

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΠΛΑΝΟ

ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΚΟΥΤΙ



1. Το περιεχόμενο του μαύρου κουτιού
(απλά ηλεκτρικά στοιχεία)



2. Είσοδος: σήματα (κυματομορφές) διέγερσης

3. Έξοδος: απόκριση



i. Κυκλώματα με πηγές και αντιστάσεις ΜΟΝΟ

ii. Κυκλώματα με στοιχεία που αποθηκεύουν ενέργεια

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΕΙΣΟΔΟ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

- Το ημιτονοειδές είναι η πιο απλή ταλάντωση και ταυτόχρονα αποτελεί «δομικό στοιχείο» καθώς ένα σταθμισμένο άθροισμα ημιτονοειδών μπορεί να περιγράψει σχεδόν οποιοδήποτε σήμα
- Συνεπώς, αν γνωρίζουμε **σε γενική μορφή** (δηλ. σαν συνάρτηση της συχνότητας ω) την απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου κυκλώματος στο ημιτονοειδές σήμα (για παράδειγμα, έχουμε δει την απόκριση του παράλληλου RC σε ημιτονοειδή), τότε μπορούμε να συνθέσουμε την απόκρισή του σε οποιοδήποτε γενικό σήμα
- Αυτό όμως πρέπει να γίνει με αποτελεσματικό και κυρίως υπολογιστικά απλό τρόπο

$$A_2 = \frac{A_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + C^2 \omega^2}} \quad \varphi_2 = \varphi_1 - \tan^{-1}(RC\omega)$$
$$v(t) = -A_2 \cos \varphi_2 e^{-\frac{t}{RC}} + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad t \geq 0$$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

- Η κεντρική ιδέα για την απλούστευση είναι η χρήση των δυο από τις τρεις παραμέτρους τής ημιτονοειδούς, δηλαδή:
- Μια ισοδύναμη αναπαράσταση της ημιτονοειδούς με ένα μιγαδικό αριθμό
- Η εισαγωγή αυτής της αναπαράστασης και η «μετάφρασή» της στο πλαίσιο των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, θα μάς φέρει πίσω στην περίπτωση των απλών κυκλωμάτων με πηγές και αντιστάσεις που τώρα όμως είναι μιγαδικές
- Με την τεχνική αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση οποιουδήποτε κυκλώματος αλλά μόνο όταν:
 - Όλες οι διεγέρσεις είναι ημιτονοειδείς
 - Ενδιαφερόμαστε ΜΟΝΟ για τη μόνιμη κατάσταση
- Αυτό ονομάζεται για συντομία **Μόνιμη Ημιτονοειδής Κατάσταση (ΜΗΚ)**

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

- Οι μιγαδικοί αριθμοί προκύπτουν από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας για αρνητικό όρισμα:

$$\sqrt{-9} = \pm j3 \Leftrightarrow j^2 = -1 \quad \left[\sqrt{-9} = \sqrt{j^2 9} = \pm j3 \text{ και } (j3)(j3) = (-j3)(-j3) = -9 \right]$$

- Χρησιμοποιούμε για τη **φανταστική μονάδα** το γράμμα j ενώ οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν το i
- Ένας μιγαδικός αριθμός (complex number) ορίζεται σαν το άθροισμα ενός πραγματικού αριθμού (real number) και ενός φανταστικού αριθμού (imaginary number):

$$z = a + jb \quad a = \operatorname{Re}\{z\}, \quad b = \operatorname{Im}\{z\} \quad b: \text{φανταστικό μέρος (part) του } z$$

- Ο **συζυγής** (conjugate) ενός μιγαδικού αριθμού ορίζεται σαν

$$z^* = a - jb$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

- Η αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού στη μορφή $z = a + jb$ υλοποιείται στο «μιγαδικό επίπεδο» σε Καρτεσιανές ορθογώνιες συντεταγμένες a και b
- Ο ίδιος αριθμός z μπορεί να αναπαρασταθεί και με πολικές συντεταγμένες:

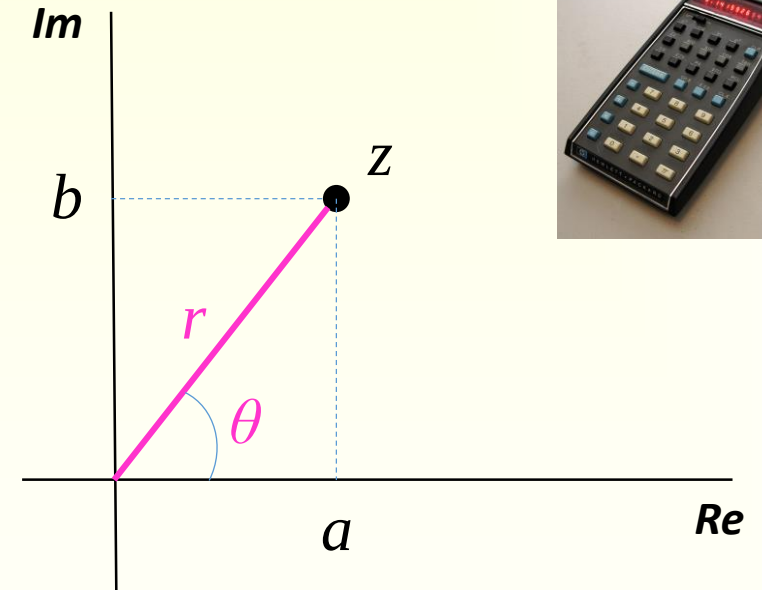
$$z = re^{j\vartheta} \triangleq r \angle \vartheta$$

$$z^* = re^{-j\vartheta} \triangleq r \angle -\vartheta$$

- Η σχέση ανάμεσα στις δυο αναπαραστάσεις είναι:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \vartheta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

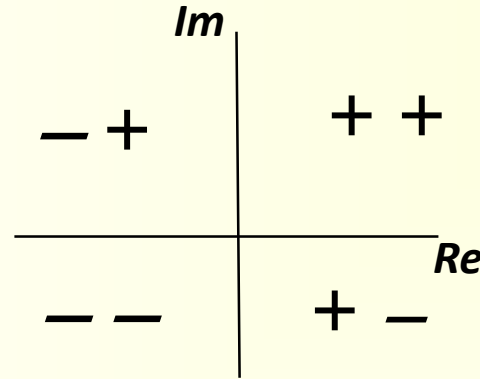
$$a = r \cos \vartheta \quad b = r \sin \vartheta$$



• z^*

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

- Για τον μονοσήμαντο καθορισμό τής γωνίας θ πρέπει να ελέγξουμε τα πρόσημα των (a,b) :



- **ΠΡΑΞΕΙΣ:** όπως και με τους πραγματικούς λαμβάνοντας υπ' όψη το $j^2 = -1$

$$z_1 = a_1 + jb_1 = r_1 e^{j\vartheta_1} \quad z_2 = a_2 + jb_2 = r_2 e^{j\vartheta_2}$$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = r_1 \cdot r_2 e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2}$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

- Κεντρικό ρόλο στους μιγαδικούς αριθμούς και στις εφαρμογές τους παίζει ο **τύπος του Euler** (ένας από τους πολλούς):

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi$$

- Η «διάσημη» έκδοση: $1 + e^{j\pi} = 0$
- Η «συσκότιση»: $-\frac{1}{2} j e^{-jx} (e^{jx} + 1)(e^{jx} - 1) = \sin x$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

- **ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:** Το αλγεβρικό άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού ημιτονοειδών τής ίδιας γωνιακής συχνότητας ω και οποιουδήποτε αριθμού των παραγώγων τους οποιασδήποτε τάξης, είναι επίσης ημιτονοειδής τής ίδιας γωνιακής συχνότητας ω
- (ΑΠΟΔΕΙΞΗ)
- Η απόδειξη είναι απλή αν λάβει κανείς υπ' όψη του τρία ενδιάμεσα αποτελέσματα (λήμματα) που είναι πολύ σημαντικά για τη συνέχεια
- **ΛΗΜΜΑ 1:** Η συνάρτηση «**πραγματικό μέρος**» (**Re**) είναι γραμμική
- **ΛΗΜΜΑ 2:** Η συνάρτηση «πραγματικό μέρος» μπορεί να αντιμετωπιστεί με την παραγωγήιση
$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re} [Ae^{j\omega t}] = \operatorname{Re} \left[\frac{d}{dt} Ae^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} [j\omega Ae^{j\omega t}]$$
- **ΛΗΜΜΑ 3:**
$$A, B \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Re} [Ae^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [Be^{j\omega t}], \quad \forall t \Leftrightarrow A = B$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:**

$$\begin{aligned}f(t) &= 2 \cos(2t + 60^\circ) - 4 \sin(2t) + \frac{d}{dt} 2 \sin(2t) \\&= 2 \cos 2t \cos 60^\circ - 2 \sin 2t \sin 60^\circ - 4 \sin(2t) + 4 \cos(2t) \\&= \cos 2t - \sqrt{3} \sin 2t - 4 \sin(2t) + 4 \cos(2t) \\&= 5 \cos 2t - (4 + \sqrt{3}) \sin 2t = \sqrt{5^2 + (4 + \sqrt{3})^2} \cos \left(2t + \tan^{-1} \frac{(4 + \sqrt{3})}{5} \right) \\&= 7,6 \cos(2t + 48,8^\circ)\end{aligned}$$

- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Μπορούμε να χειριστούμε τις ημιτονοειδείς (και τις παραγώγους τους) με αλγεβρικές μεθόδους
- Βασικές παράμετροι ημιτονοειδούς: {**Πλάτος, Φάση**, Γωνιακή Συχνότητα}

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

Ημιτονοειδής: {**Πλάτος**, **Φάση**, Γων. Συχνότητα}

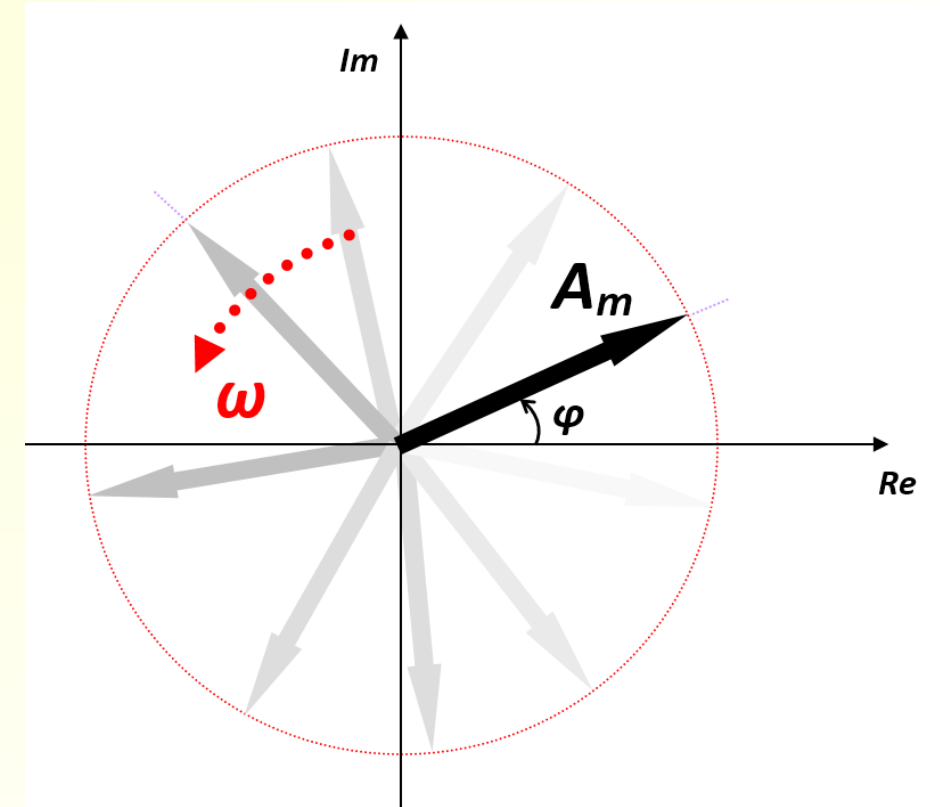
$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \operatorname{Re} \left[A_m \cos(\omega t + \varphi) + j A_m \sin(\omega t + \varphi) \right]$$

$$= \operatorname{Re} \left[A_m e^{j(\omega t + \varphi)} \right] \quad (\text{Euler})$$

$$= \operatorname{Re} \left[A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right]$$

$$= \operatorname{Re} \left[\mathbf{A} e^{j\omega t} \right]$$

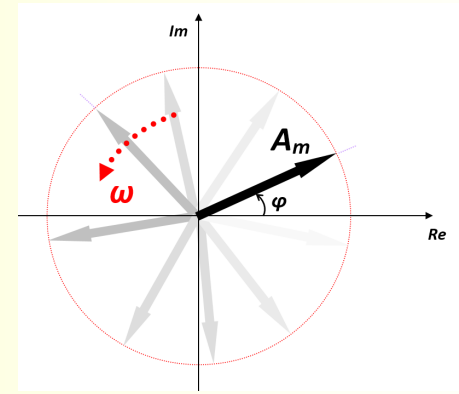


Διάνυσμα $\mathbf{A} = A_m e^{j\varphi}$

Περιστροφή " $\cos \omega t$ "

Στρεφόμενο διάνυσμα $\equiv$ «Φάσοντας» (Phasor)

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΦΑΣΟΡΕΣ



Παράδειγμα:

$$v(t) = 230 \cos\left(2\pi 50t + \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow \mathbf{A} = 230e^{j\frac{\pi}{3}}$$

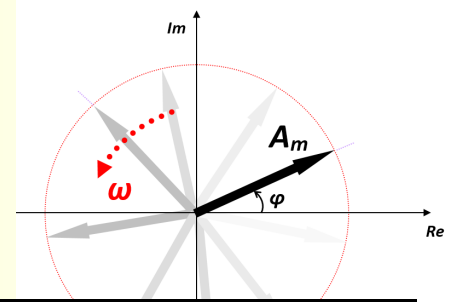
$$\Rightarrow v(t) = \text{Re}\left[\mathbf{A}e^{2\pi 50t}\right]$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

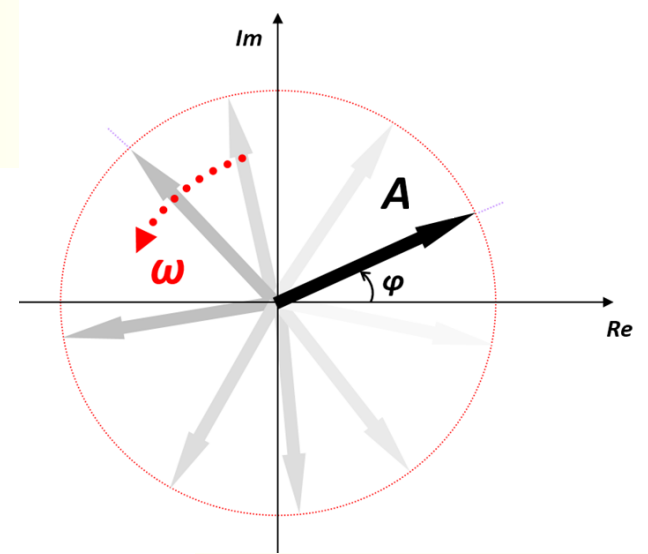
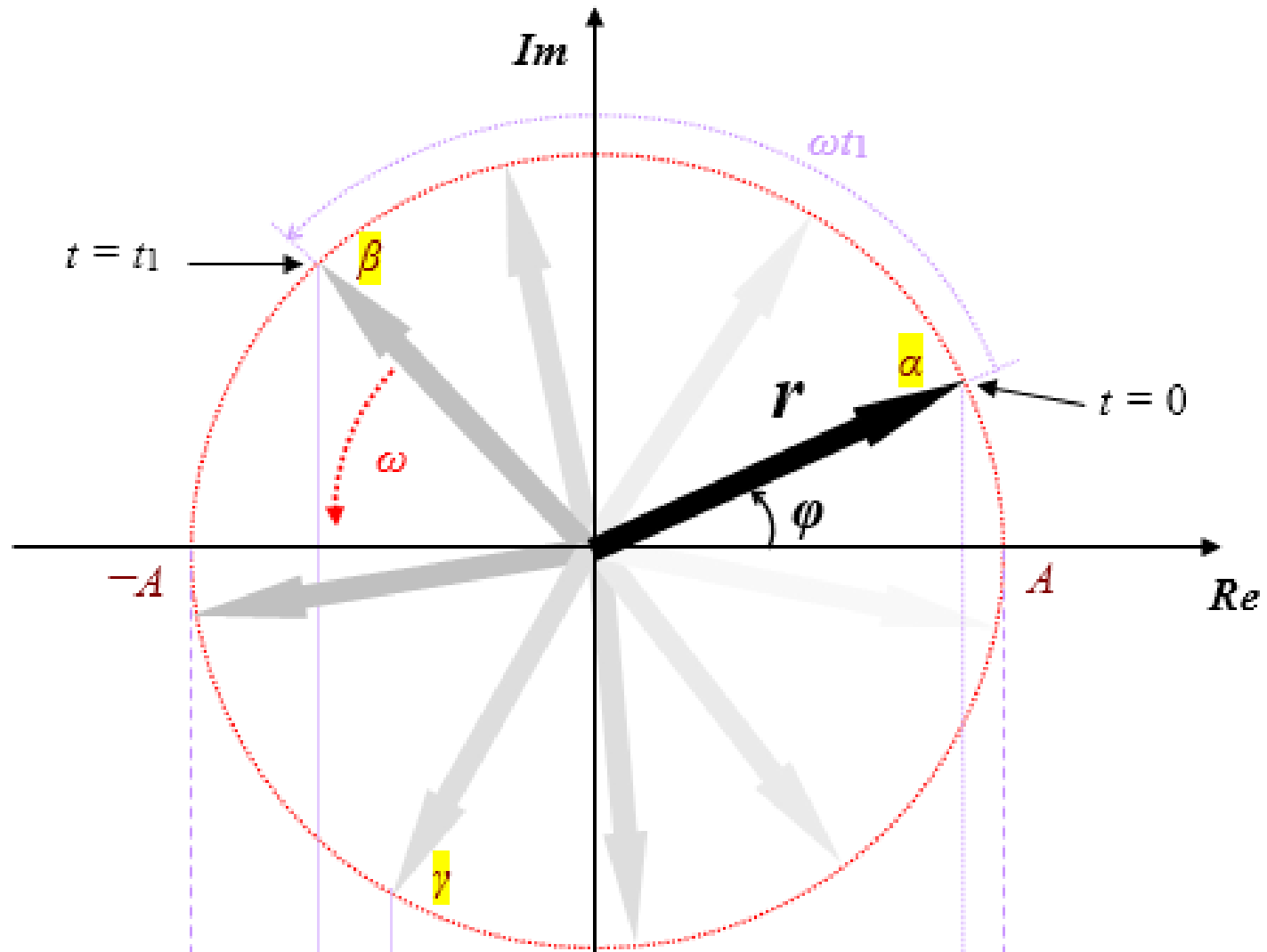
1. Ο φάσορας δεν περιέχει πληροφορία για τη συχνότητα
2. Μπορούμε να κάνουμε την ίδια ανάπτυξη χρησιμοποιώντας το ημίτονο σαν βάση

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το στροβοσκόπιο:

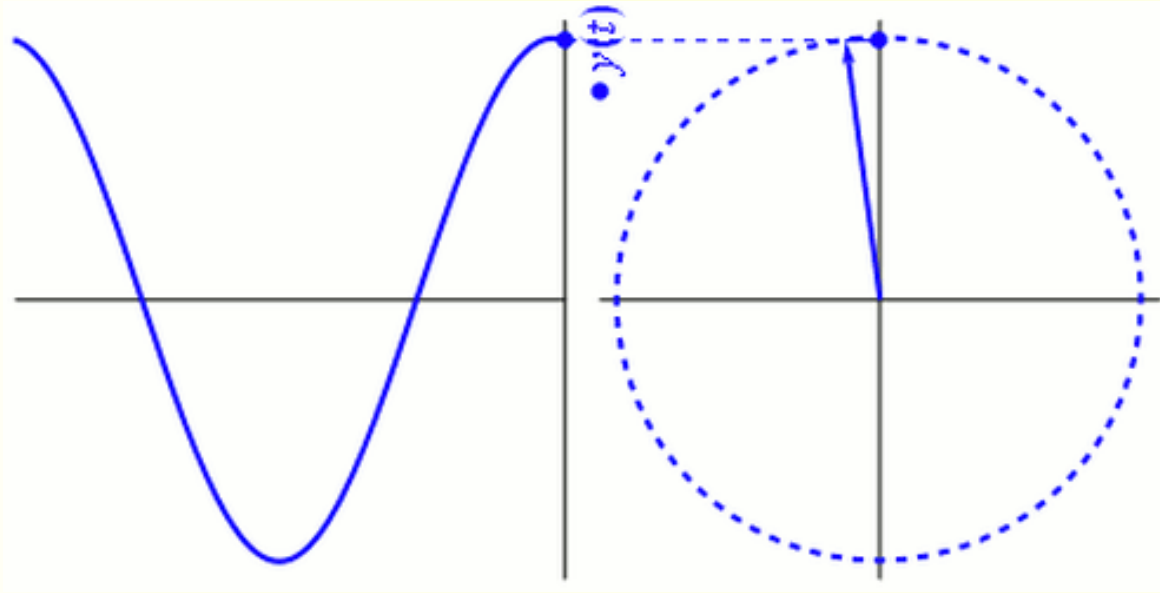


ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΦΑΣΟΡΕΣ

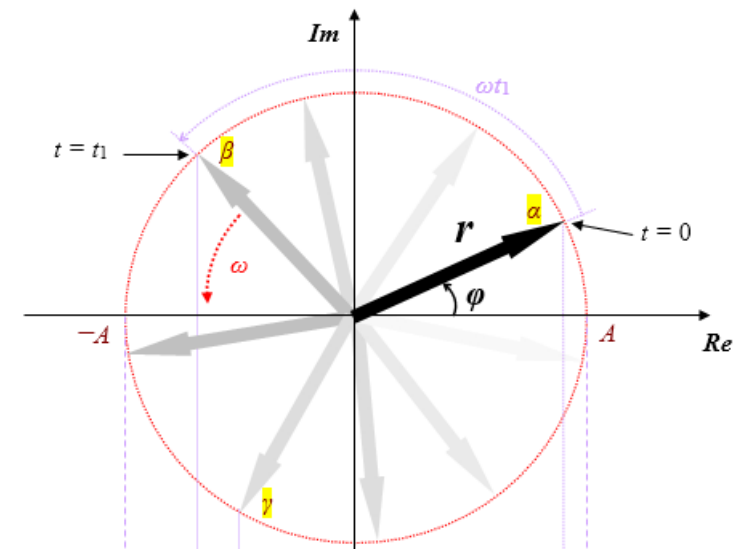
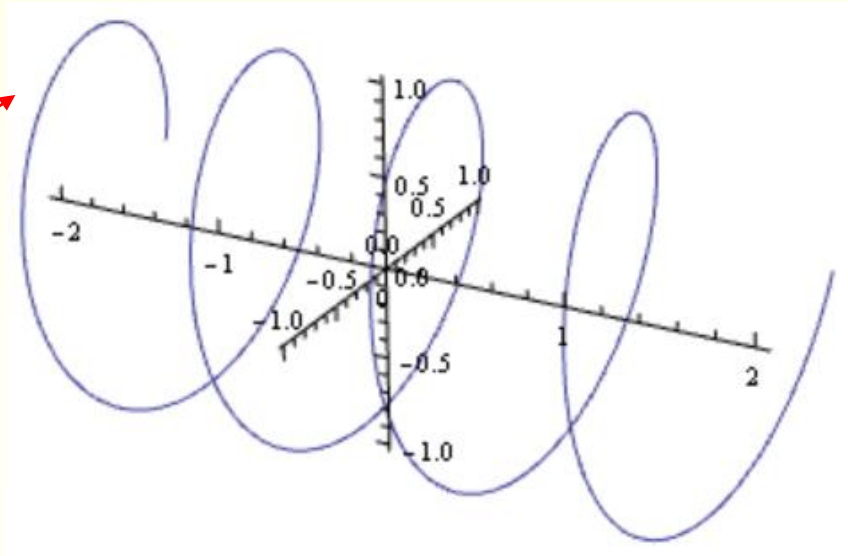


ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ (Παράμετροι ημιτονοειδούς: πλάτος r , φάση ϕ)

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΦΑΣΟΡΕΣ

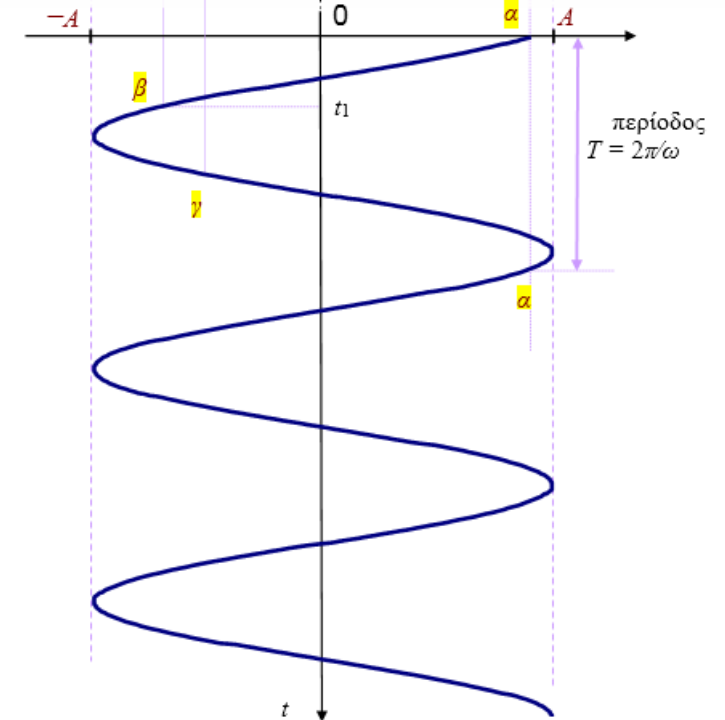


Μιγαδικό
επίπεδο



ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ (Παράμετροι ημιτονοειδούς: πλάτος r , φάση ϕ)

ΠΕΔΙΟ ΧΡΟΝΟΥ (Παράμετροι ημιτονοειδούς: πλάτος r , φάση ϕ , γωνιακή συχνότητα ω)



ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΦΑΣΟΡΕΣ

- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Μπορούμε να χειριστούμε τις ημιτονοειδείς (και τις παραγώγους τους) με αλγεβρικές μεθόδους **ΚΑΙ** αν επικεντρωθούμε στο **Πλάτος και τη Φάση** τους μπορούμε να τις χειριστούμε σαν (στρεφόμενα) διανύσματα-Φάσορες στον μιγαδικό χώρο

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \longleftrightarrow \quad x(t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{A} e^{j\omega t} \right], \quad \mathbf{A} = A_m e^{j\varphi}$$

- **Πώς θα φανούν χρήσιμοι οι φάσορες;**

ΦΑΣΟΡΕΣ

- Πώς θα φανούν χρήσιμοι οι φάσορες;
 1. Πρέπει να μας παρέχουν εύκολα τη μερική λύση τής διαφορικής εξίσωσης του κυκλώματος (αφού ενδιαφερόμαστε μόνο για τη μόνιμη κατάσταση, μόνο η μερική λύση έχει σημασία)
 2. Πρέπει να οδηγούν σε αποτελεσματική αναπαράσταση των ηλεκτρικών μεγεθών στη ΜΗΚ ώστε η ανάλυση να γίνεται πιο εύκολη
- (1): θα το αποδείξουμε αμέσως μετά
- (2): η χρήση φασόρων μετατρέπει τα κυκλώματα σε ΜΗΚ σε κυκλώματα με «αντιστάσεις» μόνο, κάνοντάς τα έτσι πολύ απλά (αλγεβρική επίλυση)



Οι αντιστάσεις απλά
θα είναι μιγαδικά Ω

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Η μερική λύση τής γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = A_m \cos(\omega t + \varphi),$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n, A_m, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$$

θα έχει ίδια μορφή με τη διέγερση και θα είναι $x(t) = X_m \cos(\omega t + \psi)$

- Δεδομένου ότι εμπλέκονται ημιτονοειδείς, περνάμε σε φασορική μορφή

$$\mathbf{A} = A_m e^{j\varphi}, \quad \mathbf{X} = X_m e^{j\psi}$$

- Και αντικαθιστούμε:

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} \operatorname{Re}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \operatorname{Re}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\} + a_n \operatorname{Re}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{A}e^{j\omega t}\}$$

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Με χρήση των λημμάτων που παρατέθηκαν, χειριζόμαστε αλγεβρικά τη διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε (λεπτομέρειες εδώ: http://sml.ece.upatras.gr/images/UploadedFiles/ilektrika-kyklomata_i/FasoresODE.pdf)

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{A}}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n}$$

όπου

$$X_m = \frac{A_m}{\sqrt{\left(a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots\right)^2 + \left(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots\right)^2}}$$

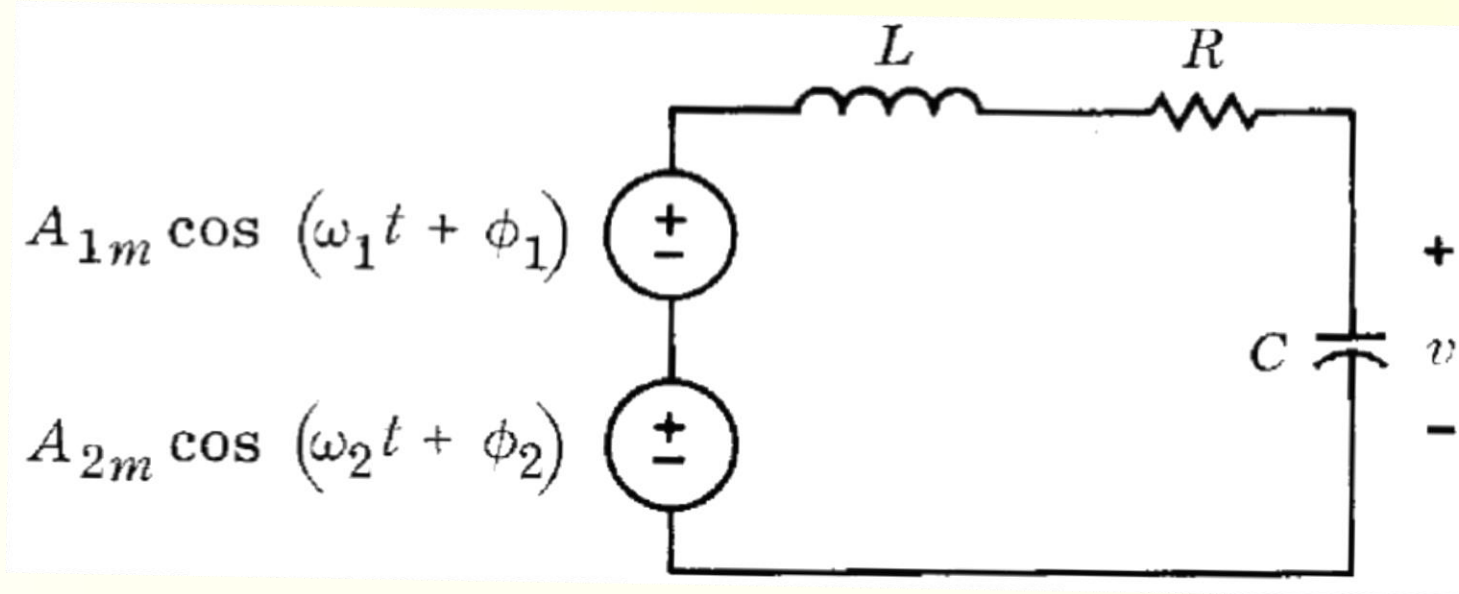
- και

$$\psi = \varphi - \tan^{-1} \left(\frac{a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots}{a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots} \right)$$

Η ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Η ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΣΤΗ ΜΗΚ

- Ένα ιδιαίτερα σημαντικό θέμα (και συχνή **πηγή λαθών**) είναι η επαλληλία στη ΜΗΚ
- Ας εξετάσουμε ένα RLC με δυο πηγές **διαφορετικών** συχνοτήτων ω_1 και ω_2



- Η διαφορική εξίσωση για την τάση v θα είναι:

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{2m} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Η ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΣΤΗ ΜΗΚ

- Θεωρούμε τη μερική λύση v_p για τη διαφορική που λόγω επαλληλίας θα είναι:

$$v_p = v_{p1} + v_{p2}$$

με ορισμούς

$$LC \frac{d^2 v_{p1}}{dt^2} + RC \frac{dv_{p1}}{dt} + v_{p1} = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$LC \frac{d^2 v_{p2}}{dt^2} + RC \frac{dv_{p2}}{dt} + v_{p2} = A_{2m} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

- Οι μερικές λύσεις v_{p1} και v_{p2} μπορούν να υπολογιστούν με τη μέθοδο των φασόρων
- Προσθέτοντας:

$$\begin{aligned} LC \frac{d^2}{dt^2} (v_{p1} + v_{p2}) + RC \frac{d}{dt} (v_{p1} + v_{p2}) + (v_{p1} + v_{p2}) \\ = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{2m} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

- Συμπεραίνουμε ότι η $v_p = v_{p1} + v_{p2}$ είναι πράγματι μια μερική λύση

Η ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΣΤΗ ΜΗΚ

- Με τη μέθοδο των φασόρων βρίσκουμε ότι τελικά η μόνιμη κατάσταση είναι:

$$v_p(t) = V_{1m} \cos(\omega_1 t + \phi_1 + \theta_1) + V_{2m} \cos(\omega_2 t + \phi_2 + \theta_2)$$

όπου

$$V_{1m} e^{j(\theta_1 + \phi_1)} \triangleq \frac{A_{1m} e^{j\phi_1}}{1 - \omega_1^2 LC + j\omega_1 RC}$$

$$V_{2m} e^{j(\theta_2 + \phi_2)} \triangleq \frac{A_{2m} e^{j\phi_2}}{1 - \omega_2^2 LC + j\omega_2 RC}$$

- Η κυματομορφή v_p ονομάζεται **μόνιμη κατάσταση** και όχι μόνιμη ημιτονοειδής κατάσταση επειδή η μορφή της δεν είναι πια ημιτονοειδής
- Το αποτέλεσμα αυτό αποδείχθηκε για το RLC όμως μπορεί να αποδειχθεί και για κυκλώματα οποιασδήποτε τάξης ΚΑΙ για οποιοδήποτε αριθμό ημιτονοειδών εισόδων

Η ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΣΤΗ ΜΗΚ

- ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

1. Για πολλαπλές ημιτονοειδείς εισόδους μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση του κυκλώματος σε κάθε μία ημιτονοειδή είσοδο χωριστά και μετά με την αρχή τής επαλληλίας να συνθέσουμε την τελική συνολική απόκριση **στο πεδίο τού χρόνου**
2. Πρόσθεση φασόρων που στρέφονται με διαφορετικές συχνότητες **ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΚΑΝΕΝΑ ΝΟΗΜΑ!**

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Μέχρι τώρα είδαμε ότι
 1. Η (ημιτονοειδής) είσοδος στη ΜΗΚ μπορεί να αναπαρασταθεί με φάσορα
 2. Η (επίσης ημιτονοειδής) απόκριση στη ΜΗΚ μπορεί να αναπαρασταθεί με φάσορα
 3. Ο υπολογισμός τής απόκρισης, δηλ. της μερικής λύσης τής διαφορικής εξίσωσης γίνεται με φάσορα
- Μπαίνει τώρα το θέμα, κατά πόσο μπορούμε να αποφύγουμε τελείως τη χρήση μιας διαφορικής εξίσωσης (και διαφορικού λογισμού, γενικότερα) για τον υπολογισμό τής ΜΗΚ
- Η απάντηση είναι ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε φάσορες για να αναπαραστήσουμε όχι μόνο την είσοδο και την έξοδο αλλά και όλες τις μεταβλητές τού κυκλώματος

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Για να μπορέσουμε να αναπαραστήσουμε όλες τις μεταβλητές τού κυκλώματος, μπορούμε να ξεκινήσουμε από τα απλά στοιχεία
- Θεωρούμε λοιπόν ένα κύκλωμα που βρίσκεται σε ΜΗΚ και επικεντρωνόμαστε σε ένα κλάδο του
- Ο κλάδος αυτός θα έχει ένα μόνο απλό στοιχείο και επειδή το κύκλωμα είναι σε ΜΗΚ, και η τάση του και το ρεύμα του θα έχουν ημιτονοειδή μορφή:

$$v(t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{V}e^{j\omega t}\right] = |\mathbf{V}|\cos(\omega t + \angle\mathbf{V})$$

$$i(t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{I}e^{j\omega t}\right] = |\mathbf{I}|\cos(\omega t + \angle\mathbf{I})$$

- Θα προσδιορίσουμε τώρα τη σχέση τάσης και ρεύματος για κάθε απλό στοιχείο

Ο ΦΑΣΟΡΑΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ

- Ξεκινώντας από τη βασική σχέση

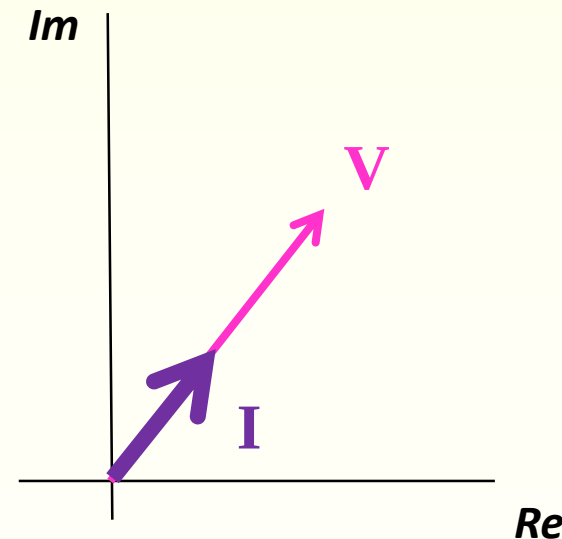
$$v(t) = R i(t) \Rightarrow V_m \cos(\omega t + \varphi) = R I_m \cos(\omega t + \vartheta)$$

$$\operatorname{Re}\left[V_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right] = R \operatorname{Re}\left[I_m e^{j\vartheta} e^{j\omega t}\right] \quad (\text{Λήμμα 1}) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left[V_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[R I_m e^{j\vartheta} e^{j\omega t}\right] \quad (\text{Λήμμα 3}) \left. \begin{aligned} V_m e^{j\varphi} &= R I_m e^{j\vartheta} \\ \varphi &= \vartheta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{V} = R \mathbf{I}$$

- Συμπεραίνουμε ότι για την αντίσταση, οι φάσορες τάσης και ρεύματος είναι **συμφασικοί («σε φάση»)**



Ο ΦΑΣΟΡΑΣ ΤΟΥ ΠΥΚΝΩΤΗ

- Ξεκινώντας από τη βασική σχέση

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = C \frac{dV_m \cos(\omega t + \varphi)}{dt} = -CV_m \omega \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$I_m \cos(\omega t + \vartheta) = CV_m \omega \cos(\omega t + \varphi + 90^\circ) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left[I_m e^{j\vartheta} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[CV_m \omega e^{j\varphi} e^{j90^\circ} e^{j\omega t}\right] \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left[I_m e^{j\vartheta} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[CV_m \omega e^{j\varphi} (j) e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[j\omega C V_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right] \stackrel{(\text{Λήμμα 1})}{\Rightarrow}$$

$$\operatorname{Re}\left[I_m e^{j\vartheta} e^{j\omega t}\right] = j\omega C \operatorname{Re}\left[V_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right] \stackrel{(\text{Λήμμα 3})}{\Rightarrow}$$

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I}$$

Ο ΦΑΣΟΡΑΣ ΤΟΥ ΠΥΚΝΩΤΗ

- Συνεχίζοντας:

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \Rightarrow$$

$$I_m e^{j\vartheta} = j\omega C V_m e^{j\varphi}$$

$$= j\omega C V_m (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$= \omega C V_m (j \cos \varphi - \sin \varphi)$$

$$= \omega C V_m \left[j \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right] \Rightarrow$$

$$I_m e^{j\vartheta} = \omega C V_m e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \Rightarrow$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + \varphi \Rightarrow \angle \mathbf{I} = 90^\circ + \angle \mathbf{V}$$

Ο ΦΑΣΟΡΑΣ ΤΟΥ ΠΥΚΝΩΤΗ

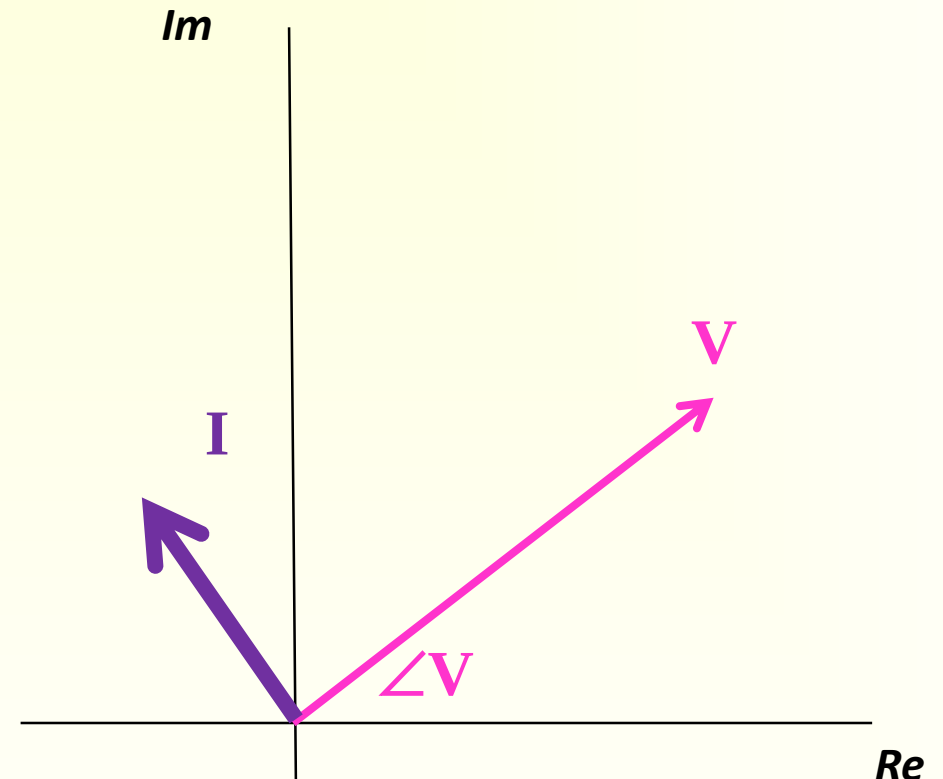
- Ανακεφαλαιώνοντας, για τον πυκνωτή:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I}$$

- που συνεπάγεται ότι:

$$\angle \mathbf{I} = 90^\circ + \angle \mathbf{V}$$

- Συμπεραίνουμε ότι για τον πυκνωτή, ο φάσορας του ρεύματος **προηγείται** του φάσορα της τάσης **κατά 90°**
- **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Η σχέση των φασόρων επηρεάζεται **και** από τη γων. συχνότητα ω



Ο ΦΑΣΟΡΑΣ ΤΟΥ ΕΠΑΓΩΓΟΥ

- Ξεκινώντας από τη βασική σχέση

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{dI_m \cos(\omega t + \varphi)}{dt} = -LI_m \omega \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$V_m \cos(\omega t + \vartheta) = -LI_m \omega \cos(\omega t + \varphi - 90^\circ) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left[V_m e^{j\vartheta} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[-LI_m \omega e^{j\varphi} e^{j(-90^\circ)} e^{j\omega t}\right] \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left[V_m e^{j\vartheta} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[-LI_m \omega e^{j\varphi} (-j) e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[j\omega L I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right] \stackrel{(\text{Λήμμα 1})}{\Rightarrow}$$

$$\operatorname{Re}\left[V_m e^{j\vartheta} e^{j\omega t}\right] = j\omega L \operatorname{Re}\left[I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right] \stackrel{(\text{Λήμμα 3})}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}} \Rightarrow \mathbf{I} = \frac{1}{j\omega L} \mathbf{V}$$

Ο ΦΑΣΟΡΑΣ ΤΟΥ ΕΠΑΓΩΓΟΥ

- Συνεχίζοντας:

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \Rightarrow$$

$$V_m e^{j\vartheta} = j\omega L I_m e^{j\varphi}$$

$$= j\omega L I_m (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$= \omega L I_m (j \cos \varphi - \sin \varphi)$$

$$= \omega L I_m \left[j \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right] \Rightarrow$$

$$V_m e^{j\vartheta} = \omega L I_m e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \Rightarrow$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + \varphi \Rightarrow \angle \mathbf{V} = 90^\circ + \angle \mathbf{I}$$

Ο ΦΑΣΟΡΑΣ ΤΟΥ ΕΠΑΓΩΓΟΥ

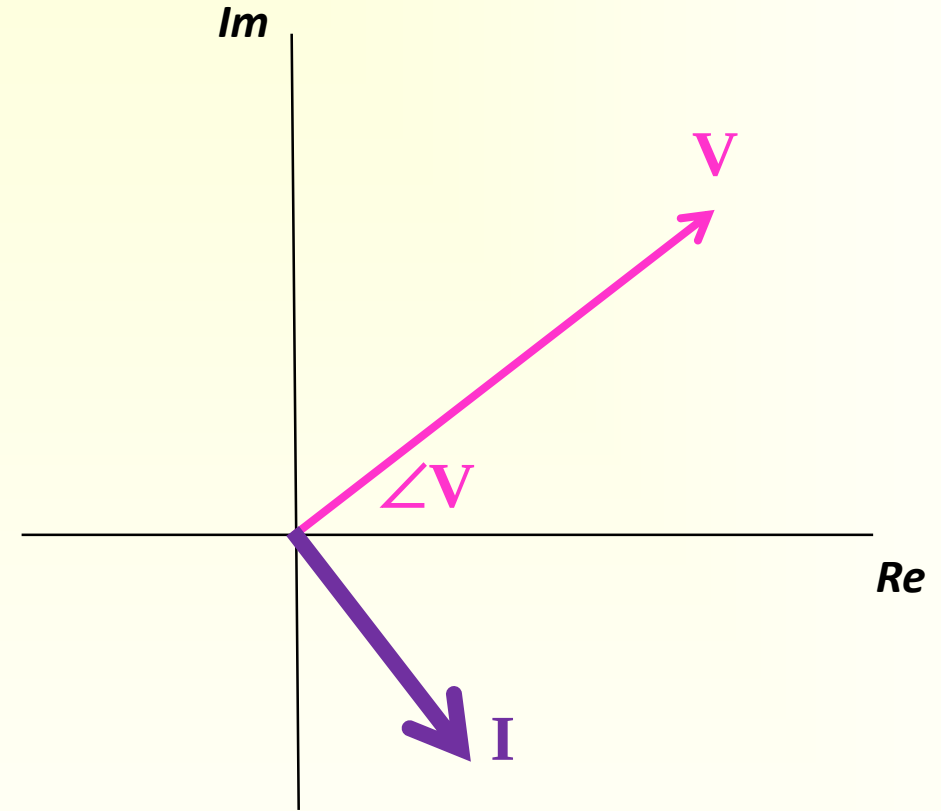
- Ανακεφαλαιώνοντας, για τον επαγωγό:

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}$$

- που συνεπάγεται ότι:

$$\angle \mathbf{V} = 90^\circ + \angle \mathbf{I}$$

- Συμπεραίνουμε ότι για τον επαγωγό, ο φάσορας της τάσης **προηγείται** του φάσορα του ρεύματος **κατά 90°** (ή ότι ο φάσορας του ρεύματος έπεται του φάσορα της τάσης κατά 90°)
- **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Η σχέση των φασόρων επηρεάζεται **και** από τη γων. συχνότητα ω



ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Για κάθε κύκλωμα που βρίσκεται σε ΜΗΚ είμαστε τώρα σε θέση να αναπαραστήσουμε τις (ημιτονοειδείς) εισόδους του, τις (ημιτονοειδείς) αποκρίσεις του και τη σχέση τάσης-ρεύματος για κάθε στοιχείο του με φάσορες

- Οι σχέσεις τάσης-ρεύματος που βρήκαμε είναι:

$$\mathbf{V} = R \mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I}$$

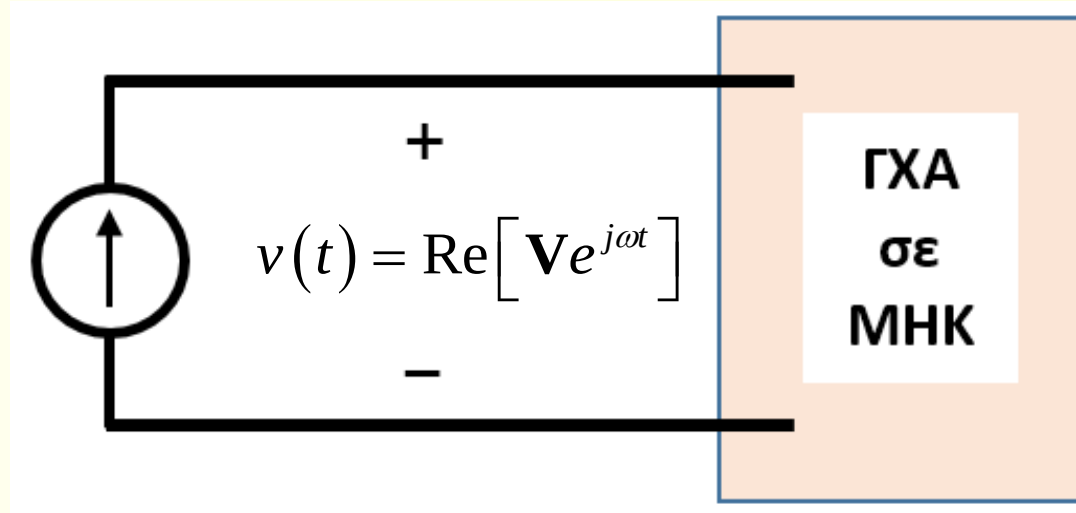
- Οι ποσότητες R , $j\omega L$ και $1/(j\omega C)$ συνδέουν τάση με ρεύμα και αναγκαστικά υπέχουν θέση «αντίστασης»
- Αυτή είναι μια νέα μορφή «αντίστασης» και από την ανάγκη να τη διακρίνουμε από την ωμική αντίσταση χρειαζόμαστε ένα νέο όνομα:
- Την ονομάζουμε λοιπόν «**Σύνθετη Αντίσταση**» ή «**Εμπέδηση**» (Impedance)
- Αντίστοιχα, μπορεί να οριστεί κι ένα νέο είδος «αγωγιμότητας» που το ονομάζουμε «**Σύνθετη Αγωγιμότητα**» ή «**Δεκτικότητα**» (Admittance):

$$\mathbf{I} = G \mathbf{V} \qquad \mathbf{I} = \frac{1}{j\omega L} \mathbf{V} \qquad \mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V}$$

ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΚΑΙ ΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- Η εμπέδηση και η δεκτικότητα δεν αφορούν μόνο απλά στοιχεία και μπορούν να γενικευτούν:

$$i_s(t) = \text{Re}[\mathbf{I}_s e^{j\omega t}]$$



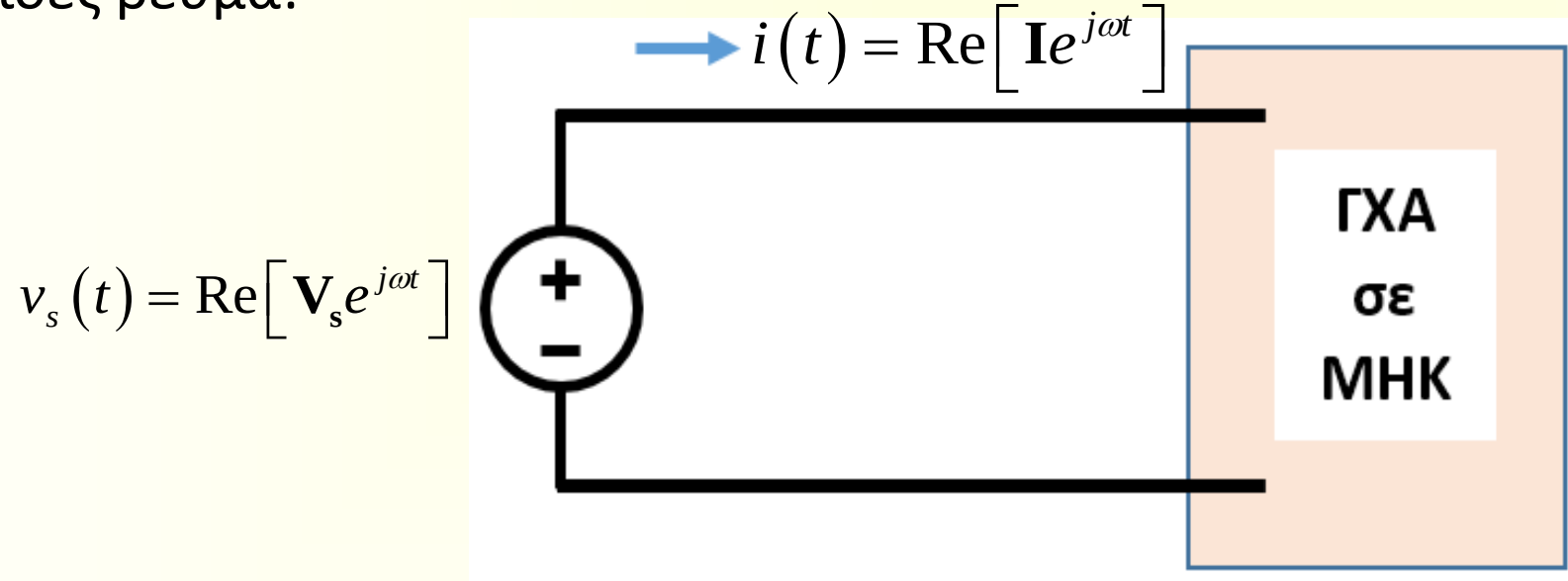
- Διεγείροντας ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα (μονόθυρο) που βρίσκεται στη μόνιμη κατάσταση με ένα ημιτονοειδές ρεύμα, θα πάρουμε σαν απόκριση μια ημιτονοειδή τάση
- Τότε, ορίζουμε την **Εμπέδηση Εισόδου** ή **Σύνθετη Αντίσταση Εισόδου** σαν τον λόγο της απόκρισης προς τη διέγερση, δηλαδή τον λόγο τού φάσσορα τάσης προς τον φάσσορα ρεύματος :

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_s}$$

$\mathbf{Z}$ είναι το συνηθισμένο σύμβολο για την εμπέδηση

ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΚΑΙ ΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- Δυναμικά, διεγείροντας ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα (μονόθυρο) που βρίσκεται στη μόνιμη κατάσταση με μια ημιτονοειδή τάση, θα πάρουμε σαν απόκριση ένα ημιτονοειδές ρεύμα:



- Τότε, ορίζουμε τη **Δεκτικότητα Εισόδου** ή **Σύνθετη Αγωγιμότητα Εισόδου** σαν τον λόγο της απόκρισης προς τη διέγερση, δηλαδή τον λόγο τού φάσσορα ρεύματος προς τον φάσσορα τάσης:

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}_s}$$

$\mathbf{Y}$ είναι το συνηθισμένο σύμβολο
για τη δεκτικότητα

ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΚΑΙ ΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η Εμπέδηση και η Δεκτικότητα μπορούν να οριστούν με παρόμοιο τρόπο για οποιοδήποτε σημείο (ή θύρα) τού κυκλώματος αρκεί να γνωρίζουμε την αντίστοιχη τάση και το αντίστοιχο ρεύμα
2. Προφανώς, οι σχέσεις που ορίστηκαν για γενικό κύκλωμα συμπεριλαμβάνουν και τους ορισμούς που δόθηκαν για τα απλά στοιχεία, οπότε π.χ. $Z_L = j\omega L$ που θα μετριέται σε μικαδικά Ω ή $Y_C = j\omega C$ που θα μετριέται σε μικαδικά S
3. Στο συγκεκριμένο σημείο ισχύει και η σχέση:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \frac{1}{\mathbf{Y}(j\omega)}$$

4. Και βέβαια οι σχέσεις που συνεπάγονται αυτόματα από την τελευταία

$$|\mathbf{Z}(j\omega)| = \frac{1}{|\mathbf{Y}(j\omega)|}, \quad \angle \mathbf{Z}(j\omega) = -\angle \mathbf{Y}(j\omega)$$

ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΚΑΙ ΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

5. Μπορούμε επίσης να συναγάγουμε και τις σχέσεις:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_s} \Rightarrow |\mathbf{Z}| = \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{I}_s|}, \quad \angle \mathbf{Z} = \angle \mathbf{V} - \angle \mathbf{I}_s$$

$$v(t) = |\mathbf{Z}(j\omega)| |\mathbf{I}_s| \cos(\omega t + \angle \mathbf{Z}(j\omega) + \angle \mathbf{I}_s)$$

6. και

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}_s} \Rightarrow |\mathbf{Y}| = \frac{|\mathbf{I}|}{|\mathbf{V}_s|}, \quad \angle \mathbf{Y} = \angle \mathbf{I} - \angle \mathbf{V}_s$$

$$i(t) = |\mathbf{Y}(j\omega)| |\mathbf{V}_s| \cos(\omega t + \angle \mathbf{Y}(j\omega) + \angle \mathbf{V}_s)$$

7. Κάθε κλάδος τού κυκλώματος που μπορεί να περιέχει (το πολύ) ωμική αντίσταση, πηνίο και πυκνωτή θα έχει συνολική σύνθετη αντίσταση

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R + j\omega L + 1/(j\omega C) = \textcolor{violet}{R} \pm \textcolor{violet}{jX}$$

με το πρόσημο της αντίδρασης $\textcolor{violet}{X}$ να καθορίζεται από τις τιμές των ωC και ωL

ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΚΑΙ ΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ—ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

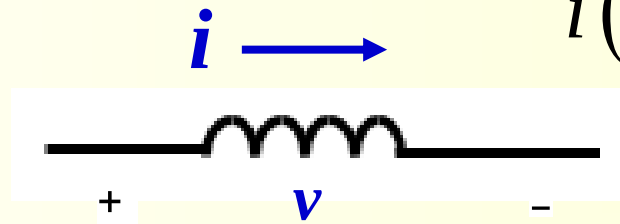
• ΟΡΟΛΟΓΙΑ

- Σύνθετη Αντίσταση ή Εμπέδηση = Ωμική Αντίσταση + j Αντίδραση
■ $\text{Impedance} = \text{Resistance} + j \text{Reactance}$
- Σύνθετη Αγωγιμότητα ή Δεκτικότητα = Ωμική Αγωγιμότητα + j Επιδεκτικότητα
■ $\text{Admittance} = \text{Conductance} + j \text{Susceptance}$

ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΚΑΙ ΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ—ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- ΠΗΝΙΟ

- Πόση είναι η τάση v ;



$$i(t) = 10 \cos(10000t + 30^\circ) \text{ mA}$$

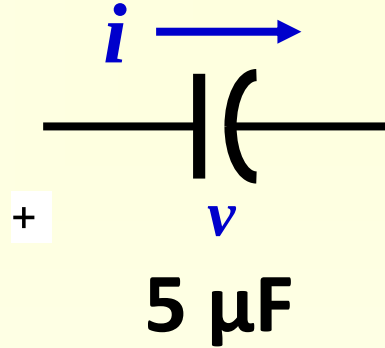
20 mH

- Αντίδραση: $\omega L = 10000 \times 20 \times 10^{-3} = 200 \Omega$
- Εμπέδηση $= 0 + j200 = j200 \Omega$
- Φάσoras τάσης: $\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} = j 10000 \times 20 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} e^{j30^\circ}$
 $= 2j e^{j30^\circ} = 2 e^{j90^\circ} e^{j30^\circ} = 2 e^{j120^\circ}$
- Τελικά
$$v(t) = 2 \cos(10000t + 120^\circ) \text{ V}$$

ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΚΑΙ ΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ—ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- ΠΥΚΝΩΤΗΣ

- Πόσο είναι το ρεύμα i ;



$$v(t) = 30 \cos(4000t + 25^\circ) \text{ V}$$

- Αντίδραση: $-\frac{1}{\omega C} = \frac{-1}{4000 \times 5 \times 10^{-6}} = -50\ \Omega$

- Εμπέδηση $= 0 - j50 = -j50\ \Omega$

- Φάσορας τάσης: $\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} = j 4000 \times 5 \times 10^{-6} \times 30 e^{j25^\circ}$
 $= 0,6 j e^{j25^\circ} = 0,6 e^{j90^\circ} e^{j25^\circ} = 0,6 e^{j115^\circ}$

- Τελικά $i(t) = 0,6 \cos(4000t + 115^\circ) \text{ A}$

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Πολλά από όσα είδαμε ως εδώ, βρίσκονται περιληπτικά στο:
http://sml.ece.upatras.gr/images/UploadedFiles/ilektrika-kyklomata_i/Phasors.pdf

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

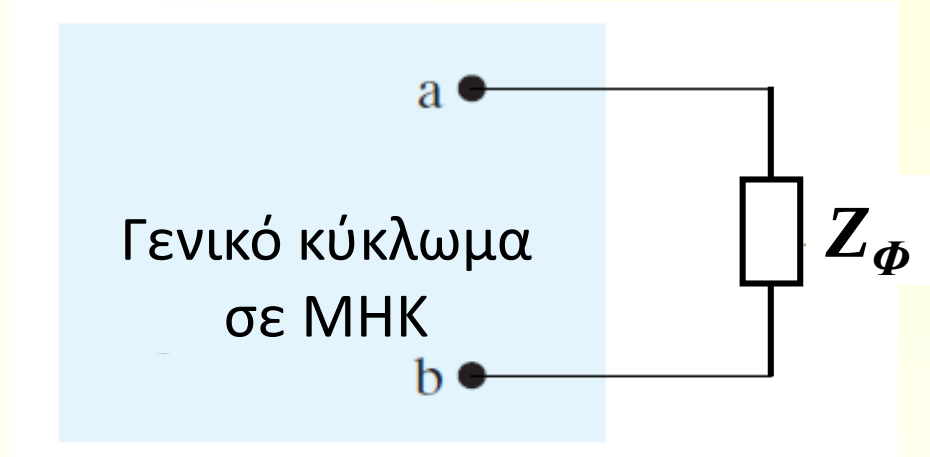
- Συνοψίζοντας έως εδώ, βλέπουμε πως οτιδήποτε αφορά ένα κύκλωμα σε ΜΗΚ μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση φασόρων
- Έτσι, οι νόμοι του Kirchhoff και οι σχέσεις τάσης ρεύματος για κάθε στοιχείο μπορούν να πάρουν φασορική μορφή
- Πράγμα που σημαίνει ότι όλες οι τεχνικές (κομβικές τάσεις και βροχικές εντάσεις) και τα τεχνάσματα (απλοποιήσεις, διαιρέτες, μετασχηματισμοί πηγών, ισοδύναμα, κλπ.) έχουν τη **δυνατότητα** να εκφραστούν επίσης σε φασορική μορφή
- Για να γίνει η δυνατότητα πραγματικότητα, πρέπει να επαναλάβουμε ότι καλύψαμε προηγουμένως και να το αποδείξουμε όταν το χρησιμοποιούμε με φάσορες

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Πρέπει να επαναλάβουμε ότι καλύψαμε προηγουμένως και να το αποδείξουμε όταν το χρησιμοποιούμε με φάσορες
- Ευτυχώς κάτι τέτοιο δεν είναι δύσκολο
- Θα ανακαλύψουμε ότι όλα τα αποτελέσματα και οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν έως τώρα ισχύουν και για την περίπτωση των κυκλωμάτων σε ΜΗΚ με χρήση φασόρων
- Η βασική αλλαγή είναι ότι τώρα οι ωμικές αντιστάσεις και αγωγιμότητες, ή οι τελεστές εμπέδησης και δεκτικότητας θα αντικατασταθούν από σύνθετες αντιστάσεις και σύνθετες αγωγιμότητες
- Υπάρχει μόνο μία και **μόνο μία διαφορά:**

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Η μοναδική **διαφορά** αφορά τη **μέγιστη μεταφορά ισχύος**:
- Ξαναβλέπουμε λοιπόν το ίδιο σενάριο:



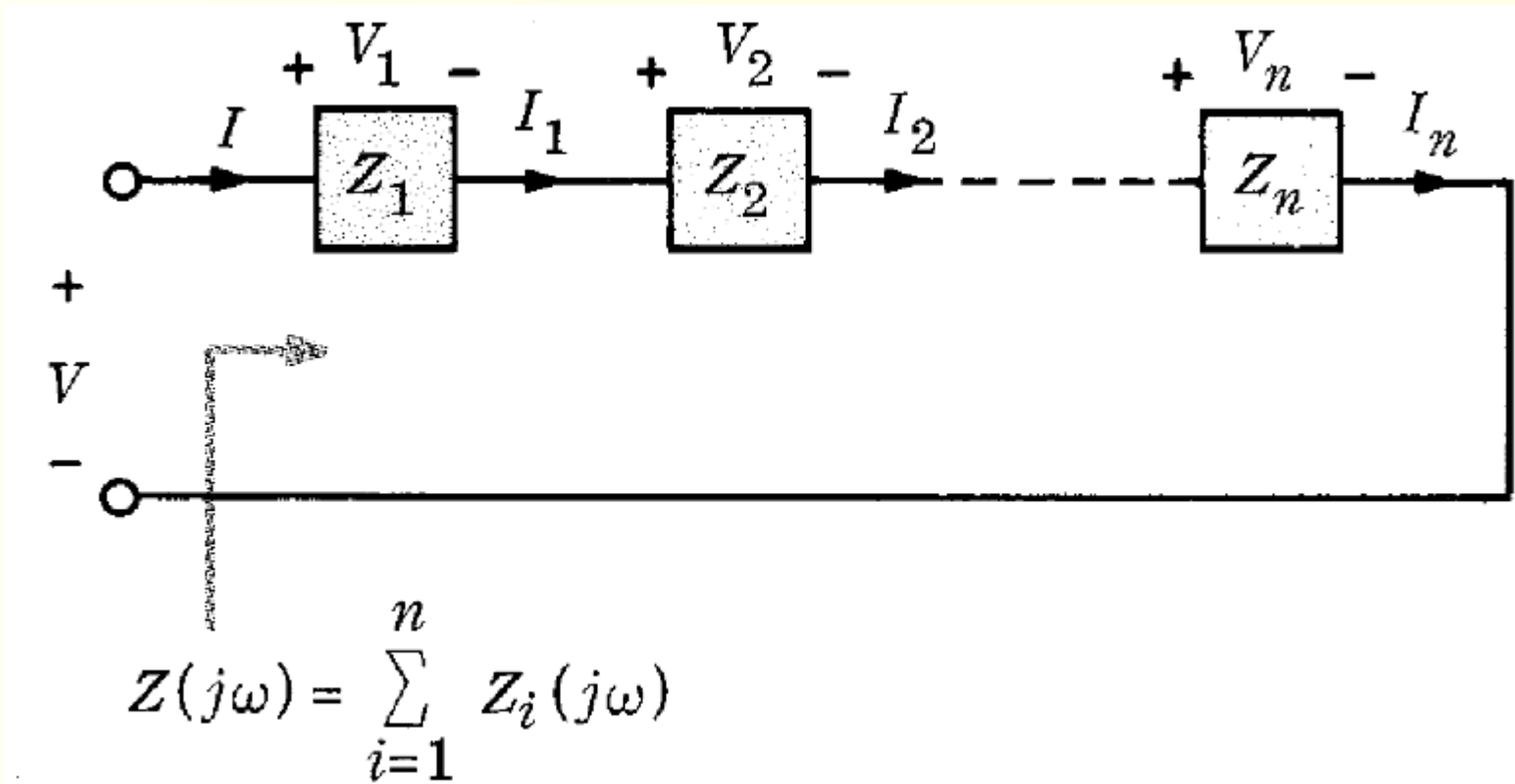
- **Ποιά είναι η κατάλληλη Z_{ϕ} για μέγιστη μεταφορά ισχύος;**
- Με ακριβώς ίδια λογική αλλά προσέχοντας τώρα τα μιγαδικά μεγέθη, καταλήγουμε ότι **πρέπει:**

$$Z_{\phi} = Z_{Th}^*$$

- Δηλαδή, η κατάλληλη σύνθετη αντίσταση είναι ίση με τη συζυγή τής σύνθετης αντίστασης Thevenin

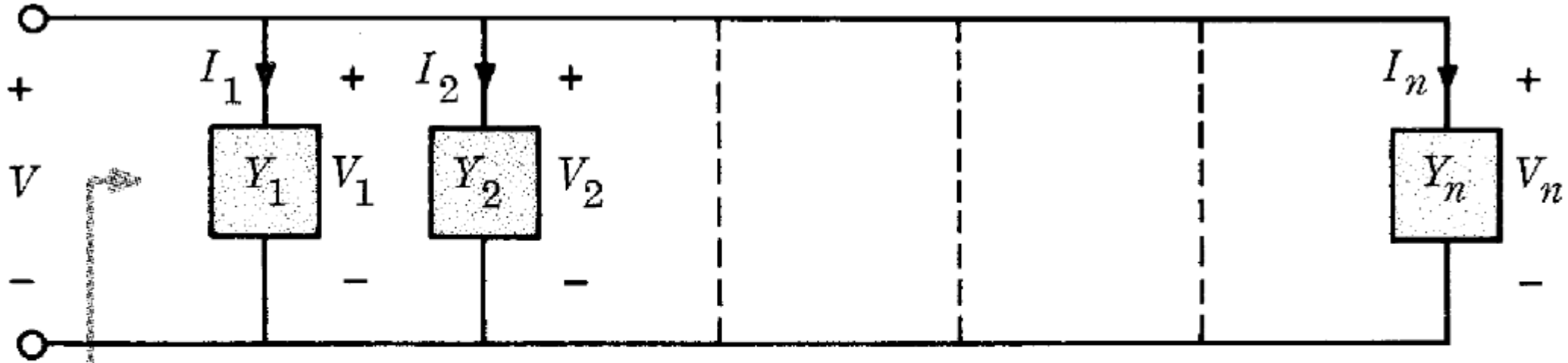
ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Με μοναδική εξαίρεση τη μέγιστη μεταφορά ισχύος, όλα τα υπόλοιπα αποτελέσματα μεταφέρονται αυτούσια αλλά, φυσικά, κατάλληλα προσαρμοσμένα
- Έτσι, η απλοποίηση σύνθετων αντιστάσεων σε σειρά θα γίνει:



ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

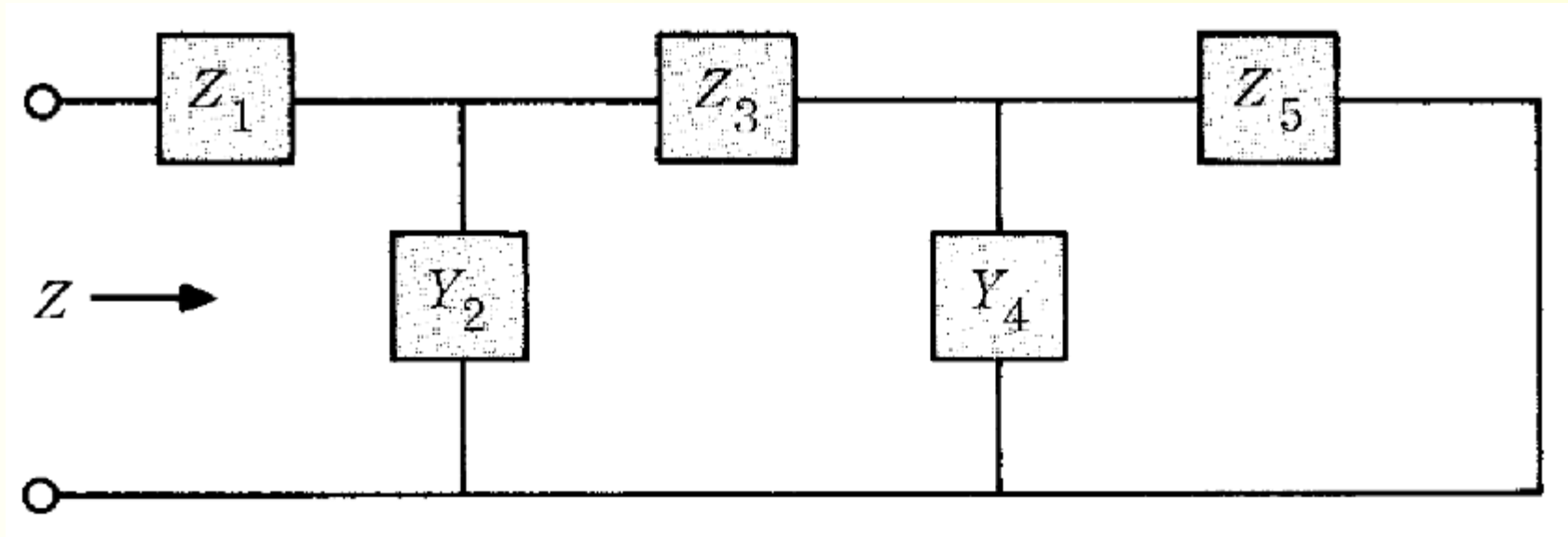
- Η απλοποίηση σύνθετων αντιστάσεων παράλληλα, θα γίνει:



$$Y(j\omega) = \sum_{i=1}^n Y_i(j\omega)$$

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

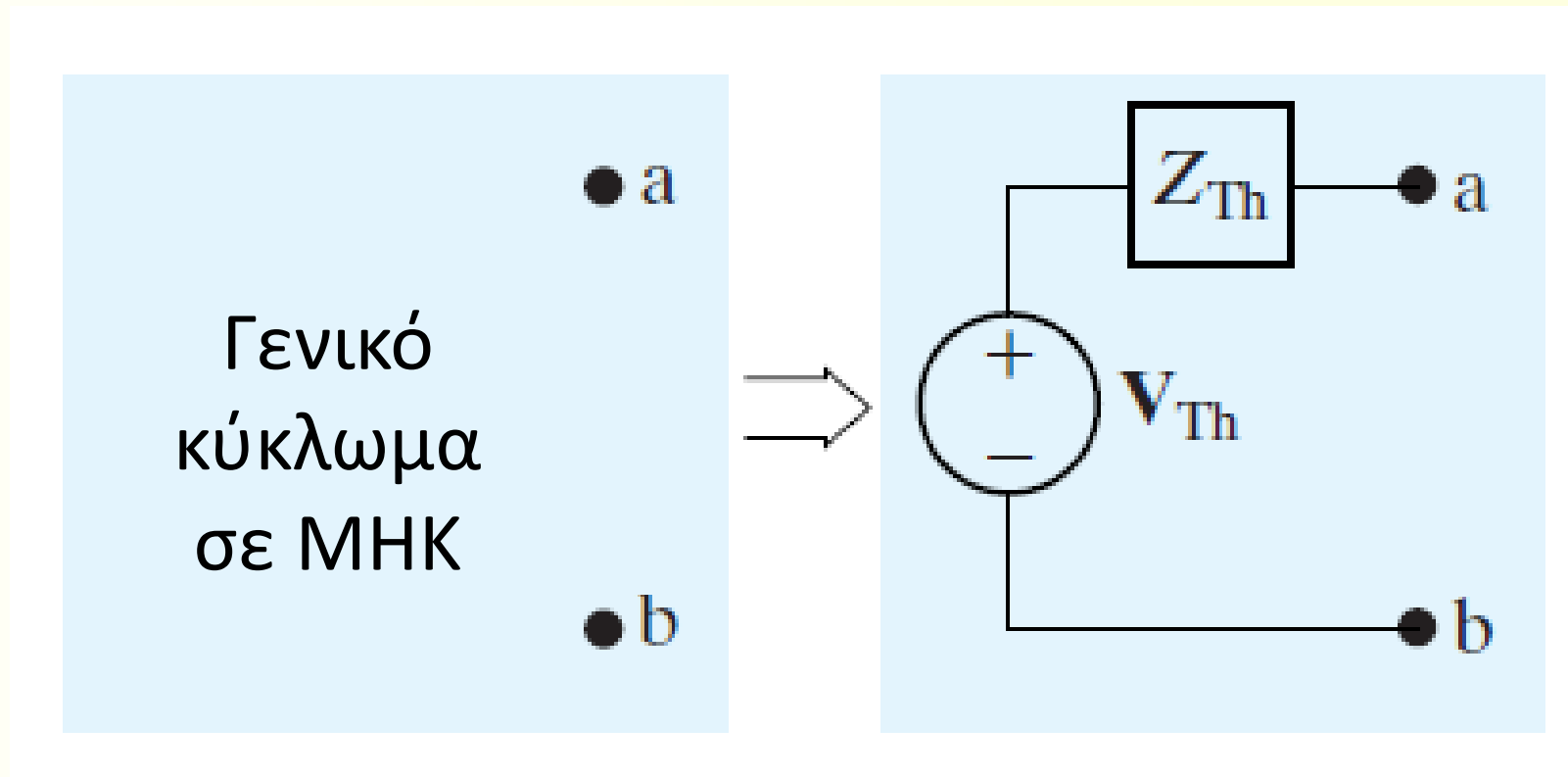
- Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα:



$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5}}}} = \frac{Z_1[1 + Y_4 Z_5 + Y_2 Z_5 + Y_2 Z_3(1 + Y_4 Z_5)] + Z_5 + Z_3(1 + Y_4 Z_5)}{1 + Y_4 Z_5 + Y_2[Z_5 + Z_3(1 + Y_4 Z_5)]}$$

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Ισοδύναμο Thevenin:



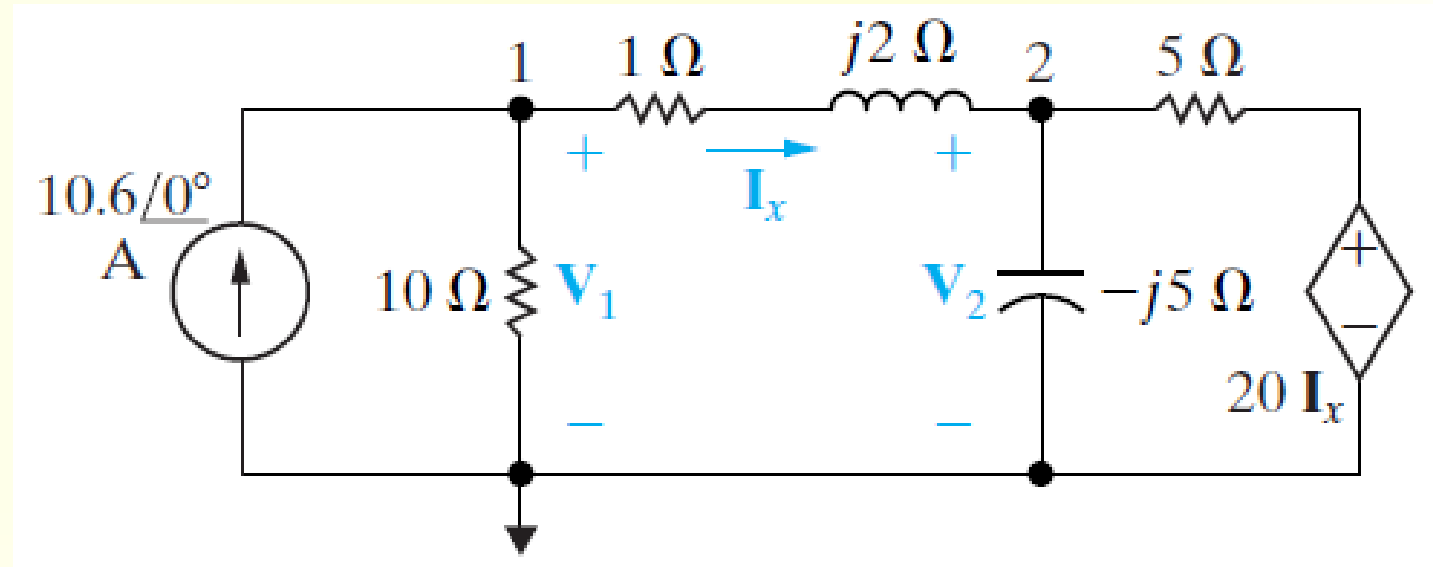
ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Κομβικές τάσεις:

$$-10.6 + \frac{\mathbf{V}_1}{10} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{1 + j2} = 0$$

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{1 + j2} + \frac{\mathbf{V}_2}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_2 - 20\mathbf{I}_x}{5} = 0$$

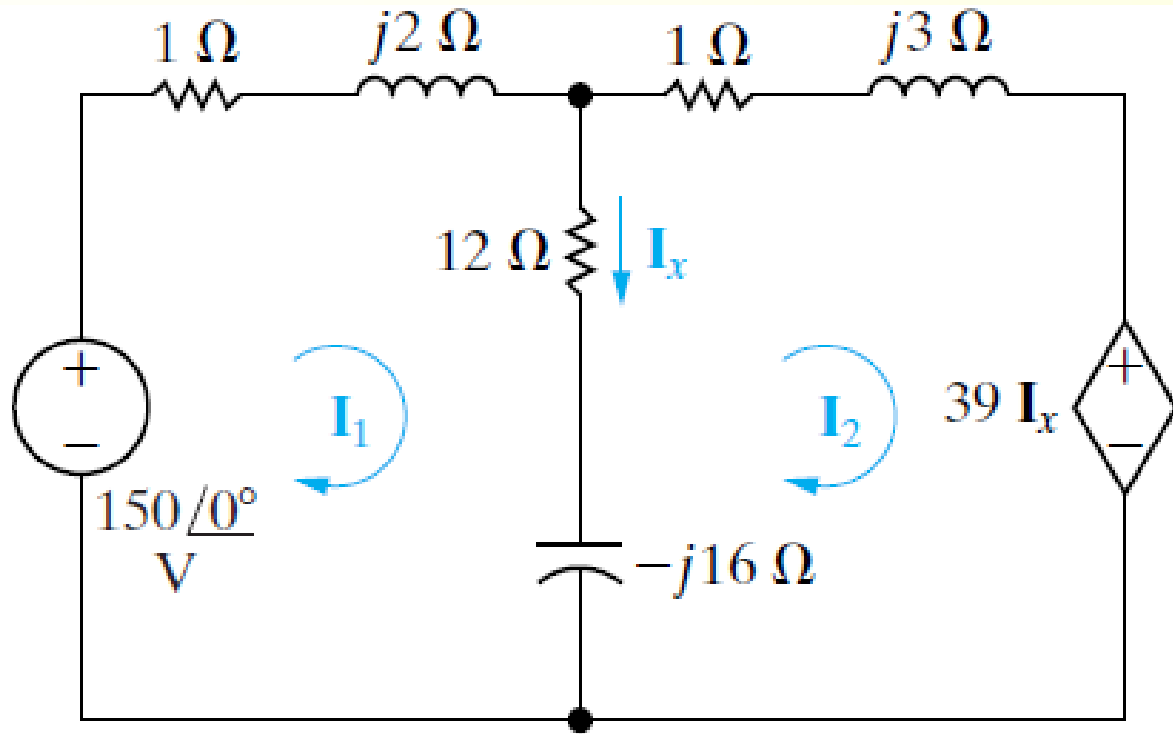
$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{1 + j2}$$



$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= 68.40 - j16.80 \text{ V,} \\ \mathbf{V}_2 &= 68 - j26 \text{ V.}\end{aligned}$$

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Βροχικές εντάσεις:



$$150 = (1 + j2)\mathbf{I}_1 + (12 - j16)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)$$

$$0 = (12 - j16)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + (1 + j3)\mathbf{I}_2 + 39\mathbf{I}_x$$

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = -26 - j52 \text{ A}$$

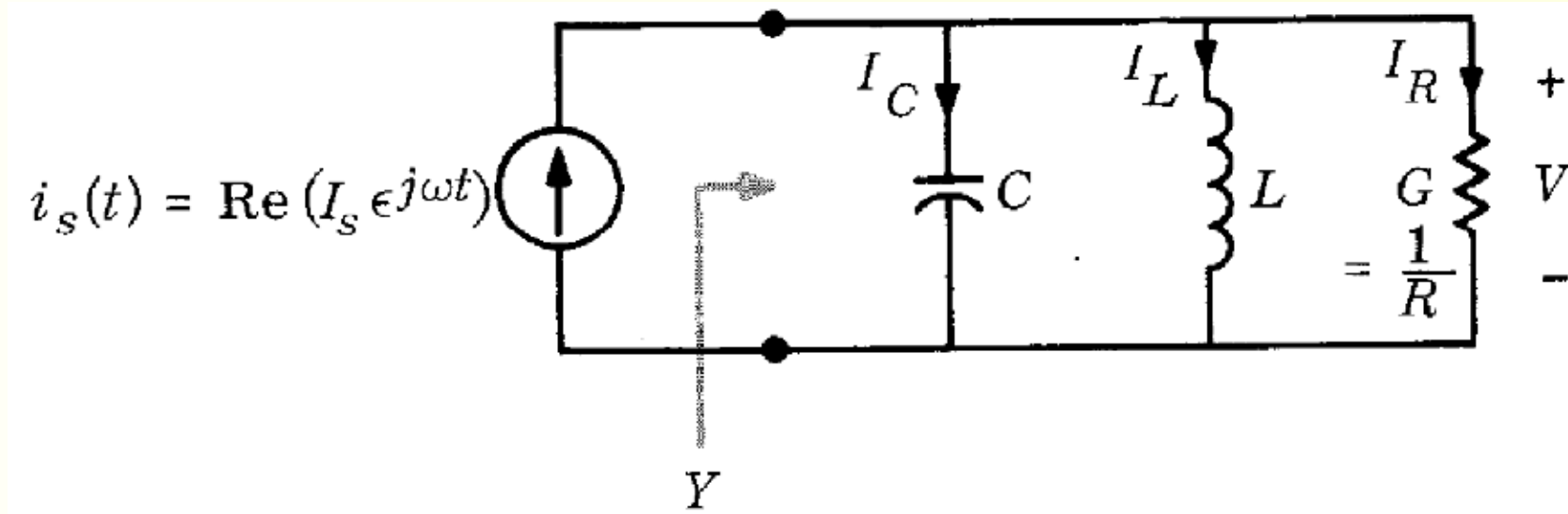
$$\mathbf{I}_2 = -24 - j58 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_x = -2 + j6 \text{ A.}$$

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

- Ας εξετάσουμε ένα κύκλωμα συντονισμού στη μορφή ενός παράλληλου RLC:



- Η δεκτικότητα είναι:

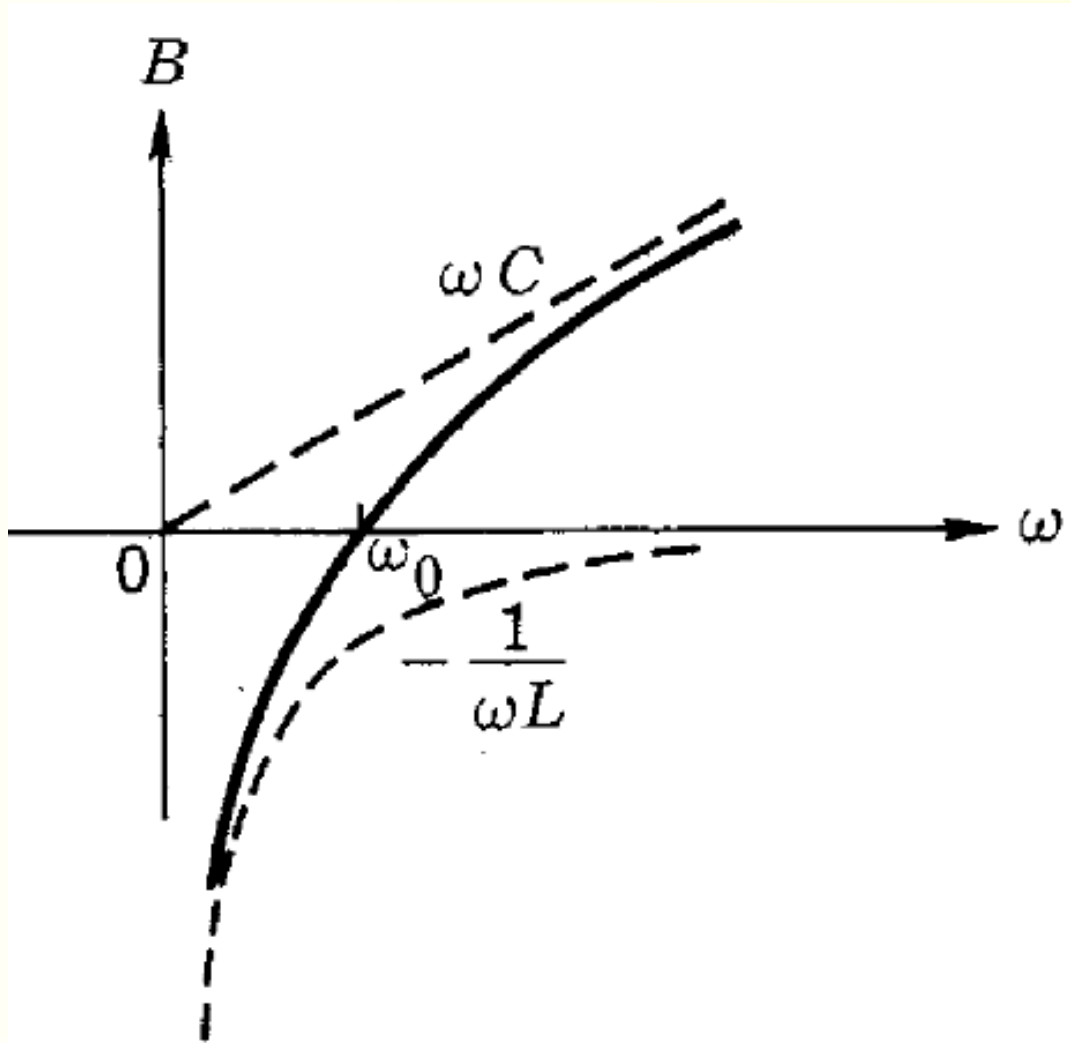
$$Y(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$= \underset{\text{σταθερά}}{G} + j \underbrace{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}_{\text{συνάρτηση του } \omega}$$

ΕΠΙΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

- Ας μελετήσουμε την επιδεκτικότητα $B = \omega C - \frac{1}{\omega L}$



- Όταν

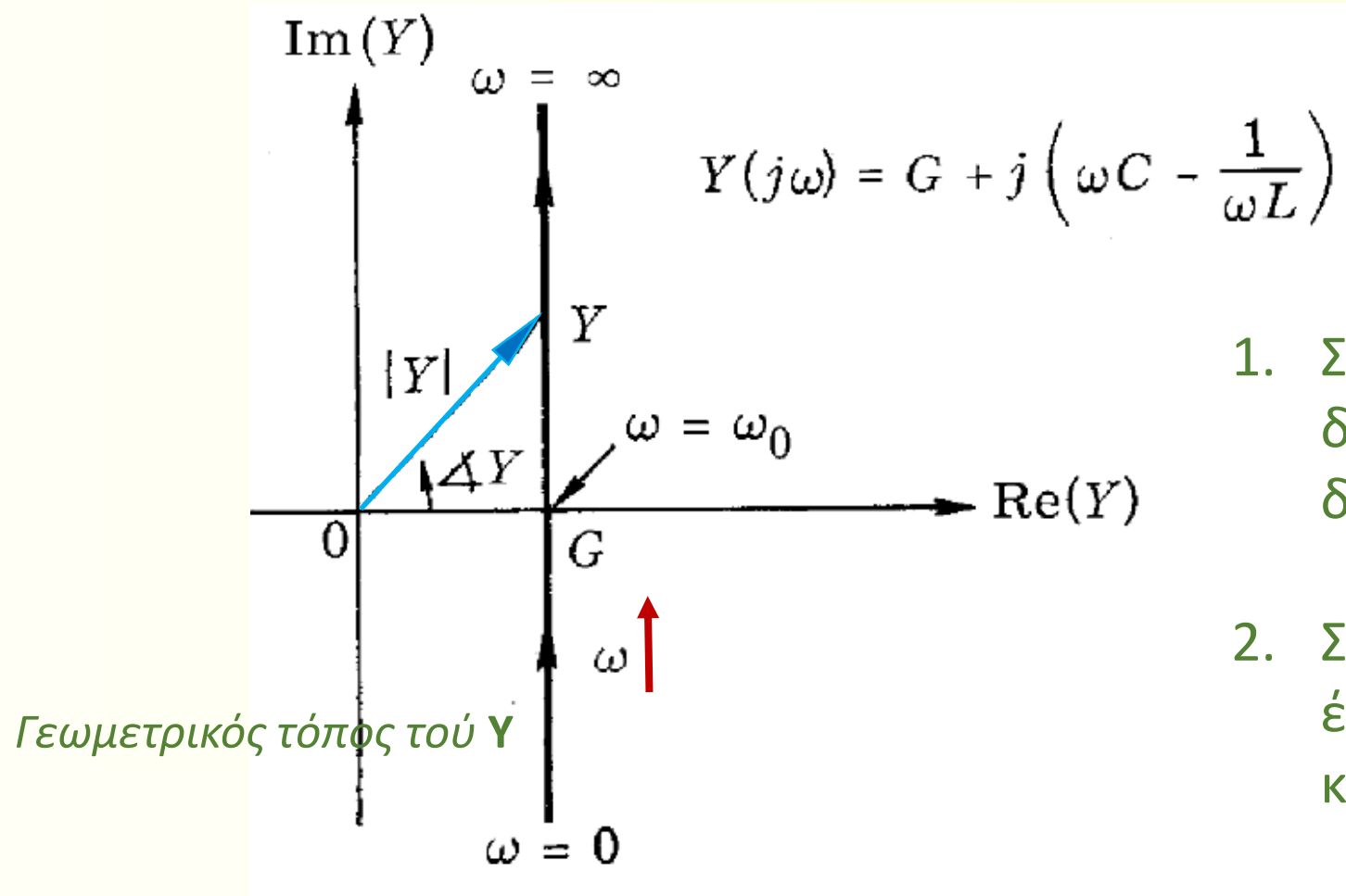
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

η επιδεκτικότητα είναι 0

- Δηλαδή έχουμε **συντονισμό**
- Η f_0 είναι η **συχνότητα συντονισμού**

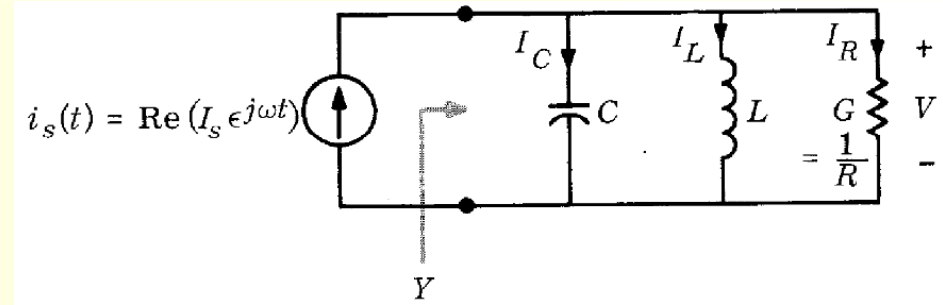
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

- Τώρα ας σχεδιάσουμε τη δεκτικότητα Y σαν συνάρτηση του ω :



1. Στον συντονισμό η δεκτικότητα Y είναι ίση με τη δεκτικότητα G της αντίστασης
2. Στον συντονισμό όπου $\omega = \omega_0$, έχουμε ελάχιστη δεκτικότητα και φάση 0

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ



- Ας εξετάσουμε τώρα την εμπέδηση:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \frac{1}{\mathbf{Y}(j\omega)} = \frac{1}{G + jB(\omega)} = \dots = \frac{G}{G^2 + B^2(\omega)} + j \frac{-B(\omega)}{G^2 + B^2(\omega)}$$

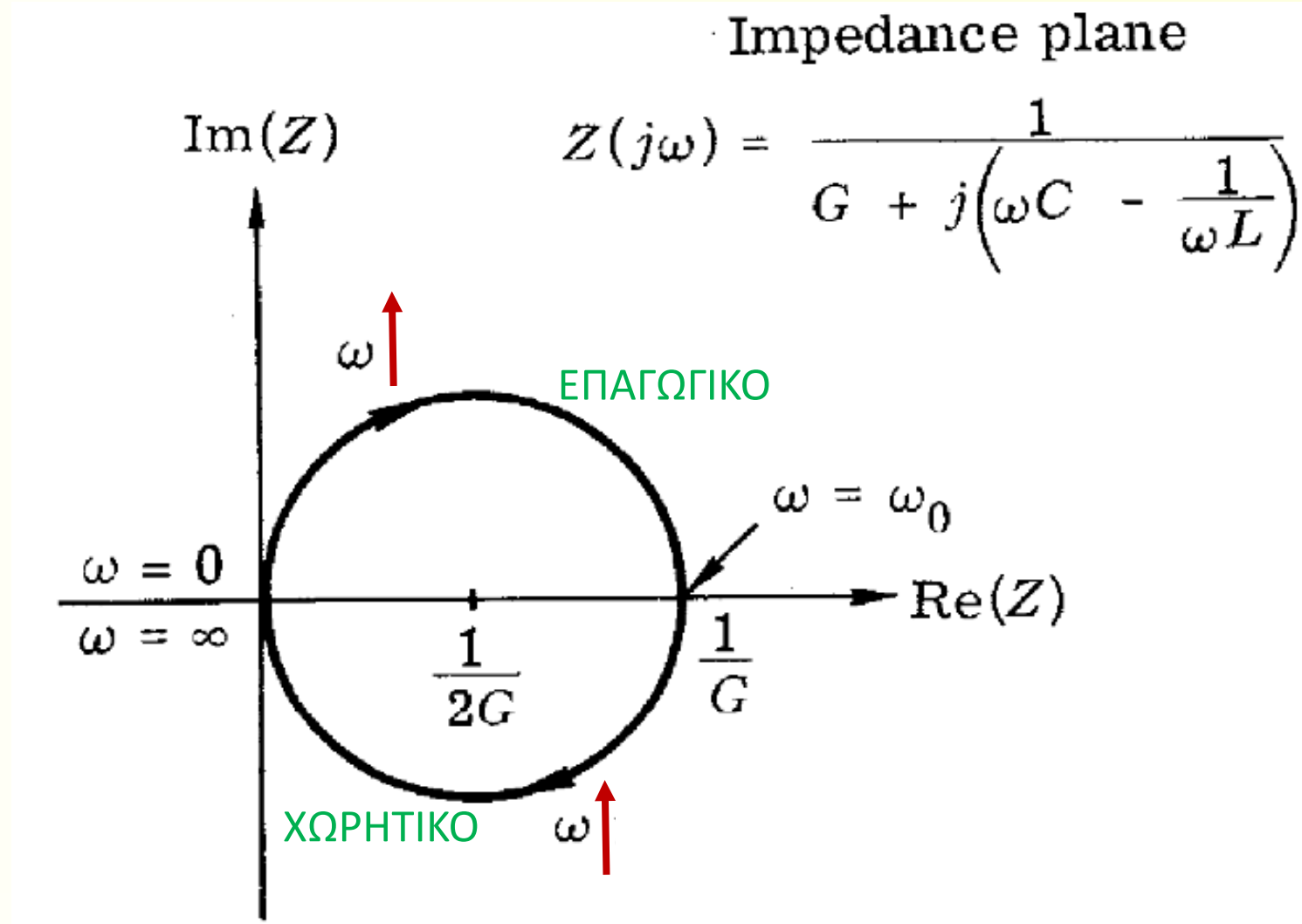
- Οι σχέσεις για την αντίσταση και την αντίδραση

$$\text{Re}[\mathbf{Z}(j\omega)] = \frac{G}{G^2 + B^2(\omega)} \quad \text{Im}[\mathbf{Z}(j\omega)] \triangleq X(\omega) = \frac{-B(\omega)}{G^2 + B^2(\omega)}$$

σχηματίζουν παραμετρικές εξισώσεις για μια καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

- Σχεδιάζουμε τον γεωμετρικό τόπο του Z :



ΣΗΜΕΙΩΣΗ

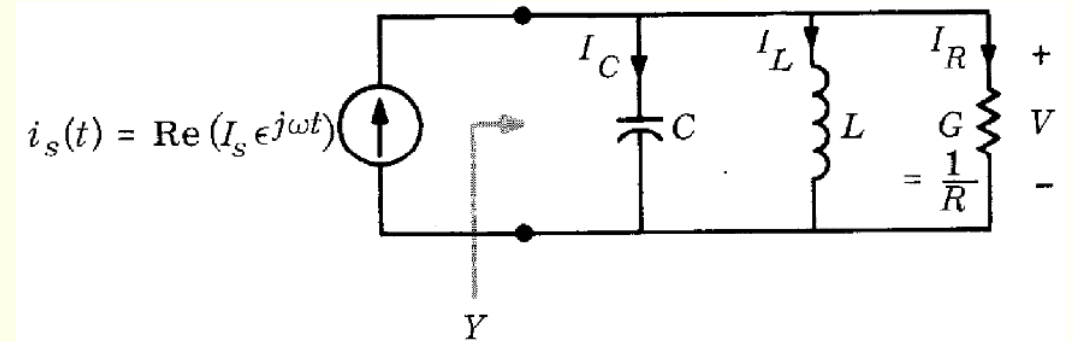
- Ακριβώς αυτός ο **γενικός** τρόπος ανάλυσης, δηλ. παραμετροποιώντας με βάση τη συχνότητα (ω ή f), αποδεικνύει τη βαθύτερη αξία των φασόρων που μας δίνουν απαντήσεις για όλες τις συχνότητες

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

- Ας δούμε τώρα τους φάσορες των τάσεων και των ρευμάτων:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}_s}{\mathbf{Y}} = \mathbf{Z}\mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_R = G\mathbf{V} \quad \mathbf{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\mathbf{V} \quad \mathbf{I}_C = j\omega C\mathbf{V}$$



- Θα ισχύει:

$$\mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C = \mathbf{I}_s$$

- Βάζουμε συγκεκριμένες τιμές για καλύτερη εποπτεία:

$$\mathbf{I}_s = 1e^{j0} \text{ A} \quad \omega = 1 \text{ rad/s} \quad R = 1 \, \Omega \quad L = \frac{1}{4} \text{ H} \quad C = 1 \text{ F}$$

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η συχνότητα ω ΔΕΝ είναι η συχνότητα συντονισμού ω_0

ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

- Τότε θα έχουμε:

$$\mathbf{Y}(j1) = 1 + j(1 - 4) = 1 - j3 = \sqrt{10} e^{-j71,6^\circ} \text{ S} \Rightarrow$$

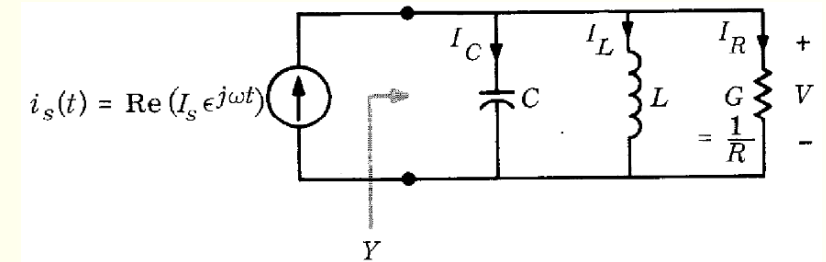
$$\mathbf{Z}(j1) = \frac{1}{\mathbf{Y}(j1)} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j71,6^\circ} \Omega \Rightarrow$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}_s = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j71,6^\circ} 1 e^{j0^\circ} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j71,6^\circ} \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_R = G\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j71,6^\circ} \text{ A}$$

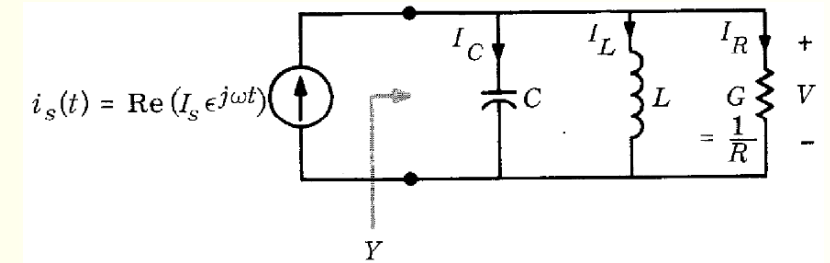
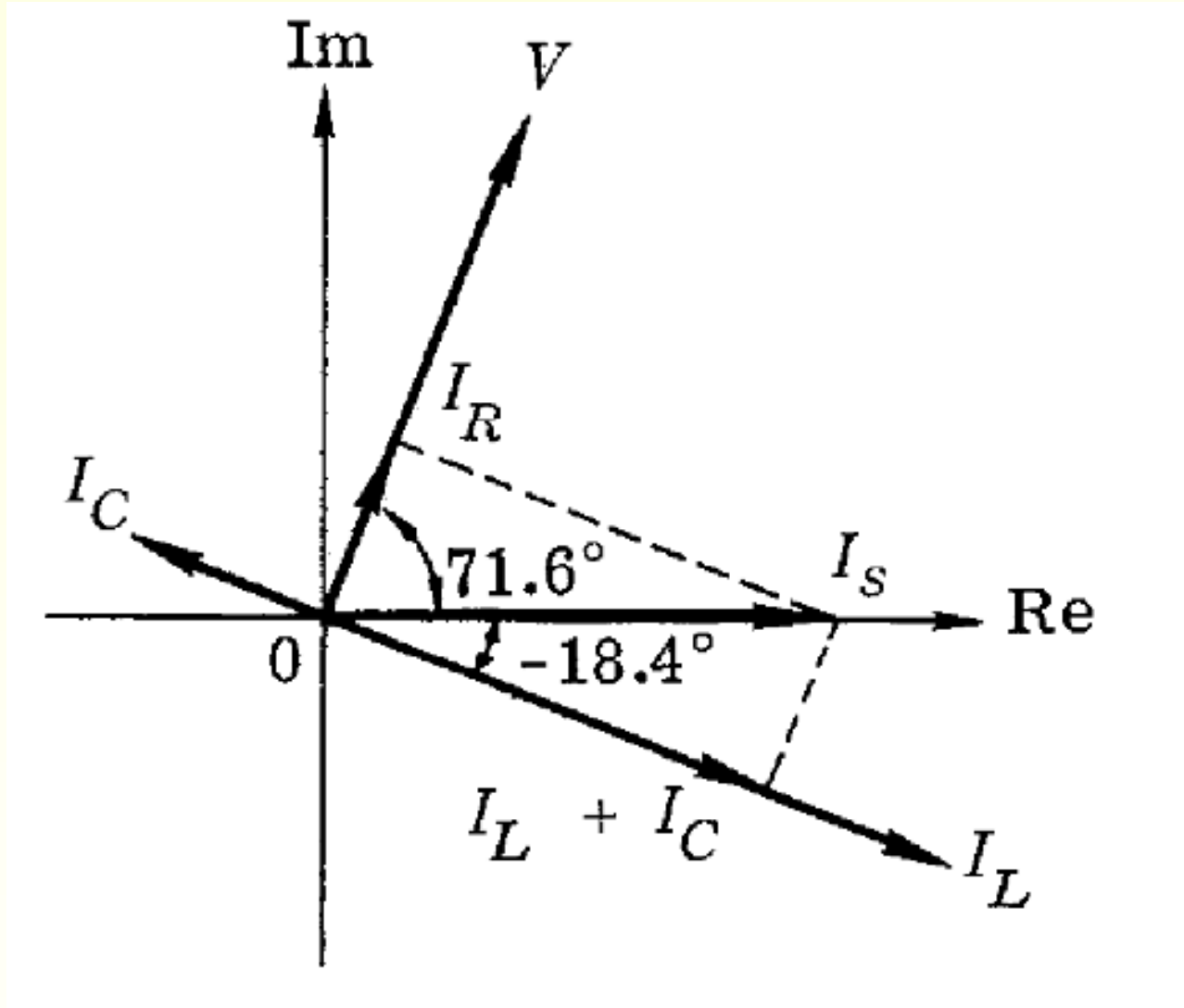
$$\mathbf{I}_L = \frac{1}{j\omega L} \mathbf{V} = \frac{4}{j} \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j71,6^\circ} = \frac{4}{\sqrt{10}} e^{-j18,4^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = j\omega C\mathbf{V} = \frac{j}{1} e^{j71,6^\circ} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j161,6^\circ} \text{ A}$$



ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

- Γεωμετρικά, θα πάρουμε το λεγόμενο **Διάγραμμα Φασόρων**:



ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

- **ΝΕΟ ΣΕΝΑΡΙΟ:** Τώρα αν εφαρμόσουμε στην είσοδο μια ημιτονοειδή στη **συχνότητα συντονισμού** $\omega_0 = 2$ rad/s θα πάρουμε:

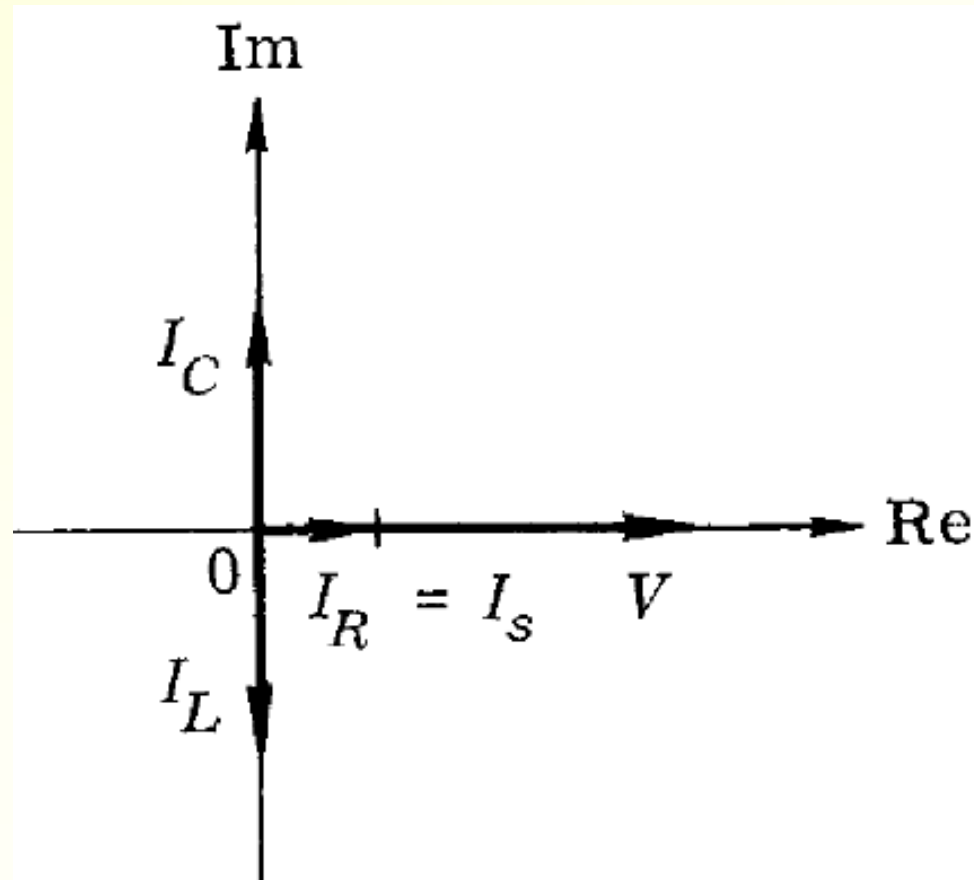
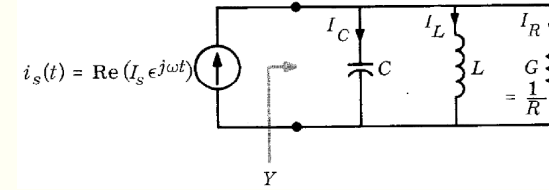
$$Y(j2) = 1 \text{ S}$$

$$V = 1 \text{ V}$$

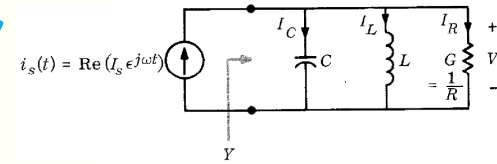
$$I_R = 1 \text{ A}$$

$$I_L = 2 e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

$$I_C = 2 e^{j90^\circ} \text{ A}$$



ΦΑΣΟΡΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ



- **ΑΚΟΜΑ ΠΙΟ ΝΕΟ ΣΕΝΑΡΙΟ:** Τώρα ας εφαρμόσουμε στην είσοδο μια ημιτονοειδή στη **συχνότητα συντονισμού** $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ και ας αυξήσουμε την αντίσταση R στα **250 Ω** (αυτό θα σημάνει σημαντική αύξηση του συντελεστή Q , δηλαδή πολύ καλύτερο συντονισμό):

$$\mathbf{Y}(j2) = 1 \text{ S}$$

$$\mathbf{V} = 250 \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_R = 1 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_L = 500 e^{-j90^\circ} = -j500 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = 500 e^{j90^\circ} = j500 \text{ A}$$

Το κύκλωμα γίνεται **σοβαρά επικίνδυνο**: μπορεί να προκαλέσει ζημιές (π.χ. κάψιμο οργάνου) ή να απειλήσει τη ζωή μας

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ

- Ο όρος «**Συνάρτηση Δικτύου**» προσωρινά θα χρησιμοποιηθεί χαλαρά για να περιγράψει κάτι που αφορά τη γενική συμπεριφορά ενός κυκλώματος («Δίκτυο» είναι ο όρος που σήμαινε το κύκλωμα πιο παλιά)
- Ο πλήρης, και πολύ πιο περιεκτικός, ορισμός, που θα είναι **συνάρτηση κυκλώματος**, θα δοθεί στο επόμενο εξάμηνο/μάθημα
- Προς το παρόν, η συνάρτηση δικτύου, που συμβολίζεται γενικά με το γράμμα H , θα ορίζεται από τον λόγο τού φάσορα εξόδου προς τον φάσορα εισόδου:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{I}_R}{\mathbf{I}_s} = \frac{GV}{\mathbf{I}_s} = G\mathbf{Z}(j\omega) = \frac{1}{1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ

- Η συνάρτηση δικτύου είναι μιγαδική ποσότητα, οπότε μπορούμε να μελετήσουμε το μέτρο και το όρισμά της:

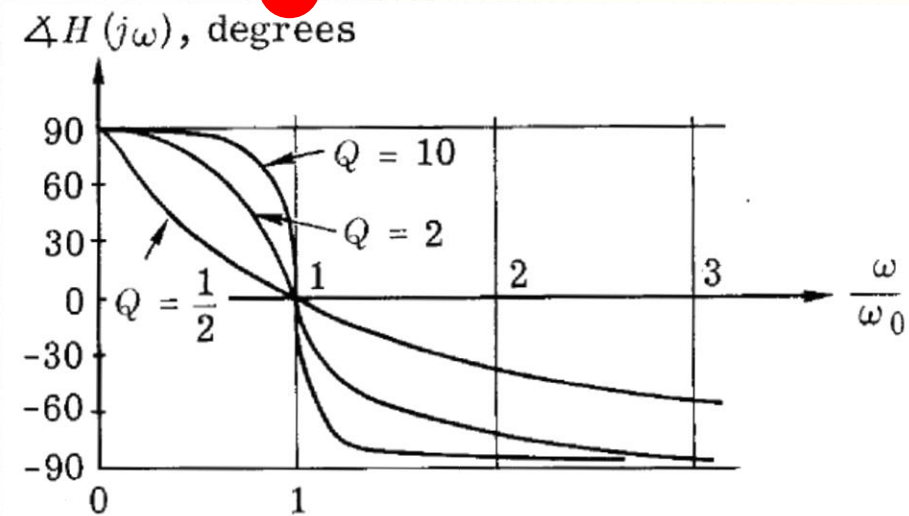
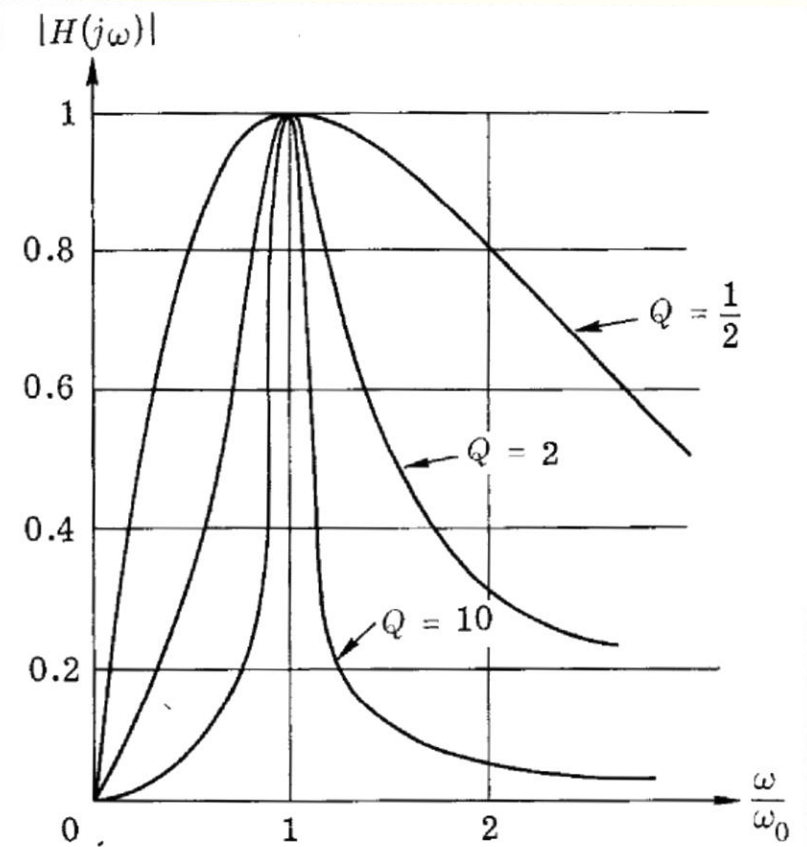
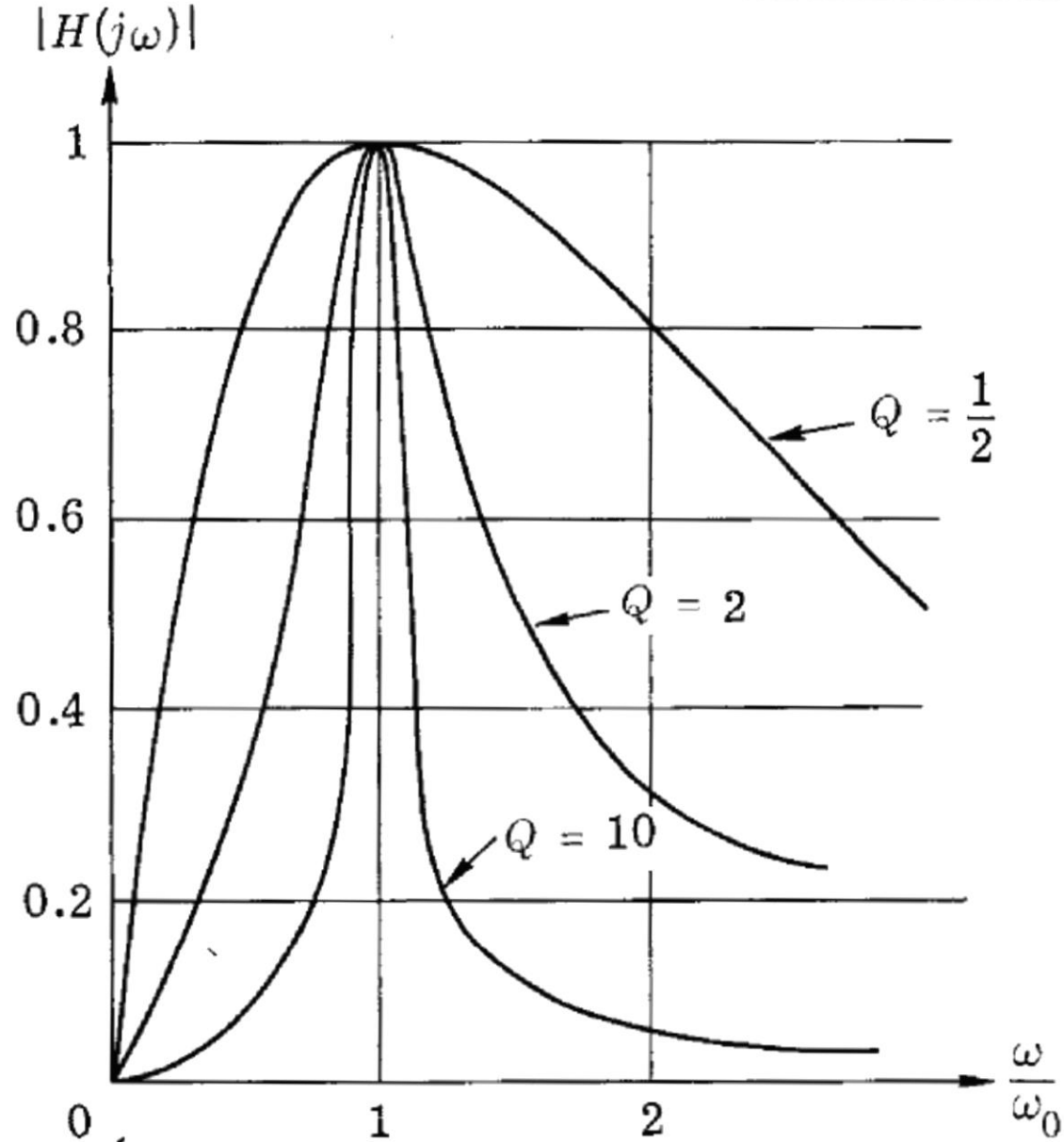
$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \Rightarrow$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\angle \mathbf{H}(j\omega) = \tan^{-1} \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right], \quad \frac{-\pi}{2} \leq \angle \mathbf{H} \leq \frac{\pi}{2}$$

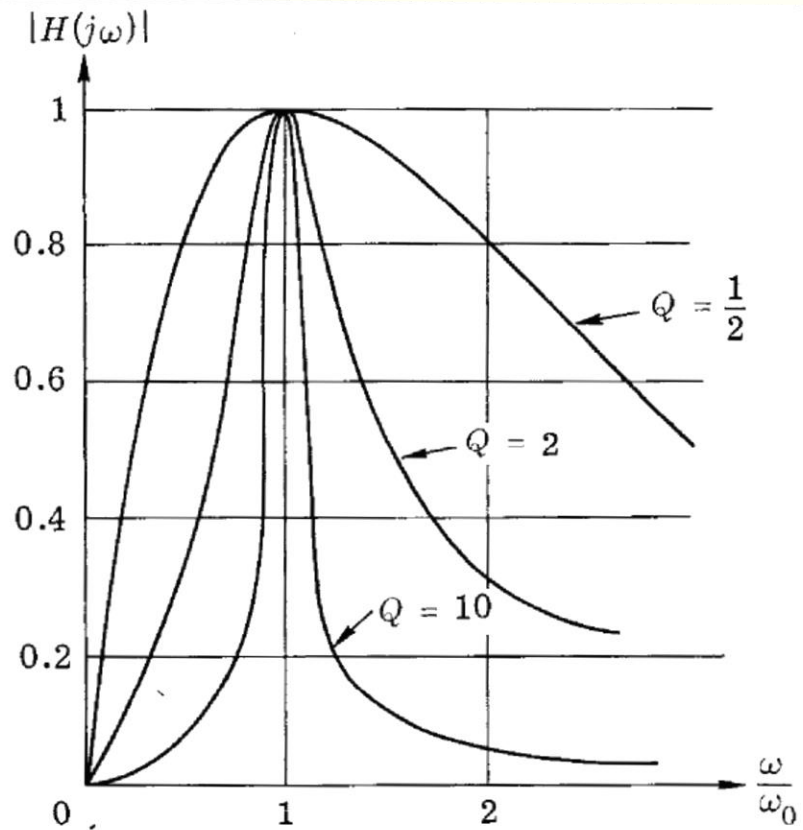
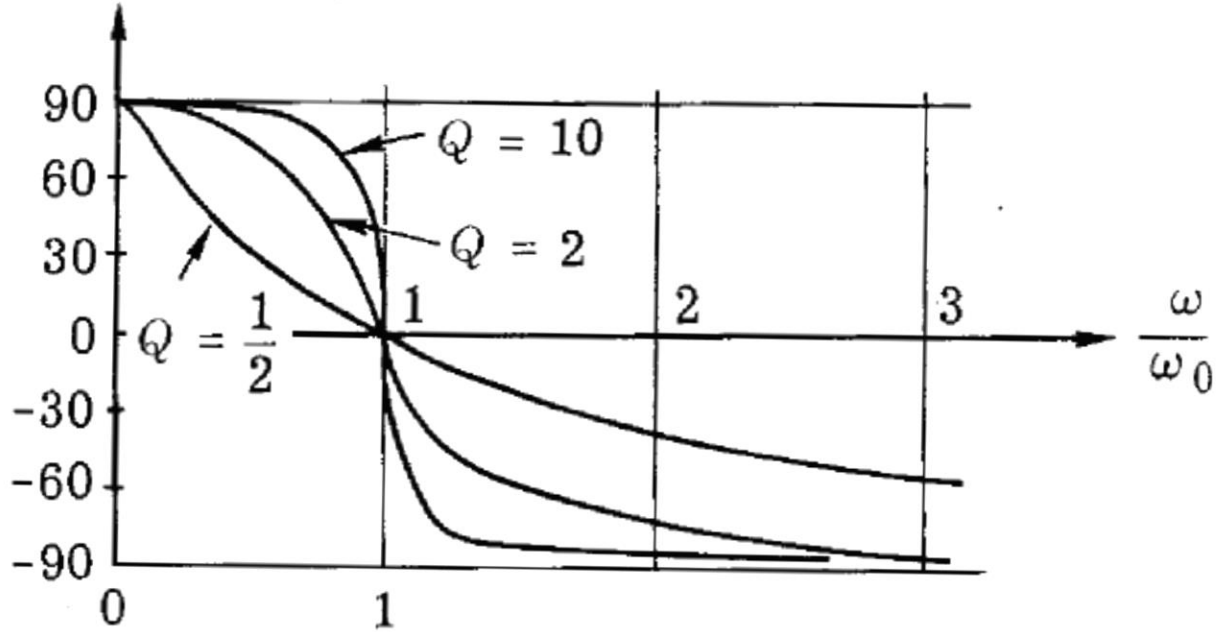
- Που μπορούμε να σχεδιάσουμε:

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ

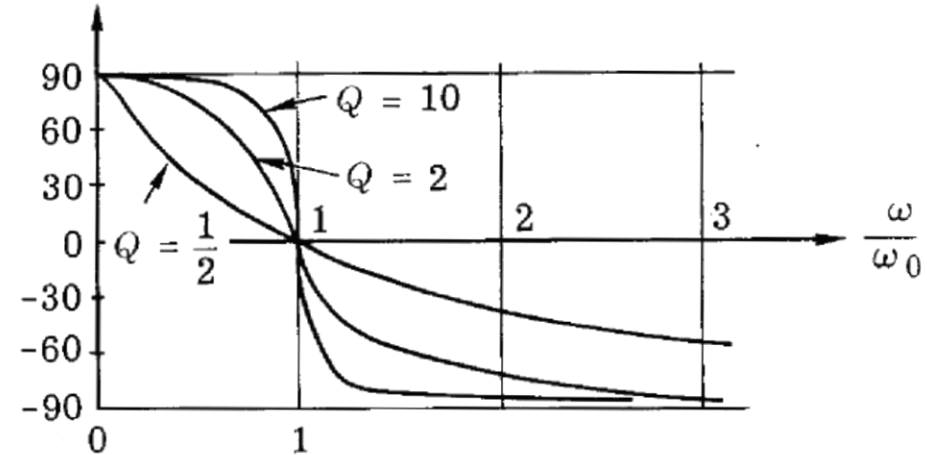


ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ

$\angle H(j\omega)$, degrees

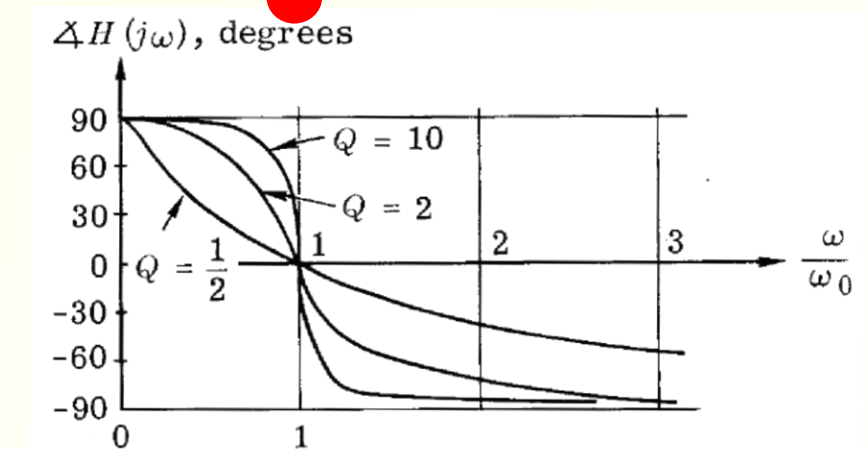
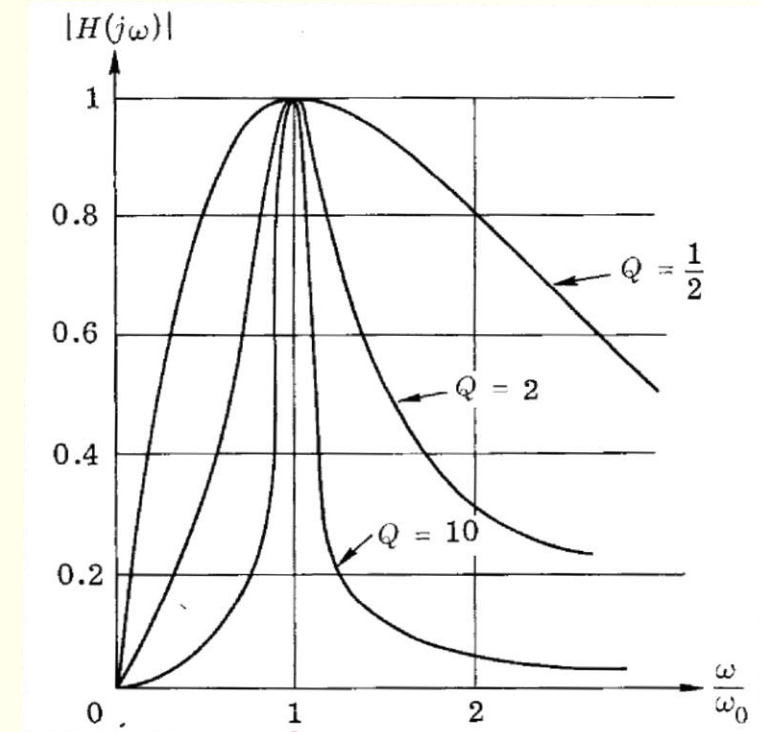


$\angle H(j\omega)$, degrees



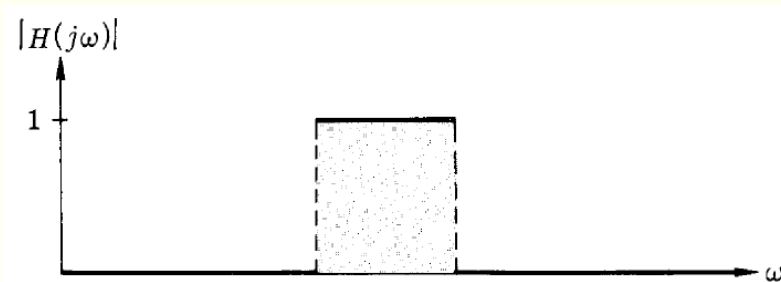
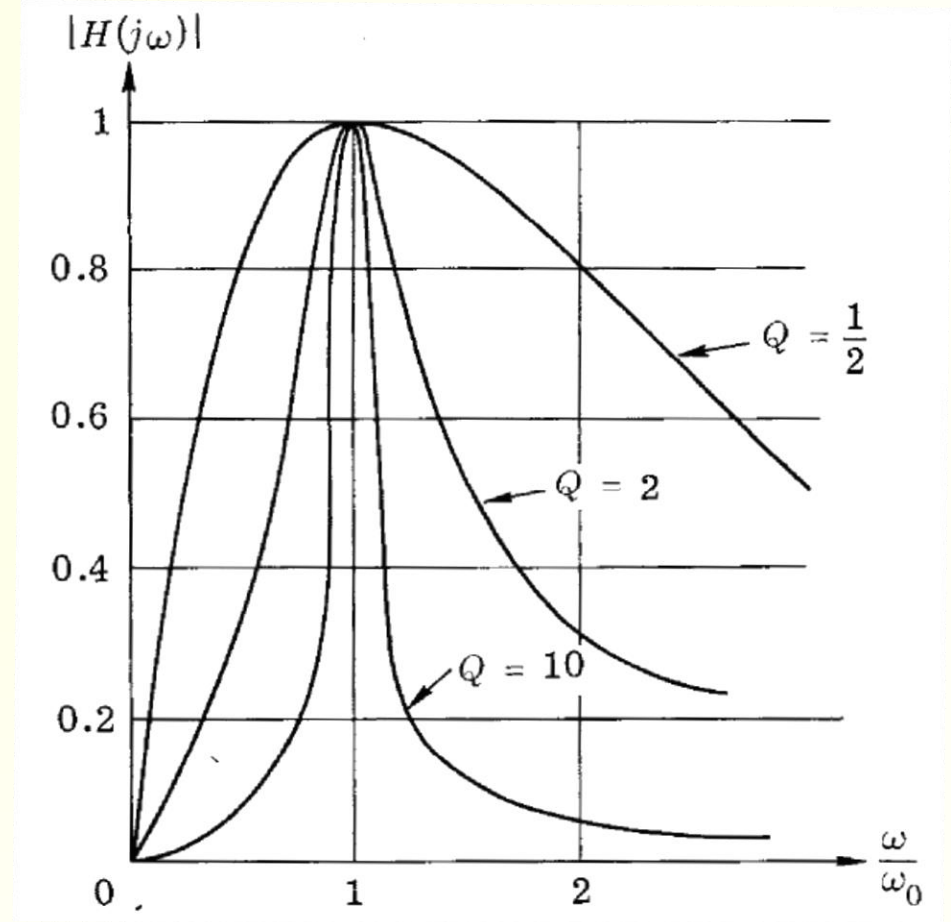
ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Η συνάρτηση δικτύου $\mathbf{H}(j\omega)$ περιέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία που αφορά την απόκριση ενός κυκλώματος στη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση **σε όλες τις δυνατές συχνότητες**
- Οι καμπύλες αυτές λοιπόν αποκαλούνται **απόκριση συχνότητας** του κυκλώματος για τη συγκεκριμένη είσοδο και έξοδο

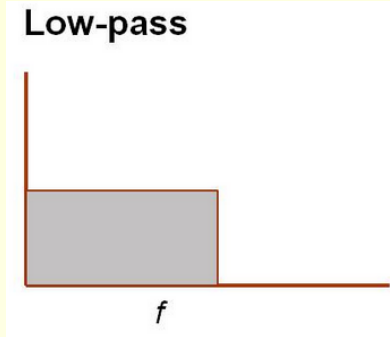


ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

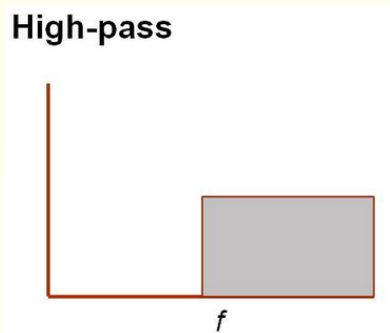
- Μπορούμε να παρατηρήσουμε την επιλεκτική ενίσχυση ή εξασθένηση ορισμένων συχνοτήτων
- Τέτοιου είδους κυκλώματα τα ονομάζουμε **φίλτρα**
- Αυτού του είδους η συμπεριφορά, δηλαδή το ότι αφήνει μόνο ένα εύρος συχνοτήτων να εμφανιστεί στην έξοδο, καθιστά το κύκλωμα συντονισμού ένα **ζωνοδιαβατό φίλτρο**
- Ιδανικό ζωνοδιαβατό φίλτρο:



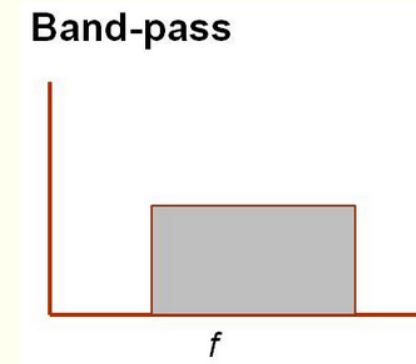
ΦΙΛΤΡΑ—ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ



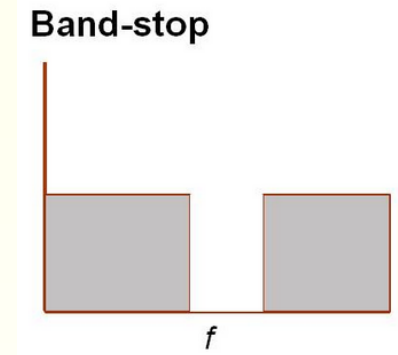
- Χαμηλοπερατό (χαμηλοδιαβατό) φίλτρο
- Low-pass filter



- Υψιπερατό φίλτρο
- High-pass filter

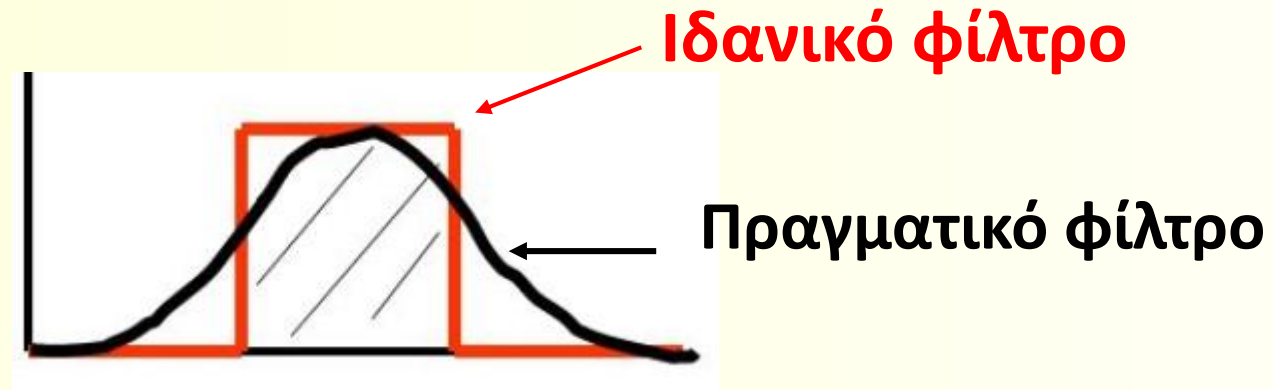


- Ζωνοπερατό φίλτρο
- Band-pass filter



- Ζωνοφρακτικό φίλτρο
- Band-stop (band-reject) filter

ΦΙΛΤΡΑ—ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ



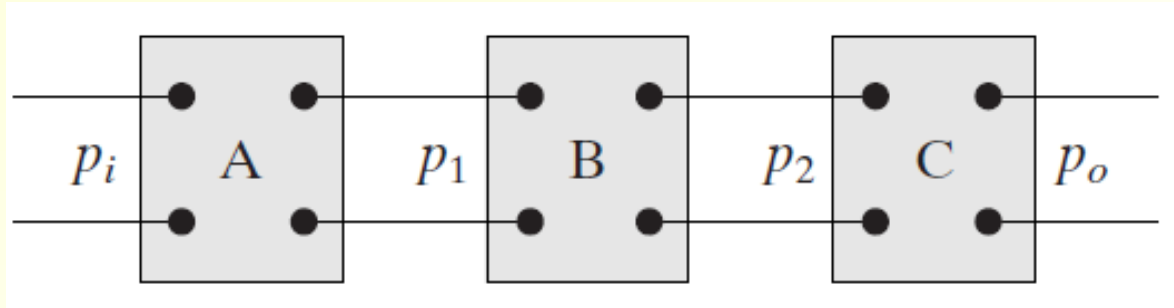
- **ΕΡΩΤΗΜΑ:** Το πραγματικό φίλτρο, ποιές ακριβώς συχνότητες ενισχύει και ποιές εξασθενεί;
- Πρέπει να ορίσουμε το **εύρος ζώνης** ή **ζώνη διαβατότητας** για κάθε φίλτρο
- Προφανώς, αυτό μπορεί να γίνει αυθαίρετα
- Όμως, έχουμε **συμφωνήσει** ότι ...

ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ:

ΤΟ DECIBEL (dB)

ΤΟ DECIBEL

- Ο αρχικός ορισμός τού decibel είχε να κάνει με ισχείς σε τηλεφωνικά δίκτυα που απαιτούσαν πολλές ενδιάμεσες ενισχύσεις των σημάτων



- Το κέρδος τού κάθε σταδίου είναι:

$$\sigma_A = \frac{p_1}{p_i}$$

$$\sigma_B = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\sigma_C = \frac{p_o}{p_2}$$

- Το συνολικό κέρδος είναι:

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{p_1}{p_i} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_o}{p_2} = \sigma_A \sigma_B \sigma_C$$

ΤΟ DECIBEL

- Τέτοιου είδους υπολογισμοί ήταν συνεχείς, και γι' αυτό έπρεπε να απλοποιηθούν κάνοντας τον πολλαπλασιασμό πρόσθεση:

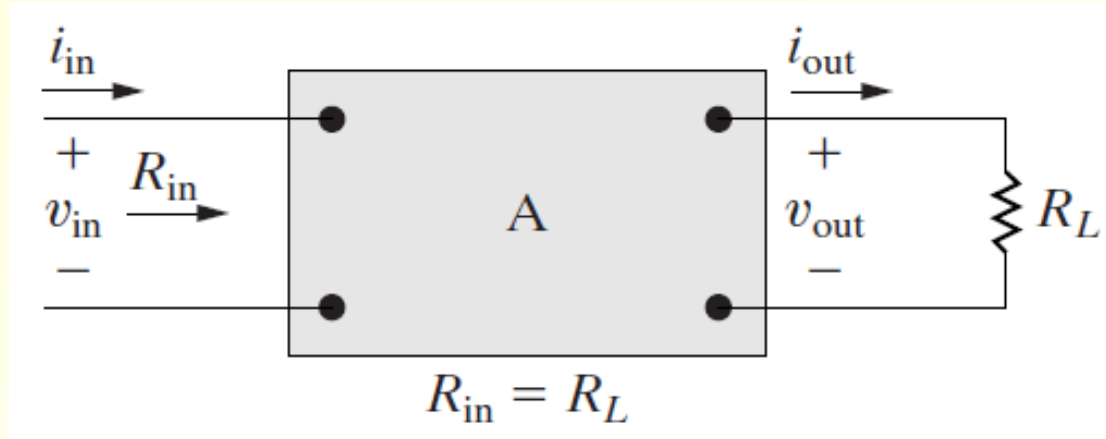
$$\log_{10} \frac{p_o}{p_i} = \log_{10} \sigma_A + \log_{10} \sigma_B + \log_{10} \sigma_C$$

- Για περισσότερη απλοποίηση ορίστηκε ο λογάριθμος του λόγου με τη βοήθεια μιας μονάδας, του **bel**
- Σύντομα αποδείχθηκε ότι το bel ήταν μεγάλο και αντικαταστάθηκε από το **decibel** ή **dB**:

$$\text{Αριθμός decibel} = 10 \log_{10} \frac{p_o}{p_i}$$

ΤΟ DECIBEL

- Ο ορισμός τού λόγου μπορεί να επεκταθεί και σε τάσεις (ή ρεύματα):



$$\frac{p_{out}}{p_{in}} = \frac{v_{out}^2 / R_L}{v_{in}^2 / R_{in}} \stackrel{R_L = R_{in}}{=} \frac{v_{out}^2}{v_{in}^2} = \left(\frac{v_{out}}{v_{in}} \right)^2 = \left(\frac{i_{out}}{i_{in}} \right)^2$$

- Οπότε

$$\text{Αριθμός decibel} = 20 \log_{10} \frac{v_{out}}{v_{in}}$$

ΤΟ DECIBEL

- Τελικά:

$$\text{Αριθμός decibel ισχύος} = 10 \log_{10} \frac{P_{out}}{P_{in}}$$

$$\text{Αριθμός decibel τάσης (ή ρεύματος)} = 20 \log_{10} \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

- Το decibel μπορεί να περιγράψει λόγους (οιωνδήποτε) μεγεθών ή λόγο ενός μεγέθους προς μια συγκεκριμένη στάθμη
- Για παράδειγμα, ο λόγος ισχύων αναφέρεται σε στάθμη 1 W
- Αν η στάθμη αναφοράς γίνει 1 mW, το σημειώνουμε γράφοντας dBm

TO DECIBEL—ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

dB	Λόγος Ισχύων	dB	Λόγος Τάσεων
100	100000000000	100	100000
90	10000000000	90	31623
80	1000000000	80	10000
70	100000000	70	3162
60	10000000	60	1000
50	100000	50	316,2
40	10000	40	100
30	1000	30	31,62
20	100	20	10
10	10	10	3,162
6	$3,981 \approx 4$	6	$1,995 \approx 2$
3	$1,995 \approx 2$	3	$1,413 \approx \sqrt{2}$
1	1,259	1	1,122
0	1	0	1

dB	Λόγος Ισχύων	dB	Λόγος Τάσεων
0	1	0	1
-1	0,794	-1	0,891
-3	$0,501 \approx \frac{1}{2}$	-3	$0,708 \approx \sqrt{\frac{1}{2}}$
-6	$0,251 \approx \frac{1}{4}$	-6	$0,501 \approx \frac{1}{2}$
-10	0,1	-10	0,3162
-20	0,01	-20	0,1
-30	0,001	-30	0,03162
-40	0,0001	-40	0,01
-50	0,00001	-50	0,003162
-60	0,000001	-60	0,001
-70	0,0000001	-70	0,0003162
-80	0,00000001	-80	0,0001
-90	0,000000001	-90	0,00003162
-100	0,0000000001	-100	0,00001

ΣΤΗ ΓΛΩΣΣΑ ΤΟΥ DECIBEL—ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Θέλουμε να αγοράσουμε ένα νέο ενισχυτή για το στερεοφωνικό τού αυτοκινήτου μας
- Θέλουμε έναν ενισχυτή στα 800 W αλλά μπορούμε να πληρώσουμε μόνο μέχρι 350 W
- Πόσα decibel ήχου θα θυσιάσουμε αν αγοράσουμε τον πιο φτηνό ενισχυτή;

$$\Delta \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{350}{800} = -3,59 \text{ dB}$$

- Άρα, ο ενισχυτής των 350 W είναι 3,59 dB πιο «ήσυχος» από αυτόν των 800 W
- Δεδομένου ότι ο μέσος άνθρωπος δεν μπορεί να ξεχωρίσει διαφορές στα αισθητήρια όργανα μικρότερες από 3 dB, το πιο πιθανό είναι ότι δύσκολα θα καταλάβει κανείς τη διαφορά

ΣΤΗ ΓΛΩΣΣΑ ΤΟΥ DECIBEL—ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ

- Αγοράσαμε τελικά ένα ενισχυτή στα 300 W
- Στο μεταξύ κερδίσαμε ένα 13αρι στο ΠΡΟ-ΠΟ και μπορούμε τώρα να αγοράσουμε σχεδόν όποιον ενισχυτή θέλουμε
- Προς τιμή τού ΠΡΟ-ΠΟ, αποφασίζουμε να αγοράσουμε έναν ενισχυτή πιο δυνατό κατά **13 dB**
- Πόσα watt θα δίνει ο νέος ενισχυτής;

$$13 \text{ dB} = 10 \log_{10} A \Rightarrow \frac{13}{10} = \log_{10} A \Rightarrow A = 10^{1,3} \approx 19,95$$

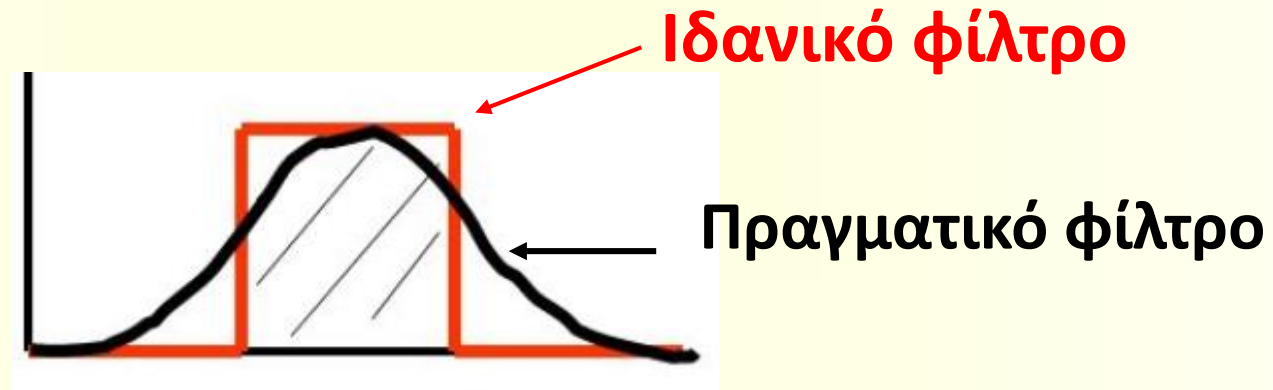
$$13 \text{ dB} = 10 + 3 \xrightarrow{\text{ΠΙΝΑΚΑΣ}} 10 \times 1,995 \approx 19,95$$

- Άρα, ο ενισχυτής θα είναι $20 \times 300 = 6.000 \text{ watt}$!

ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗΣ

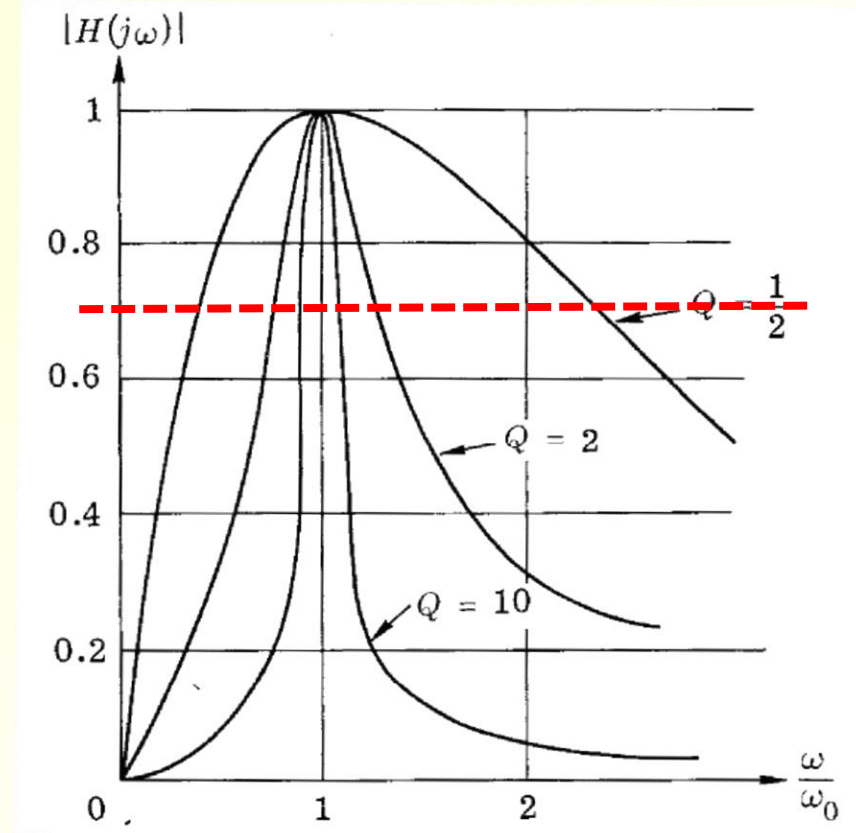
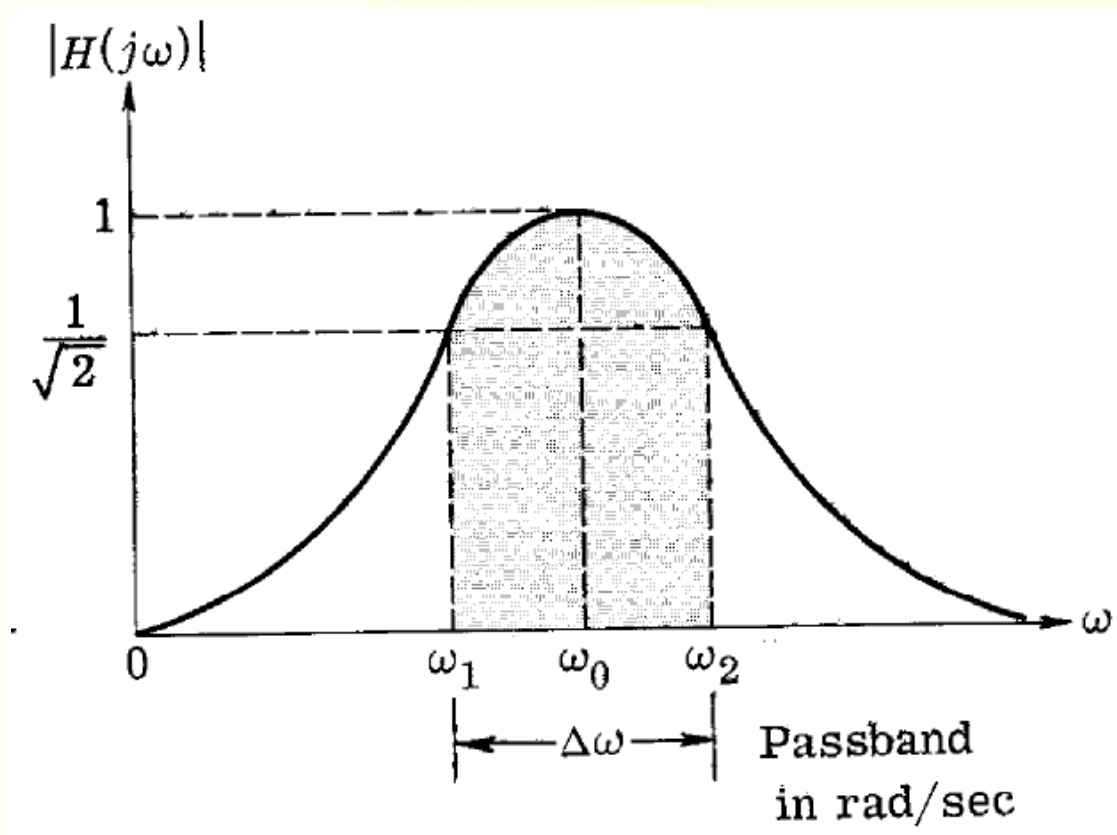
ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ

ΦΙΛΤΡΑ—ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ



- ΕΡΩΤΗΜΑ: Το πραγματικό φίλτρο, ποιές ακριβώς συχνότητες ενισχύει και ποιές εξασθενεί;
- ...Έχουμε συμφωνήσει ότι:
- Το **εύρος ζώνης** (ή **ζώνη διαβατότητας**) (**bandwidth**) για κάθε φίλτρο ορίζεται από δυο **συχνότητες αποκοπής** (**cutoff frequencies**) ω_1 και ω_2 που με τη σειρά τους ορίζονται από τα σημεία στα οποία η καμπύλη απόκρισης είναι ίση με -3 dB τής μέγιστης τιμής της
- Κατά συνέπεια το πλήρες όνομα είναι «**εύρος ζώνης -3 dB**»

ΦΙΛΤΡΑ—ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ

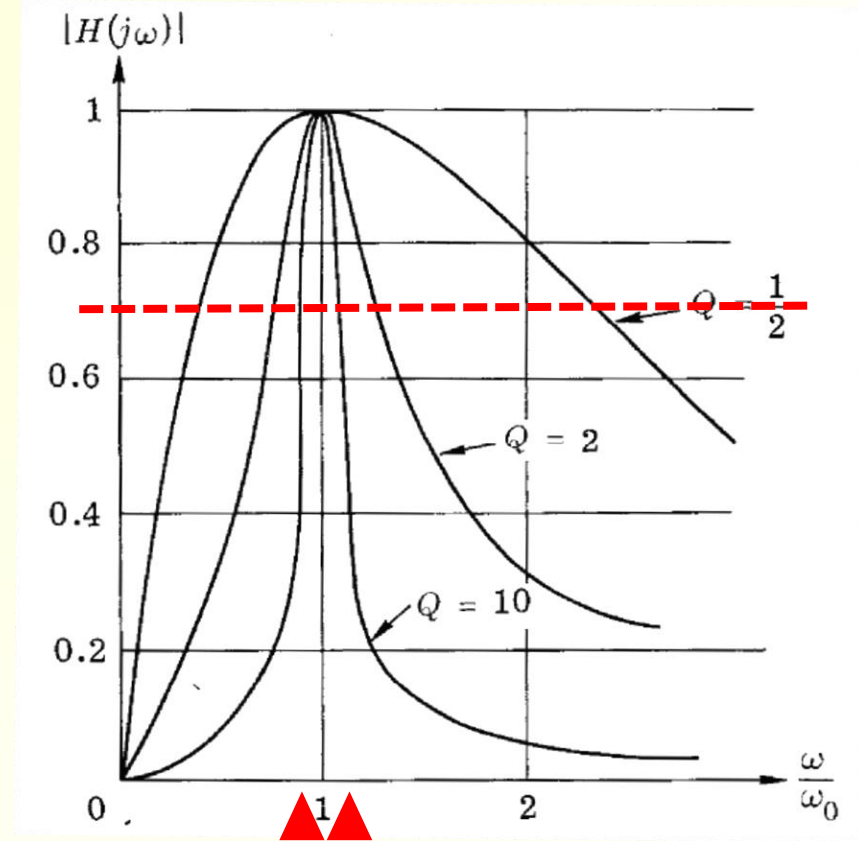


- Το **εύρος ζώνης** (ή **ζώνη διαβατότητας**) (bandwidth) για κάθε φίλτρο ορίζεται από δυο **συχνότητες αποκοπής** (cutoff frequencies) ω_1 και ω_2 που με τη σειρά τους ορίζονται από τα σημεία στα οποία η καμπύλη απόκρισης είναι ίση με -3 dB τής μέγιστης τιμής της

ΦΙΛΤΡΑ—ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ

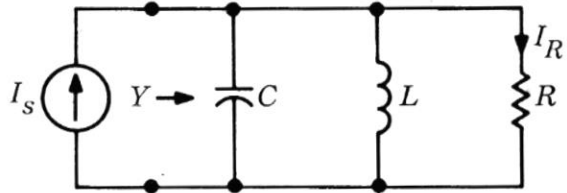
$$Q \gg 1$$

$$\omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) \quad \omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right)$$



ΚΥΚΛΩΜΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ RLC—ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

Parallel resonant circuit

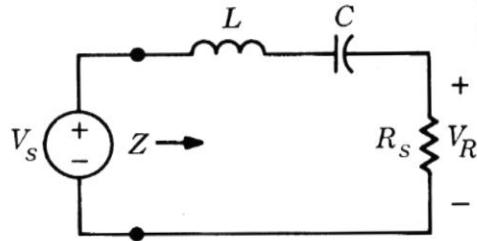


$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$H(j\omega) \triangleq \frac{I_R}{I_s}; \quad Y(j\omega) = \frac{1}{RH(j\omega)}$$

Series resonant circuit



$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s}$$

$$\alpha = \frac{R_s}{2L}$$

$$H(j\omega) \triangleq \frac{V_R}{V_s}; \quad Z(j\omega) = \frac{R_s}{H(j\omega)}$$

$$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

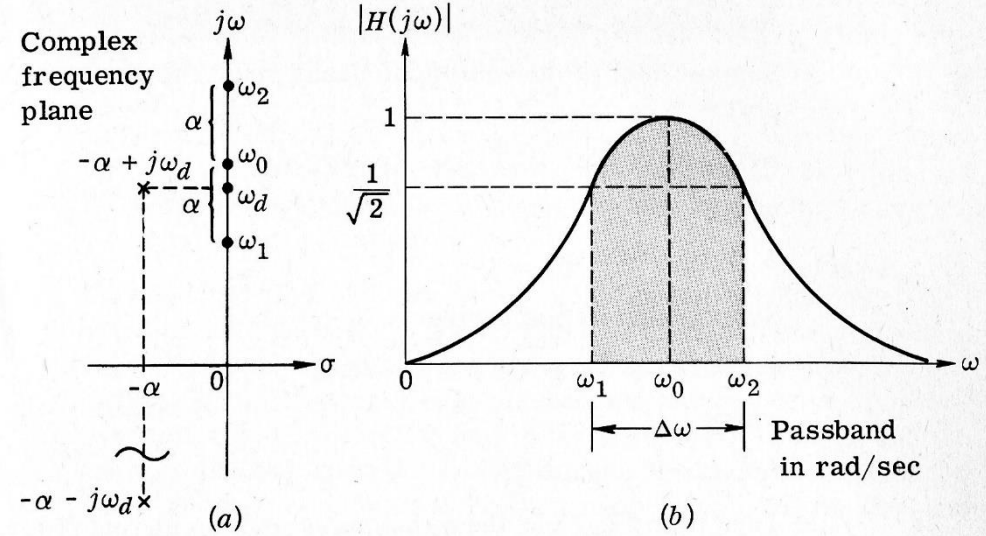
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

If $Q > \frac{1}{2}$ (underdamped case), the natural frequencies are $-\alpha \pm j\omega_d$, where $\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$. If $Q \gg 1$, $\omega_d \approx \omega_0$.

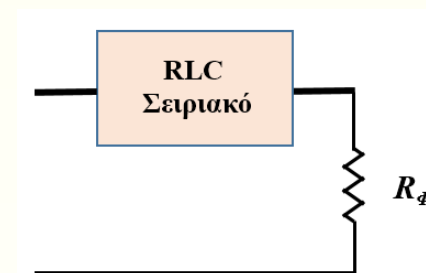
$$\text{3-db angular cutoff frequencies} \begin{cases} \omega_1 \approx \omega_0 - \alpha = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ \omega_2 \approx \omega_0 + \alpha = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \end{cases}$$

$$\text{3-db angular bandwidth } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{rad/sec}$$

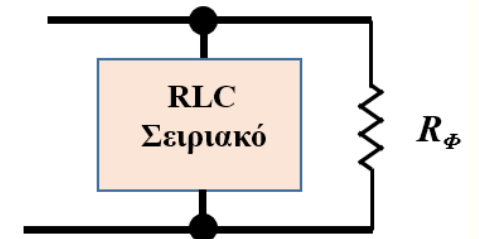
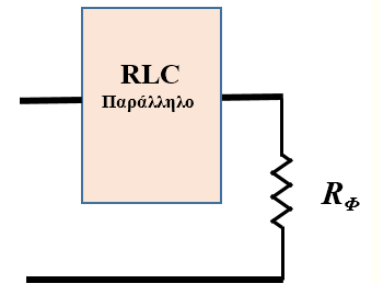
$$\Delta f = f_2 - f_1 \approx \frac{f_0}{Q} \quad \text{Hz}$$



BANDPASS

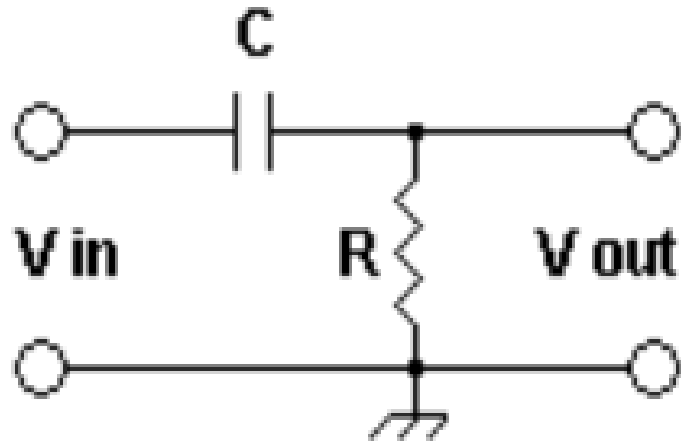


BANDREJECT

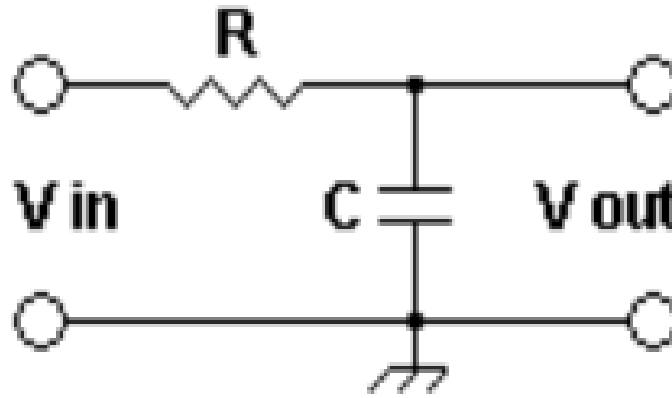
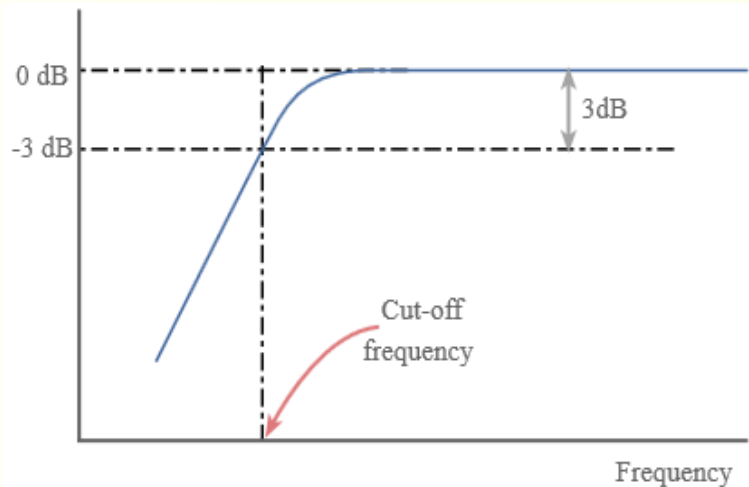


ΚΥΚΛΩΜΑ RC—ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

$$H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}, \quad f_{cutoff} = \frac{1}{2\pi RC}$$



HIGHPASS



LOWPASS

