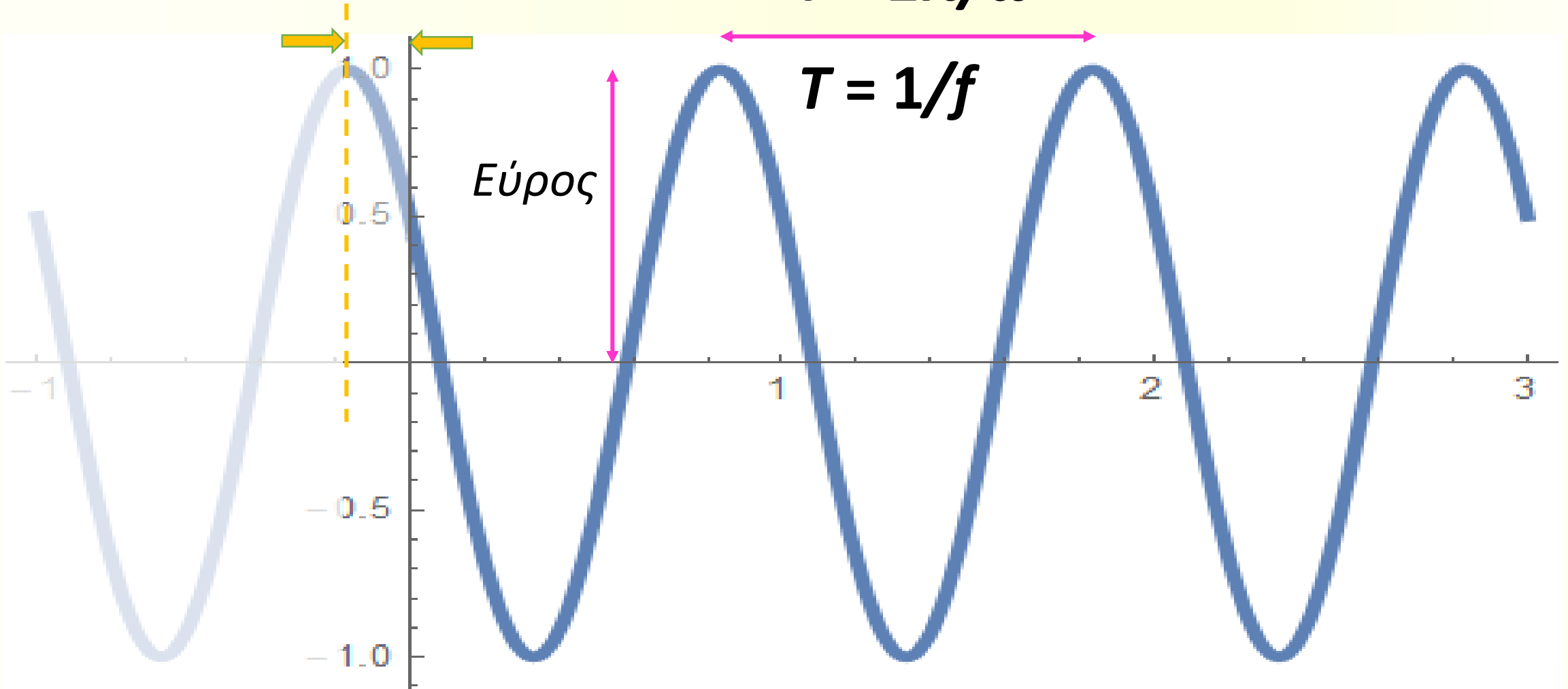
Φάση φ

Περίοδος
 $T = 2\pi/\omega$

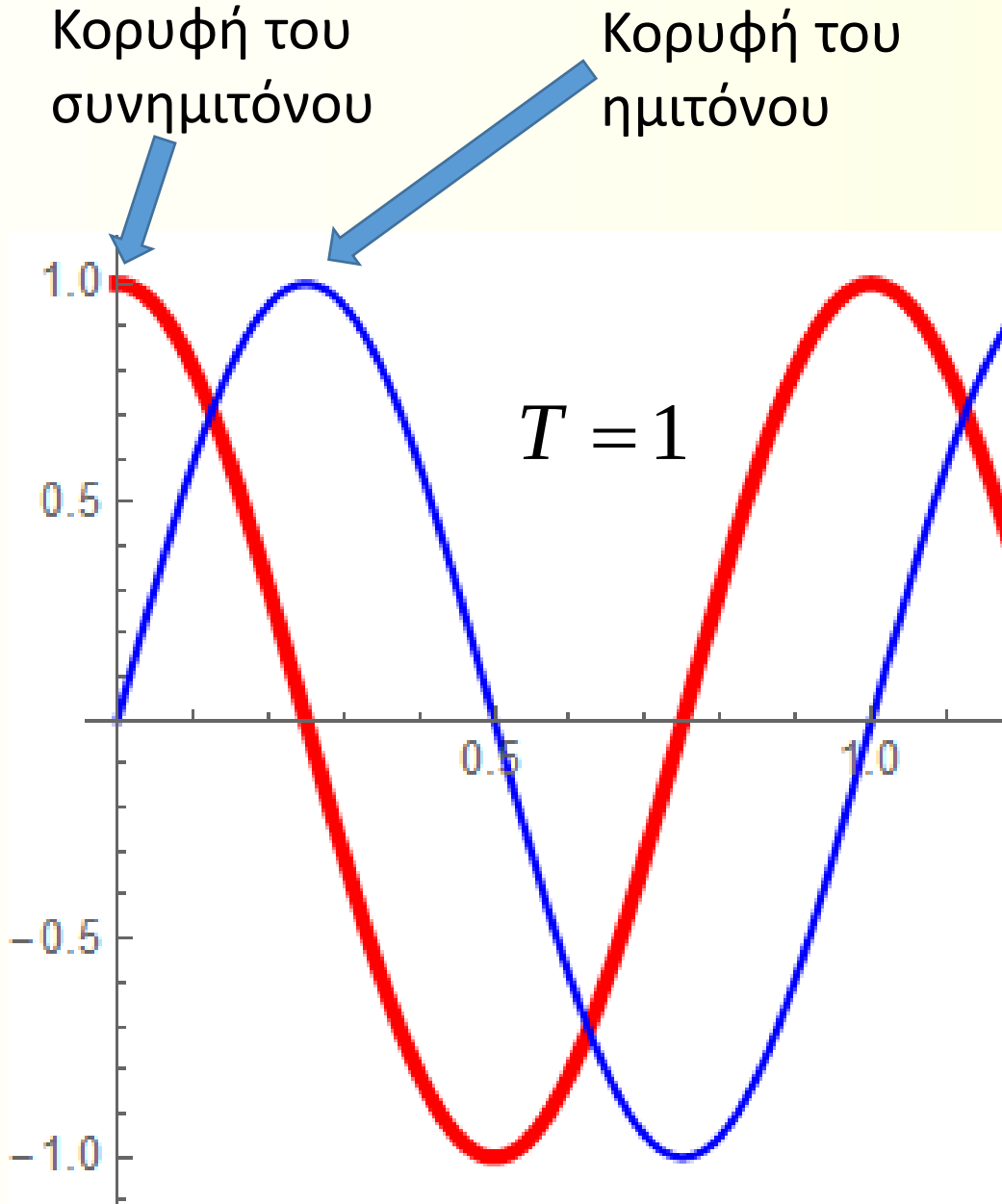
φ/ω

$T = 1/f$

Εύρος



ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 2: Η (ΣΥΝ)ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ



- Το συνημίτονο κορυφώνεται πριν το ημίτονο, άρα **προηγείται**
- Η διαφορά ανάμεσα στα δυο γεγονότα είναι 90° (ή $\pi/2$ rad):
$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - 90^\circ)$$
$$\cos(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + 90^\circ)$$
- Η διαφορά ανάμεσα στα δυο γεγονότα είναι **90°** (ή $\pi/2$ rad) και είναι ίση με **$0,25$ s**

• **Η φάση είναι χρόνος!**

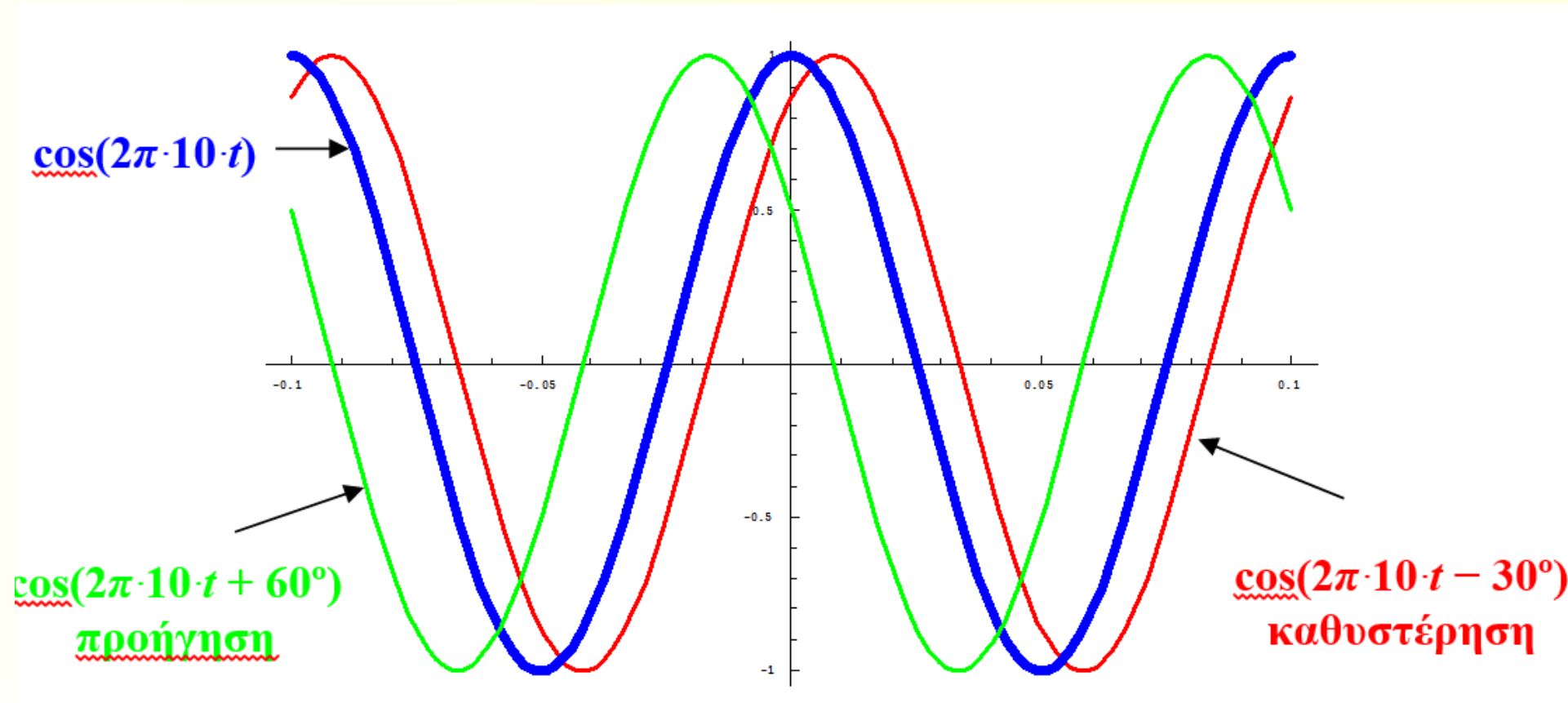
- $\frac{\varphi}{2\pi} T$ s (φ σε rad) $\frac{\varphi}{360^\circ} T$ s (φ σε μοίρες)

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 2: Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

- Η γωνία φάσης φ δίνει την τιμή της κυματομορφής στο $t = 0$
- Άρα, καθορίζει το σημείο πάνω στην κυματομορφή από το οποίο αρχίζουμε να μετράμε τον χρόνο
- Αλλαγή/Μεταβολή της φ μετατοπίζει την κυματομορφή πάνω στον άξονα του χρόνου χωρίς να επηρεάζεται ούτε η συχνότητα ούτε το πλάτος
- Αν $\varphi > 0$ η κυματομορφή μετατοπίζεται προς τα **αριστερά** = **ΠΡΟΗΓΗΣΗ**
- Αν $\varphi < 0$ η κυματομορφή μετατοπίζεται προς τα **δεξιά** = **ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ**

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 2: Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

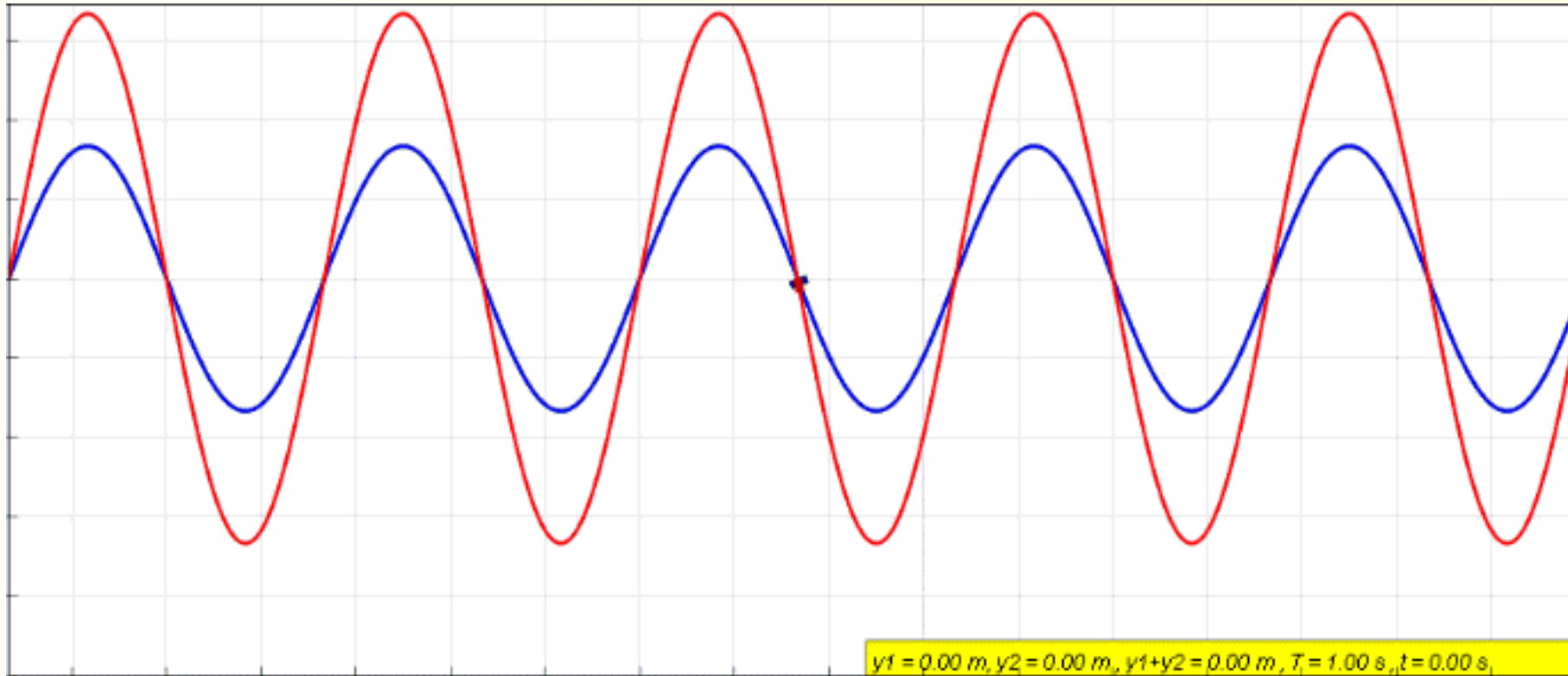
- Η διαφορά φάσης
- $\varphi > 0 \Rightarrow$ μετατόπιση προς τα αριστερά $\equiv$ **προήγηση**
- $\varphi < 0 \Rightarrow$ μετατόπιση προς τα δεξιά $\equiv$ **καθυστέρηση**



ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 2: Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

- Άθροισμα ημιτόνων ίδιας συχνότητας:

http://sml.ece.upatras.gr/images/UploadedFiles/ilektrika-kyklomata_i/phase.gif



$$-\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi \pm 180^\circ)$$

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 2: Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

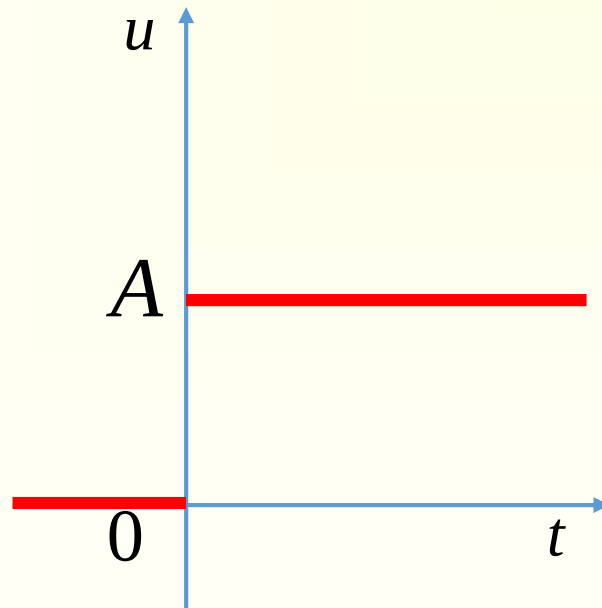
- Άθροισμα ημιτόνων διαφορετικής συχνότητας:
- **Μη ημιτονοειδής!!**



ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 3α: Η ΒΗΜΑΤΙΚΗ

- Η **βηματική** κυματομορφή (step)

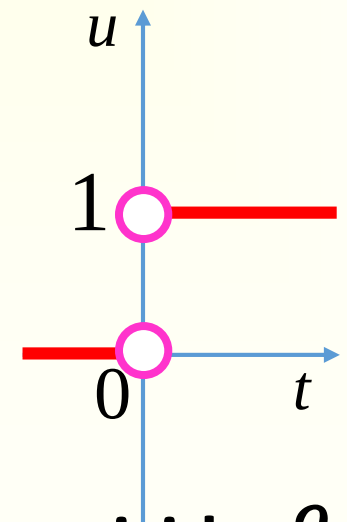
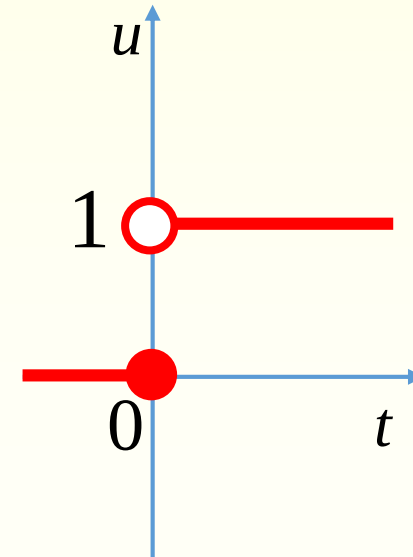
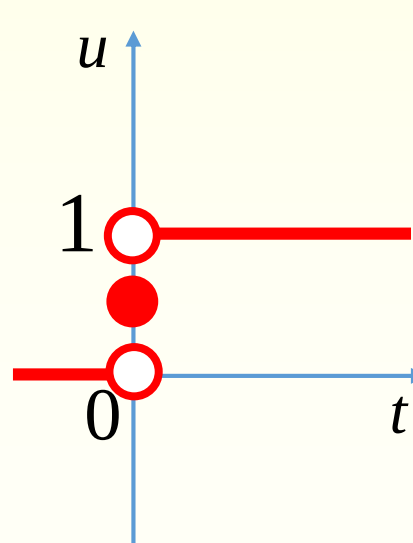
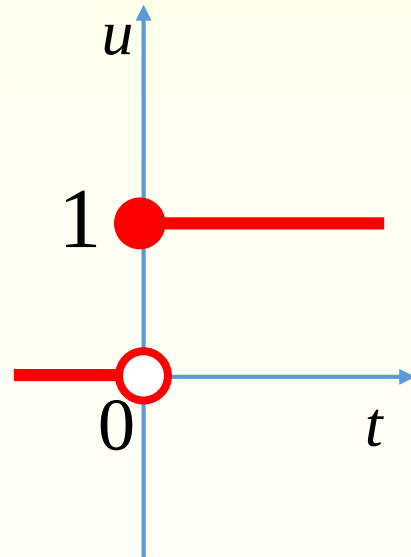
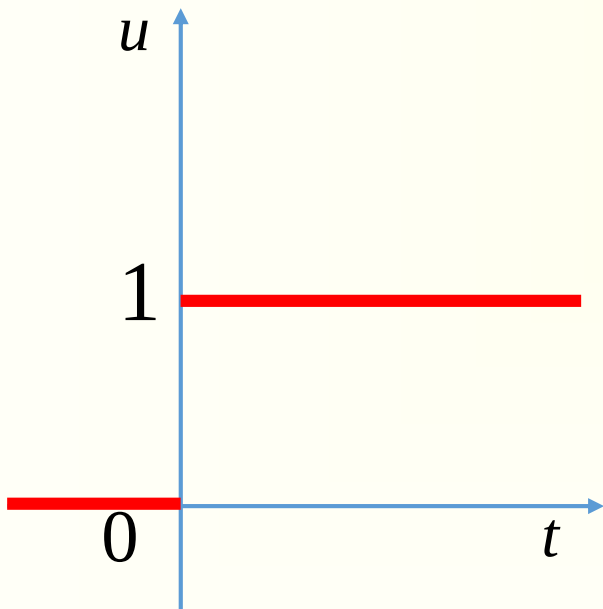
$$u(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ A, & \forall t > 0, \quad A \in \mathbb{R} \end{cases}$$



ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 3: Η ΒΗΜΑΤΙΚΗ

- Η **μοναδιαία βηματική** κυματομορφή (unit step)

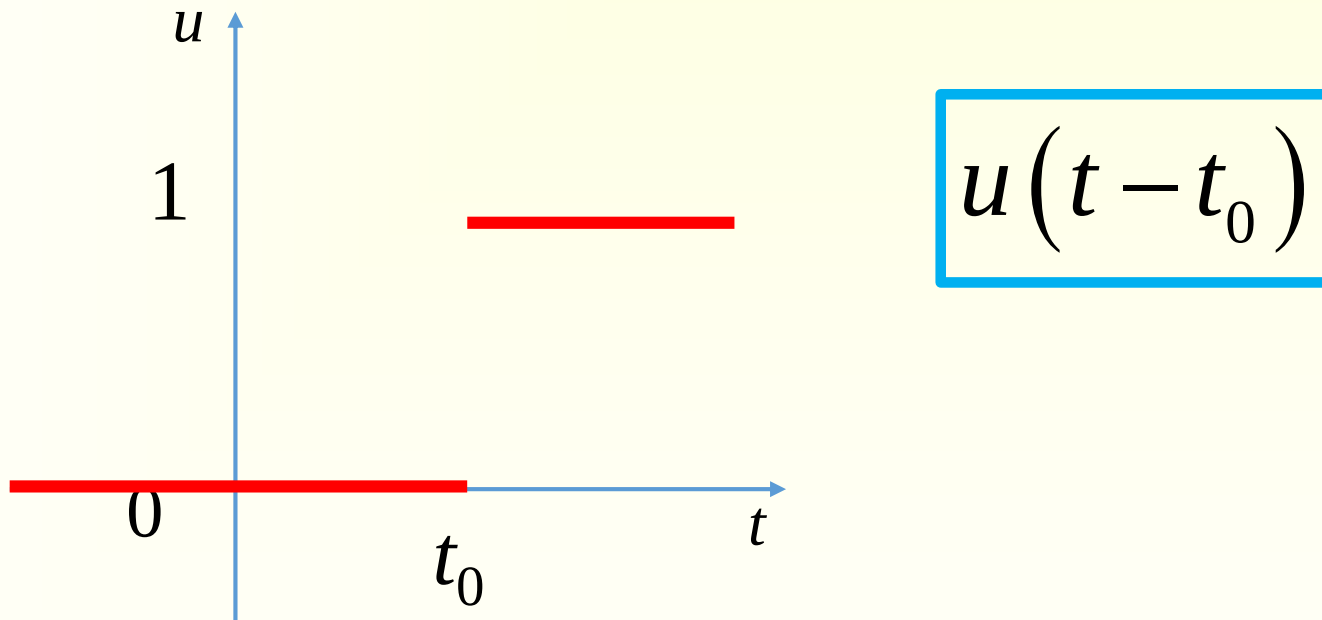
$$u(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ 1, & \forall t > 0 \end{cases} \quad u(0) = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ - \end{cases}$$



Heaviside $\mathcal{U}$

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 3β: Η ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗ

- Η **μετατοπισμένη βηματική** κυματομορφή είναι μια βηματική που «ξεκινάει» όταν $t = t_0$ («καθυστέρηση» αν $t_0 > 0$)

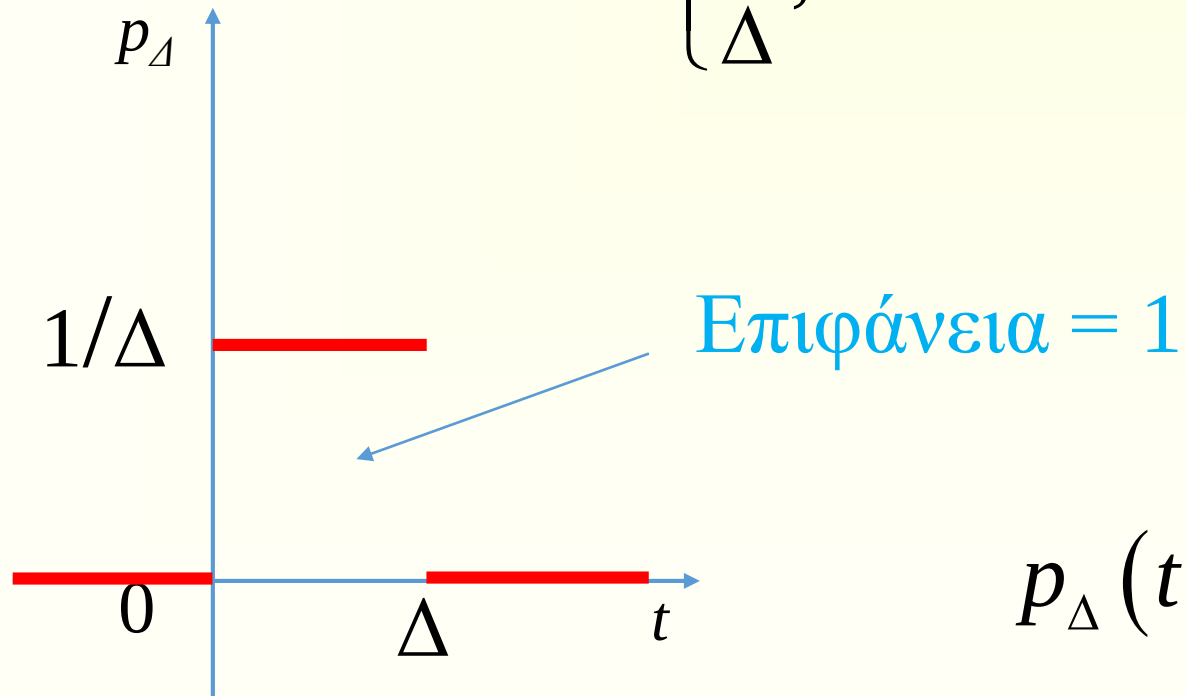


Με μια αλλαγή μεταβλητής $z = t - t_0 \Rightarrow u(z) = u(t - t_0)$

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 4: Η ΠΑΛΜΙΚΗ

- Η **παλμική** κυματομορφή (pulse)

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t > \Delta \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \end{cases}$$



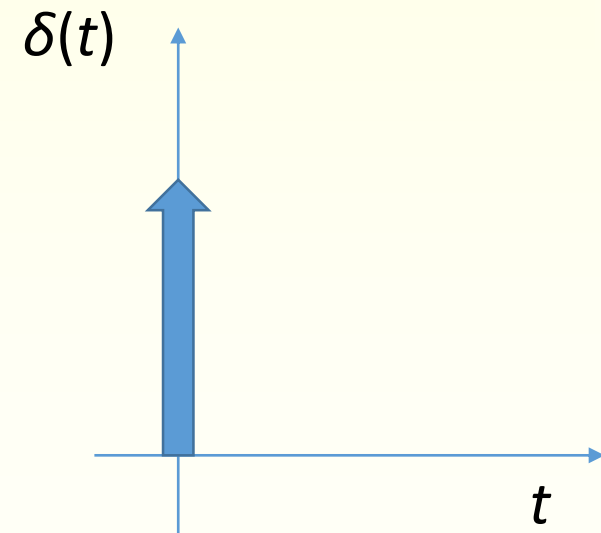
$$p_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} [u(t) - u(t - \Delta)] \quad \forall t$$

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 5: Η ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ

- Γνωστή σαν **μοναδιαία κρουστική** ή **ώση** (impulse) ή με το μαθηματικό της όνομα **δέλτα τού Dirac**
- Η κρουστική δεν είναι συνάρτηση με την συνήθη μαθηματική έννοια
- Ανήκει στην κατηγορία των **γενικευμένων συναρτήσεων** και μπορεί να θεωρηθεί σαν όριο του παλμού ή άλλων προσεγγίσεων

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \text{ιδιάζουσα } (\infty), & t = 0 \end{cases}$$

$$\forall \xi > 0, \int_{-\xi}^{+\xi} \delta(t) dt = 1$$



- Άπειρο πλάτος, στιγμιαία διάρκεια και επιφάνεια ίση με τη μονάδα!

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 5: Η ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ

- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\xi}^{+\xi} \delta(t) f(t) dt &= \int_{-\xi}^{+\xi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_{\varepsilon}(t) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\xi}^{+\xi} p_{\varepsilon}(t) f(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon) \varepsilon = f(0) \end{aligned}$$

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 5: Η ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ

- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$\delta(x) = 0 \quad \alpha\nu \quad x \neq 0$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x + a) + \delta(x - a)]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta[g(x)] f(x) dx = \frac{1}{g'(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[g(x)] f(x) dg(x)$$

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{g'(x_i)}, \quad x_i: \text{ρίζες του } g(x)$$

ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 5: Η ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ

- **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

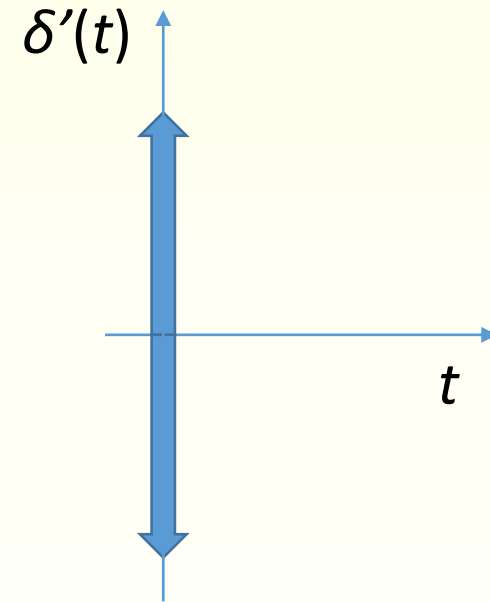
- Έχει ολοκλήρωμα:

$$\int_{-a}^{+a} \delta(x) dx = u(x)$$

$$\int \delta(x) dx = \mathcal{G}(x)$$

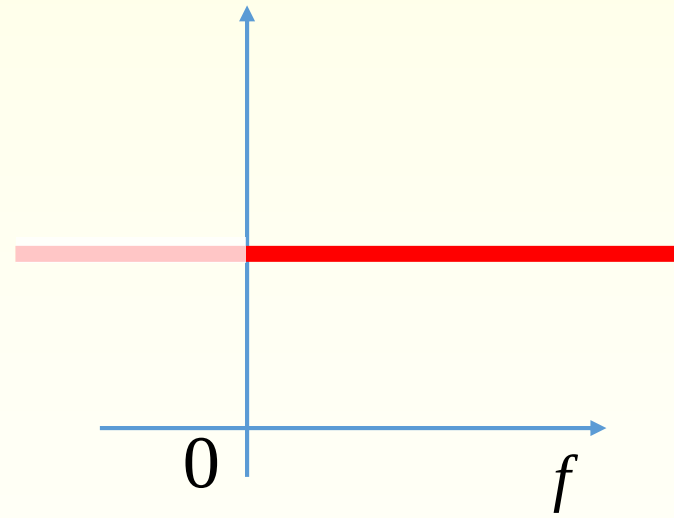
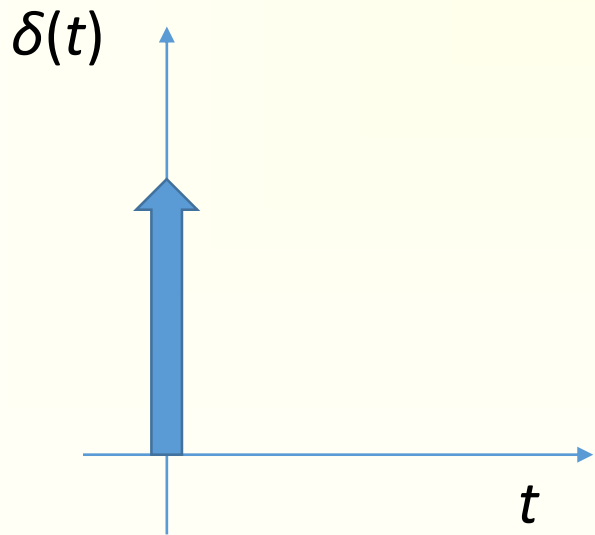
$$\mathcal{G}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

- Έχει και παράγωγο!



ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 5: Η ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ

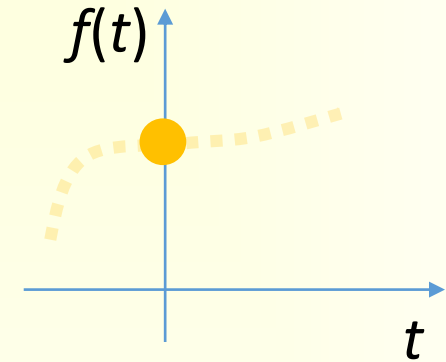
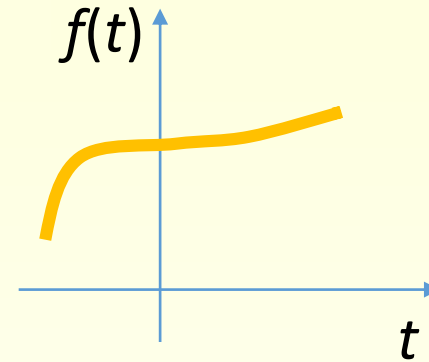
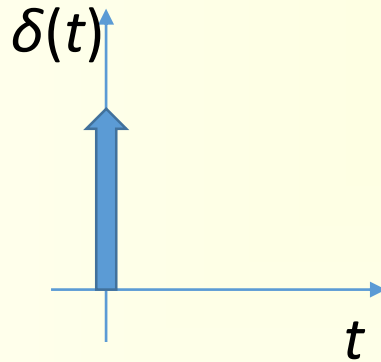
- Η θεωρητική αξία τής κρουστικής:
- Περιέχει όλες τις συχνότητες!
- Αν εμφανιστεί σαν είσοδος, διεγείρει το κύκλωμα (σύστημα) με κάθε δυνατό τρόπο



ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 5: Η ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ

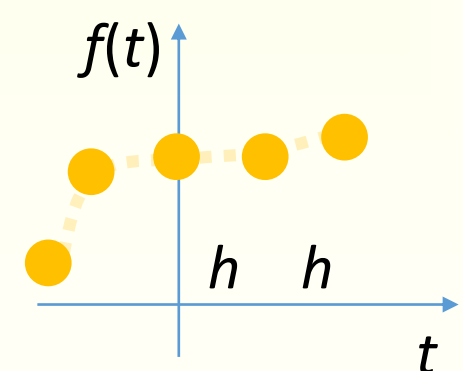
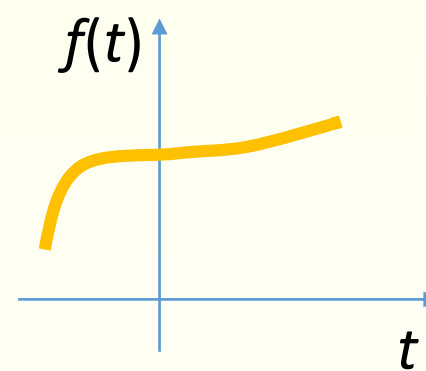
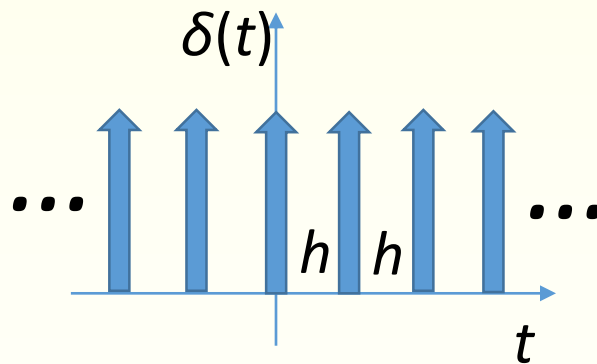
- Η κρουστική είναι το θεωρητικό θεμέλιο της ψηφιακής εποχής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$



- «Φωτογραφία» τής $f(t)$ στο $t = 0$

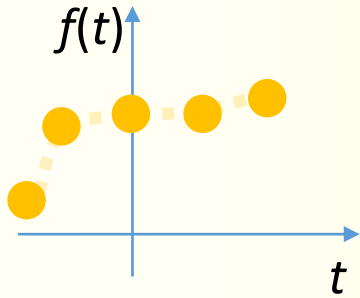
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kh)$$



- ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ (sampling)

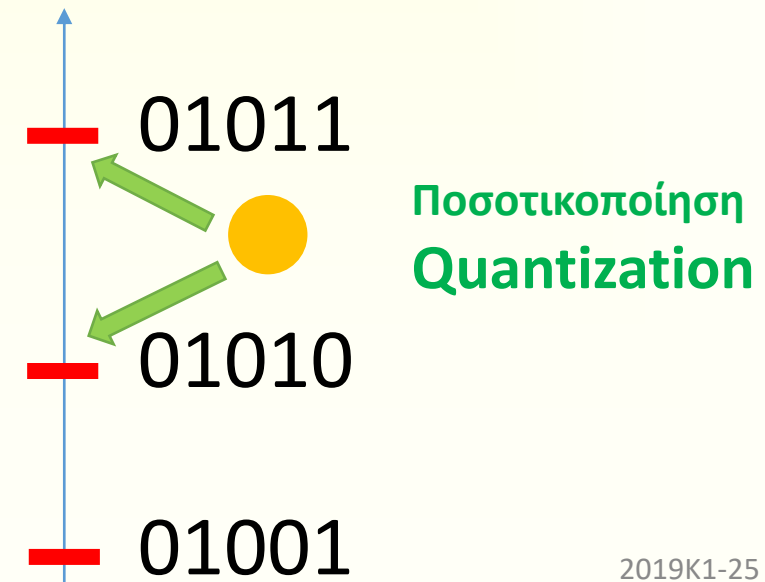
ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ 5: Η ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ

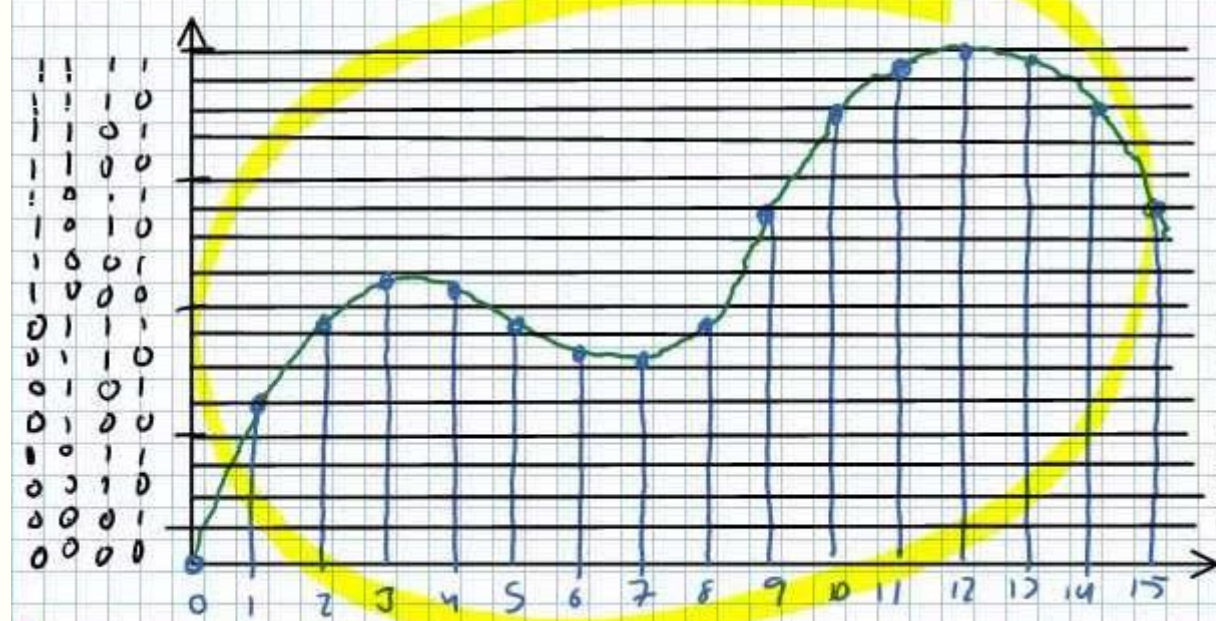
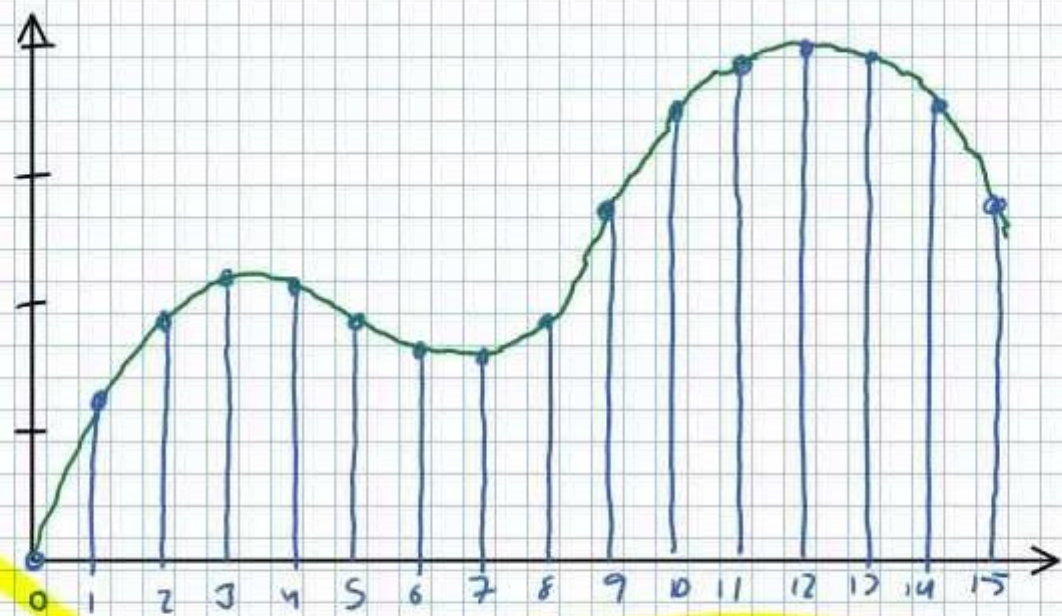
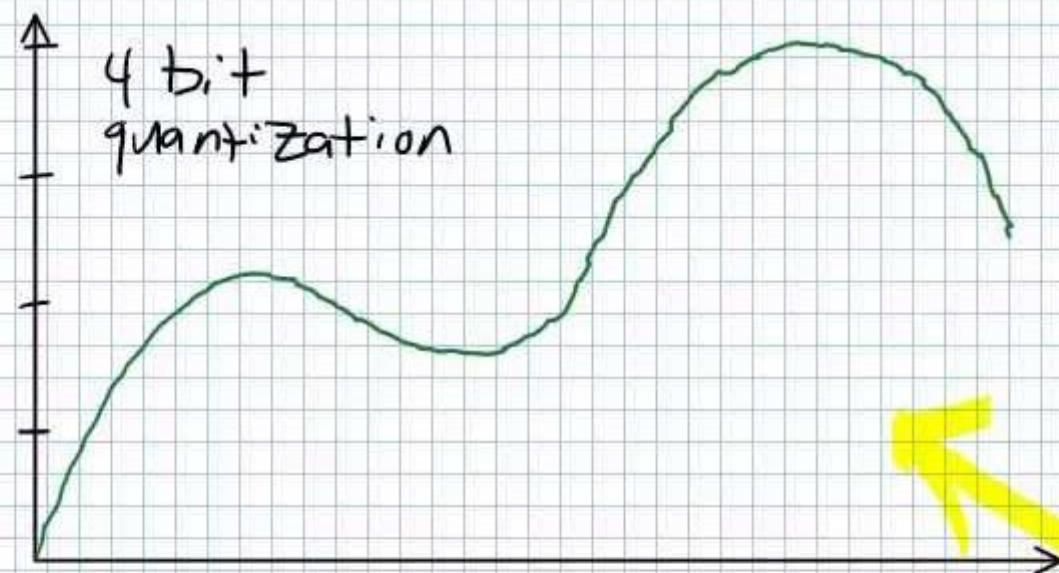
- Μετατροπή αναλογικού σε ψηφιακό (ADC-analog to digital converter)



$$f(kh) \in \mathbb{R} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

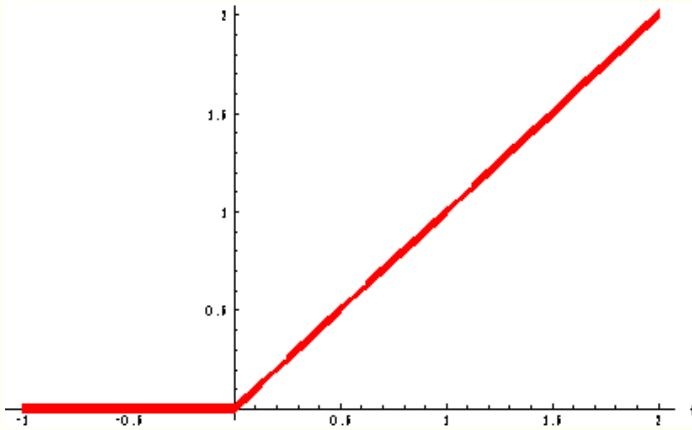
- Το ψηφιακό σήμα έχει περιορισμένες δυνατότητες αναπαράστασης...
- ...που καθορίζονται από τις **διαθέσιμες στάθμες = αριθμός bits**
- Π.χ. 5 bits αντιστοιχούν σε $2^5 = 32$ στάθμες
- **⇒ ΣΦΑΛΜΑ...**
- ...που περιορίζεται αυξάνοντας τα bits
- Αλλά τα πολλά bits έχουν συνέπειες...



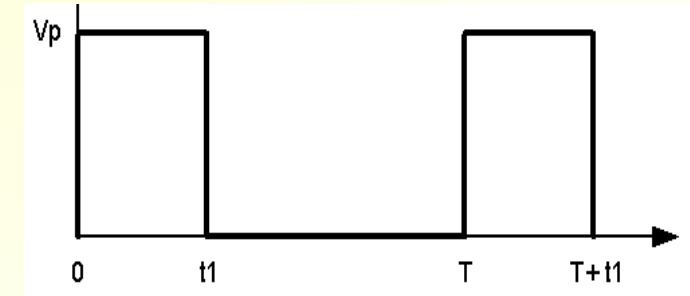
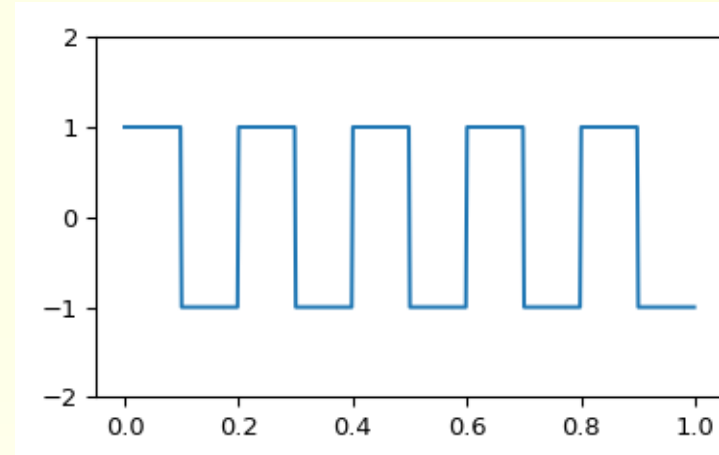


ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΕΣ 6, 7, ...

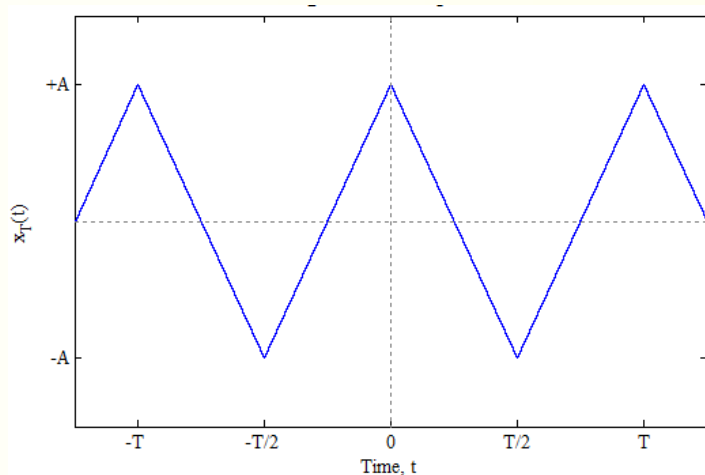
ΡΑΜΠΑ



ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ



ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ



ΠΡΙΟΝΩΤΗ

