



ΠΡΟΣΟΧΗ

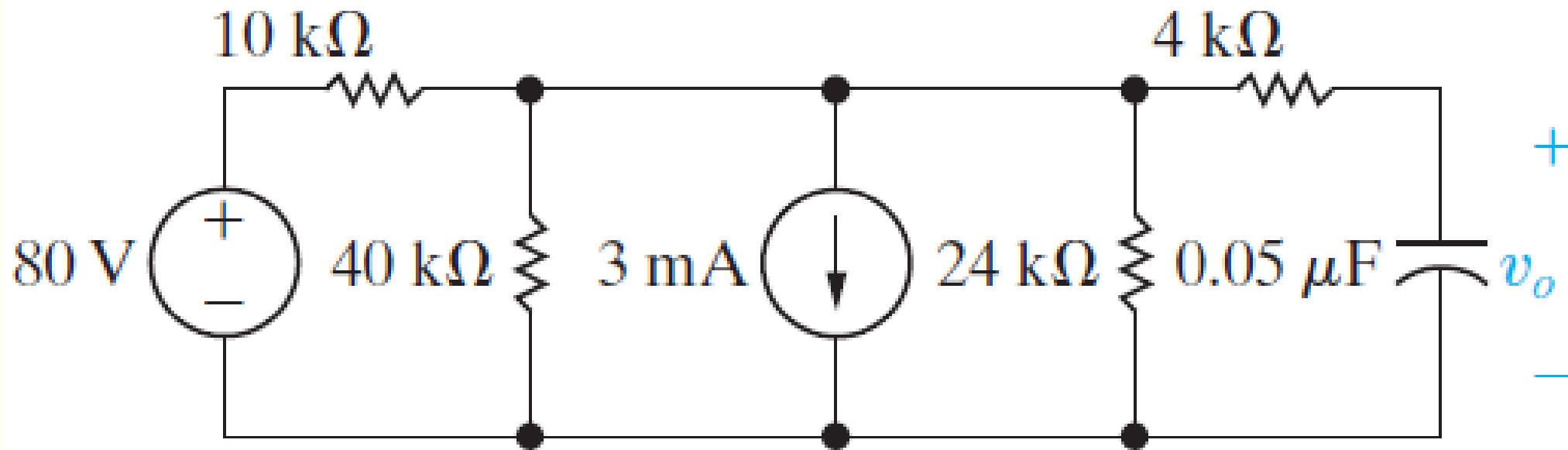
**Οι διαφάνειες είναι ακατάλληλες
για εκμάθηση και αφομοίωση**

**Δημιουργούν μόνο μια
ψευδαίσθηση κατανόησης**

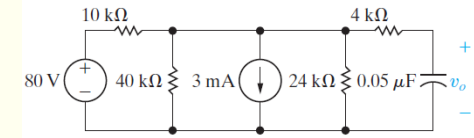
13

RC

- Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Στο $t = 0$ η πηγή τάσης αντιστρέφει την πολικότητά της και η πηγή ρεύματος πέφτει στα 2 mA
- Να υπολογιστεί η τάση $v_o(t)$ για $t \geq 0$



RC



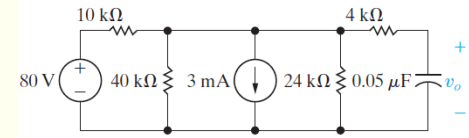
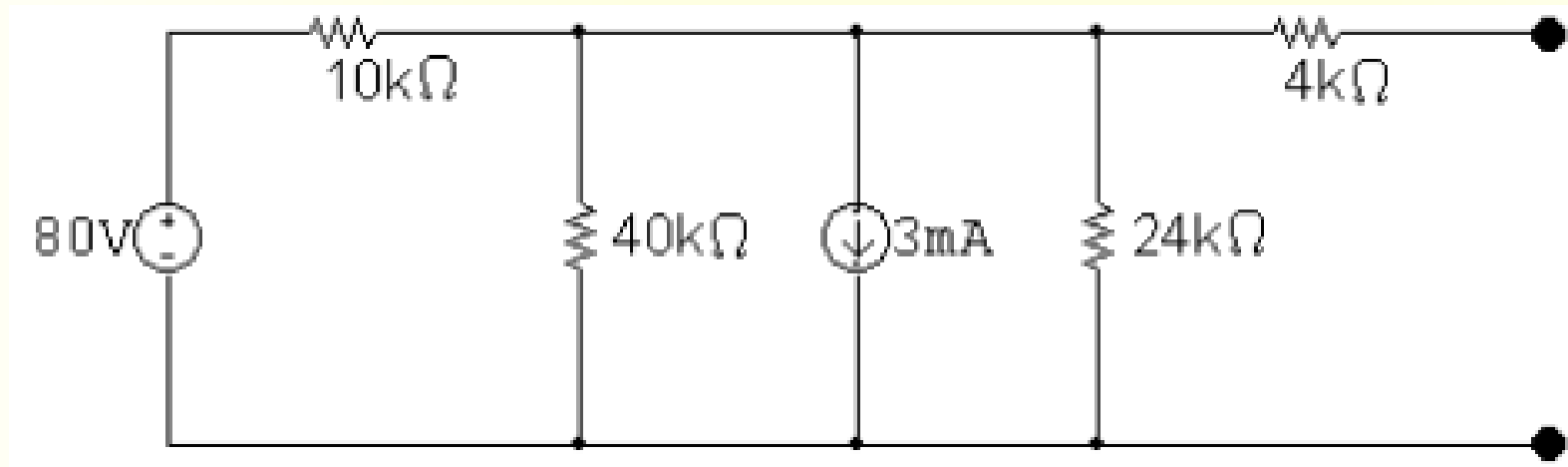
- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

- Εφόσον το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο, έχει περάσει στη **μόνιμη κατάσταση** και πρέπει να υπολογίσουμε την κατάστασή του **αμέσως πριν το γεγονός** που περιγράφεται
- «**Κατάσταση**» σημαίνει την καταγραφή των μεγεθών που θα παραμείνουν αναλλοίωτα για μια μοναδική «χρονική στιγμή» μετά το γεγονός (εδώ στο $t = 0$)
- Τα μεγέθη που παραμένουν αναλλοίωτα είναι οι **τάσεις των πυκνωτών** και τα **ρεύματα των πηνίων**
- **ΔΙΕΥΚΟΛΥΝΣΗ:** Όταν οι διεγέρσεις στο κύκλωμα ήταν **σταθερές** («dc») τότε στη μόνιμη κατάσταση:
 1. Οι πυκνωτές έχουν γίνει ανοικτά κυκλώματα
 2. Τα πηνία είναι ισοδύναμα με βραχυκυκλώματα

RC

- $t < 0$ [«ΠΡΙΝ»]

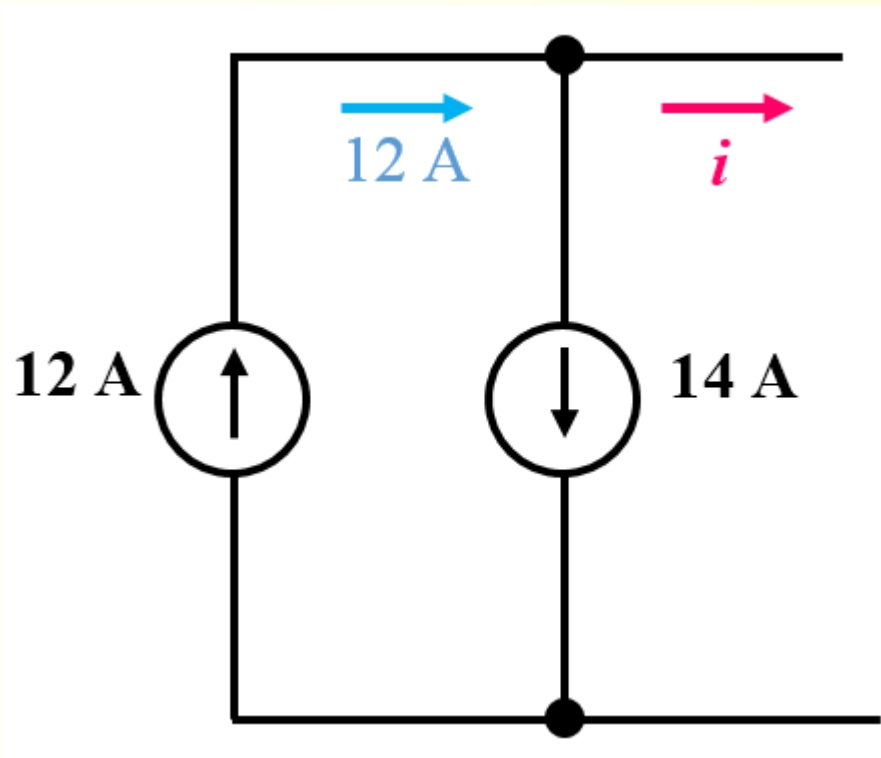
- Εφόσον οι πυκνωτές έχουν γίνει ανοικτά κυκλώματα και τα πηνία έχουν γίνει βραχυκυκλώματα, το κύκλωμα είναι



- Η αντίσταση $4\text{ k}\Omega$ είναι «στον αέρα»
- Μετασχηματίζουμε την πηγή τάσης σε πηγή ρεύματος 8 mA
- Θα υπάρχουν τρεις παράλληλες αντιστάσεις 10 , 40 και $24\text{ k}\Omega$
- Θα υπάρχουν δυο παράλληλες πηγές ρεύματος, 8 mA και 3 mA

ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ

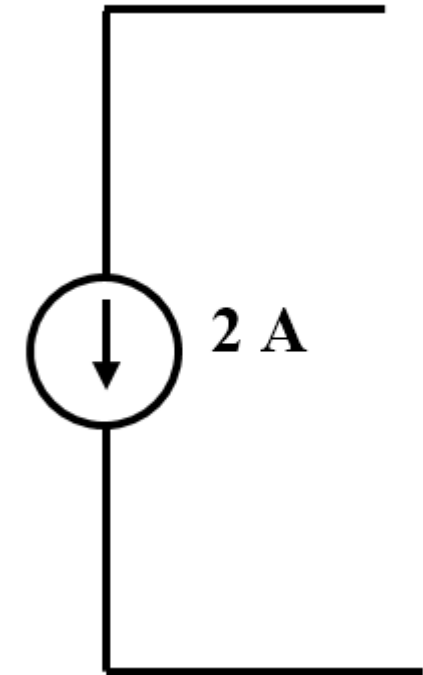
- ΠΗΓΕΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΣΥΝΔΕΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ
- Για να αποφευχθούν «ατυχήματα» εφαρμόζουμε τον ΝΡΚ



$$12 = 14 + i \Rightarrow i = -2$$



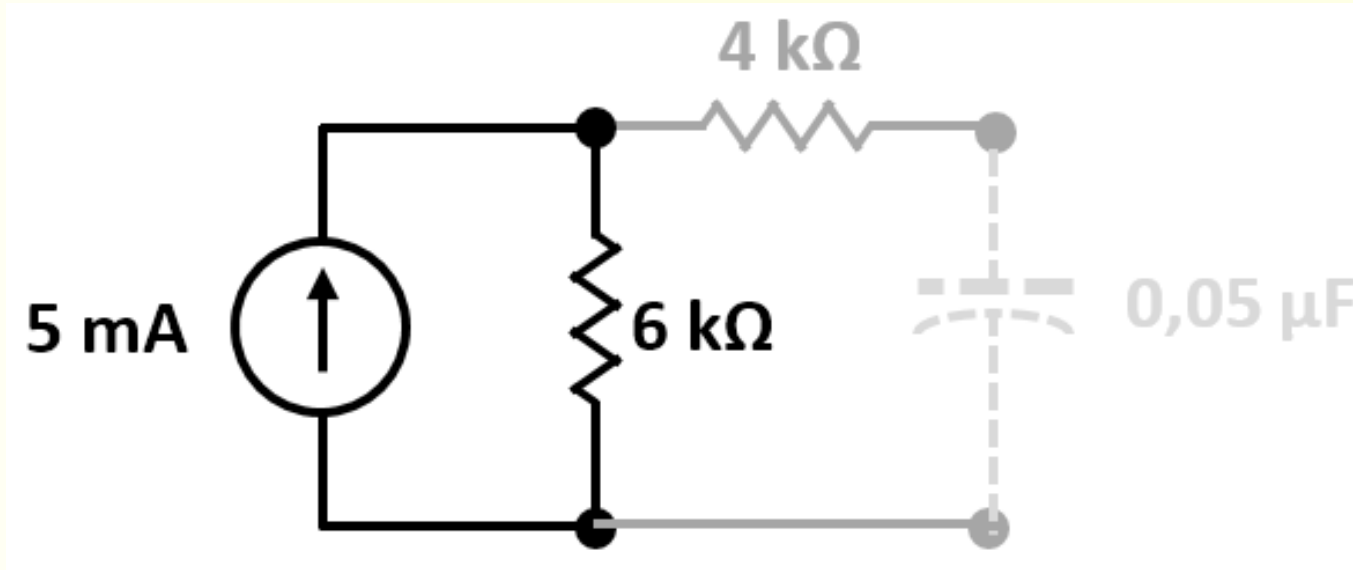
$$14 + i - 12 = 0 \Rightarrow i = -2$$



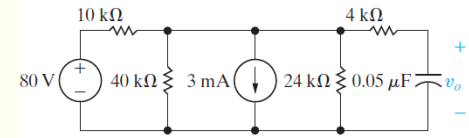
RC

• $t < 0$

- Τρεις παράλληλες αντιστάσεις 10, 40 και 24 k Ω : $\rightarrow$ 6 k Ω
- Δυο παράλληλες πηγές ρεύματος, 8 mA και 3 mA: $\rightarrow$ 5 mA
- Και το κύκλωμα γίνεται:



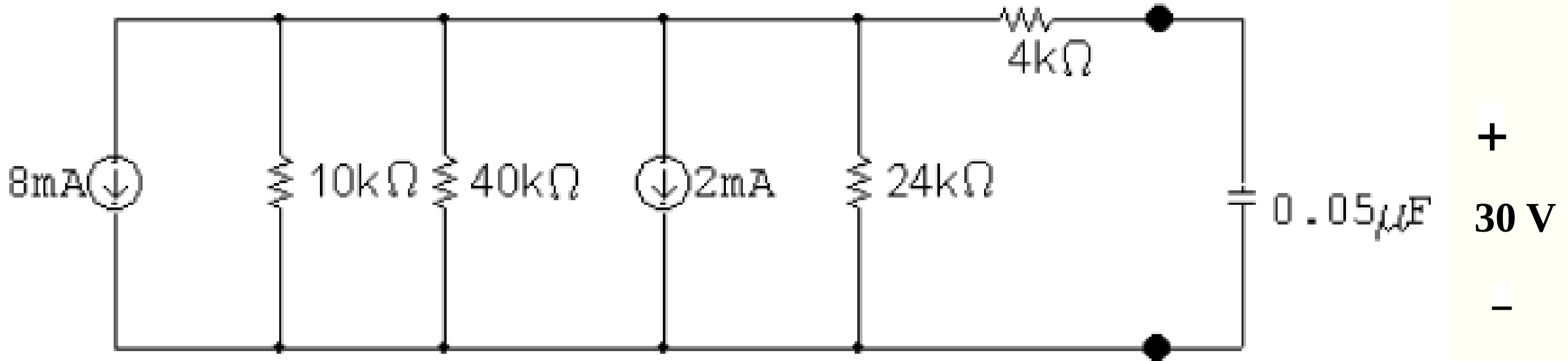
- Άρα, ο πυκνωτής έχει φορτιστεί στην τάση που βλέπει και που είναι:
 $5 \text{ mA} \times 6000 \Omega = \mathbf{30 \text{ V}}$



RC

• $t > 0$

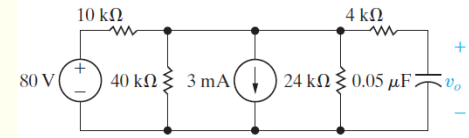
• Το κύκλωμα είναι τώρα $[v_o(0^-) = v_o(0^+) = 30 \text{ V}]$:



όπου έχει ήδη γίνει ο μετ/μός τής πηγής τάσης αριστερά (όπως προηγουμένως)

• Ας απλοποιήσουμε πάλι το κύκλωμα:

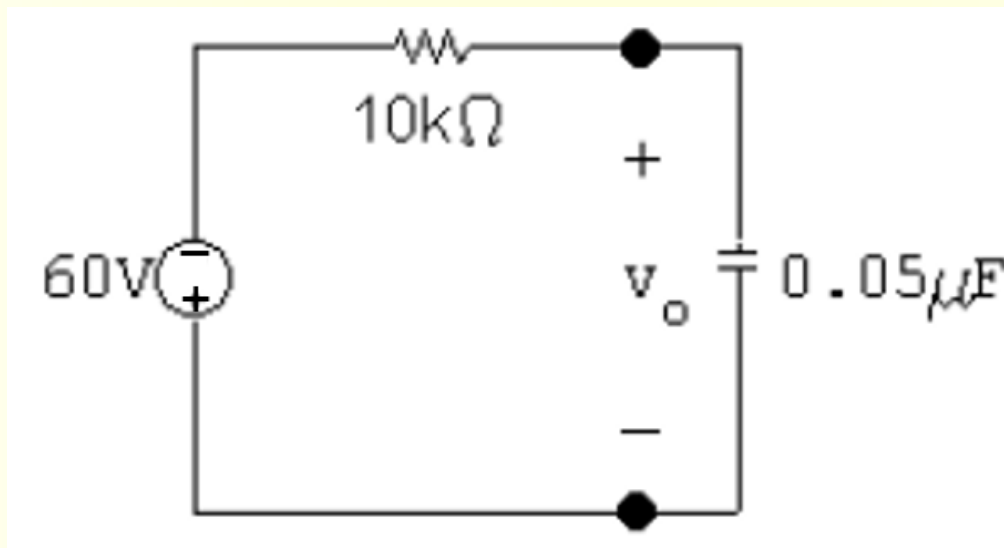
- Θα υπάρχουν τρεις παράλληλες αντιστάσεις 10, 40 και 24 kΩ
- Θα υπάρχουν δυο παράλληλες πηγές ρεύματος, 8 mA και 2 mA



RC

• $t > 0$

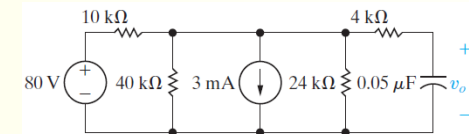
• Και τελικά



+

30 V

-



- Αυτό είναι ένα κύκλωμα RC και κατηγοριοποιούμε το πρόβλημα:
- Πρόκειται για **πλήρη βηματική απόκριση**
- Μπορούμε να το λύσουμε κανονικά ή να εφαρμόσουμε τον τύπο:

$$v(t) = [v(0) - v(\infty)] e^{-\frac{1}{RC}t} + v(\infty), \quad t \geq 0$$



$$v_o(t) = [v_o(0) - v_o(\infty)] e^{-\frac{1}{RC}t} + v_o(\infty), \quad t \geq 0$$

$$v_o(0) = 30, \quad v_o(\infty) = -60,$$

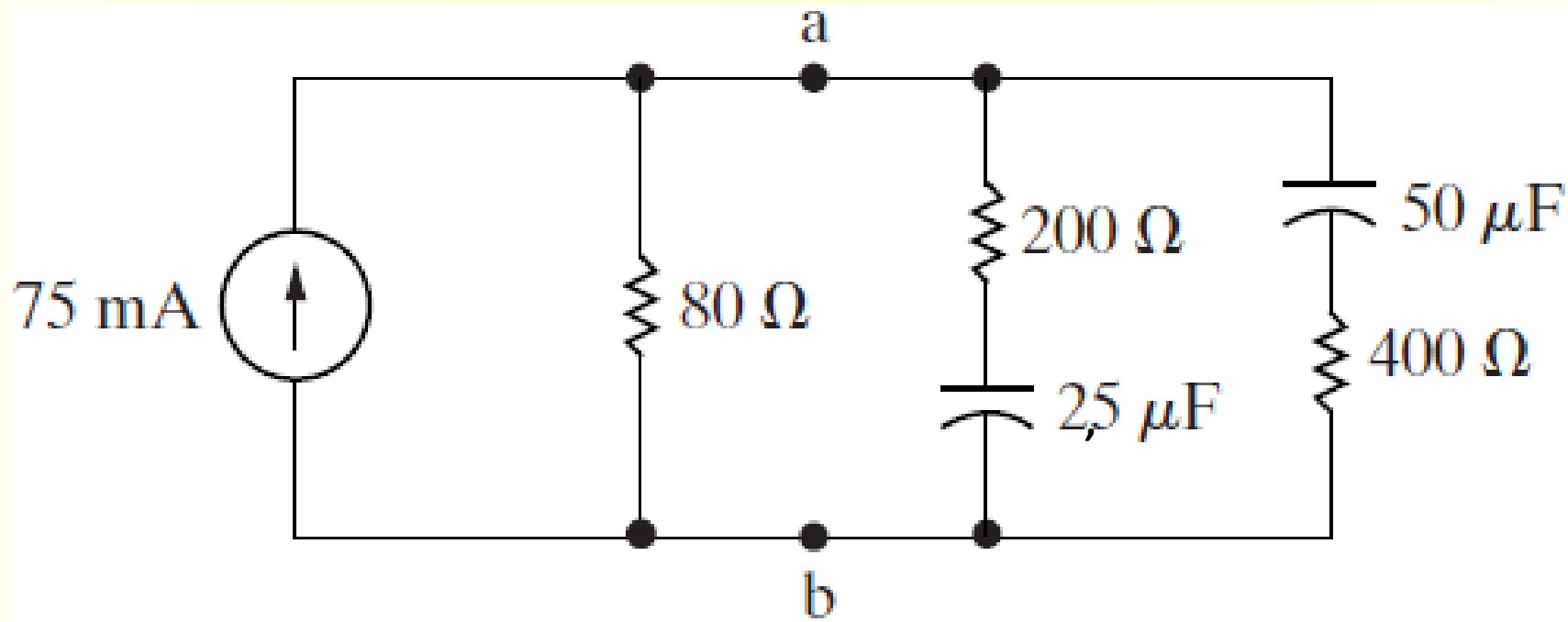
$$RC = 10000 \times 0,05 \times 10^{-6} = 0,5 \times 10^{-3} = 0,5 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow v_o(t) = 90 e^{-2000t} - 60, \quad t \geq 0$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

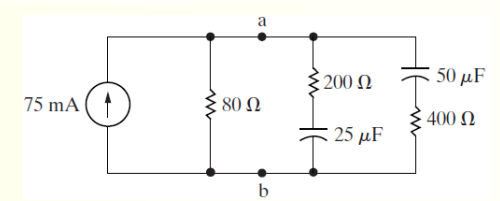
14

RC



- Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Στο $t = 0$ ένα κατσαβίδι πέφτει και βραχυκυκλώνει τα σημεία a και b
- Υποθέτοντας ότι το κατσαβίδι έχει μηδενική αντίσταση, υπολογίστε:
 - Το ρεύμα που διαρρέει το κατσαβίδι όταν $t = 0^+$ και όταν $t = \infty$
 - Το ρεύμα που διαρρέει το κατσαβίδι για $t \geq 0^+$

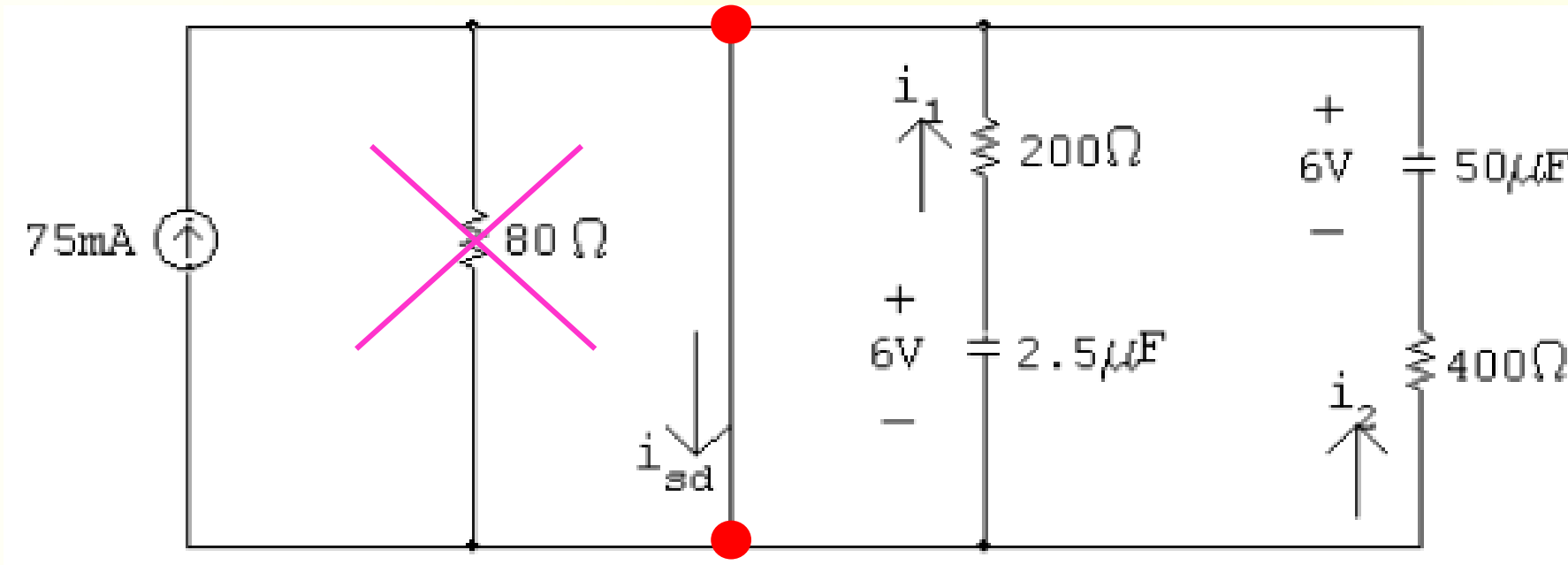
RC



- $t < 0$ [ή $t = 0^-$ ή «ΠΡΙΝ»]
- Δεδομένου ότι η **διέγερση** στο κύκλωμα είναι **σταθερή** («dc»), τότε στη μόνιμη κατάσταση οι πυκνωτές έχουν γίνει ανοικτά κυκλώματα
- Εφόσον οι πυκνωτές έχουν γίνει ανοικτά κυκλώματα, οι αντιστάσεις «τους» είναι στον αέρα και η τάση στην οποία έχουν φορτιστεί οι πυκνωτές είναι η τάση v_{ab} (όλο το ρεύμα της πηγής περνάει από την αντίσταση $80\ \Omega$)
- $v_{ab} = 75 \times 10^{-3} \times 80 = 6\ \text{V}$

RC

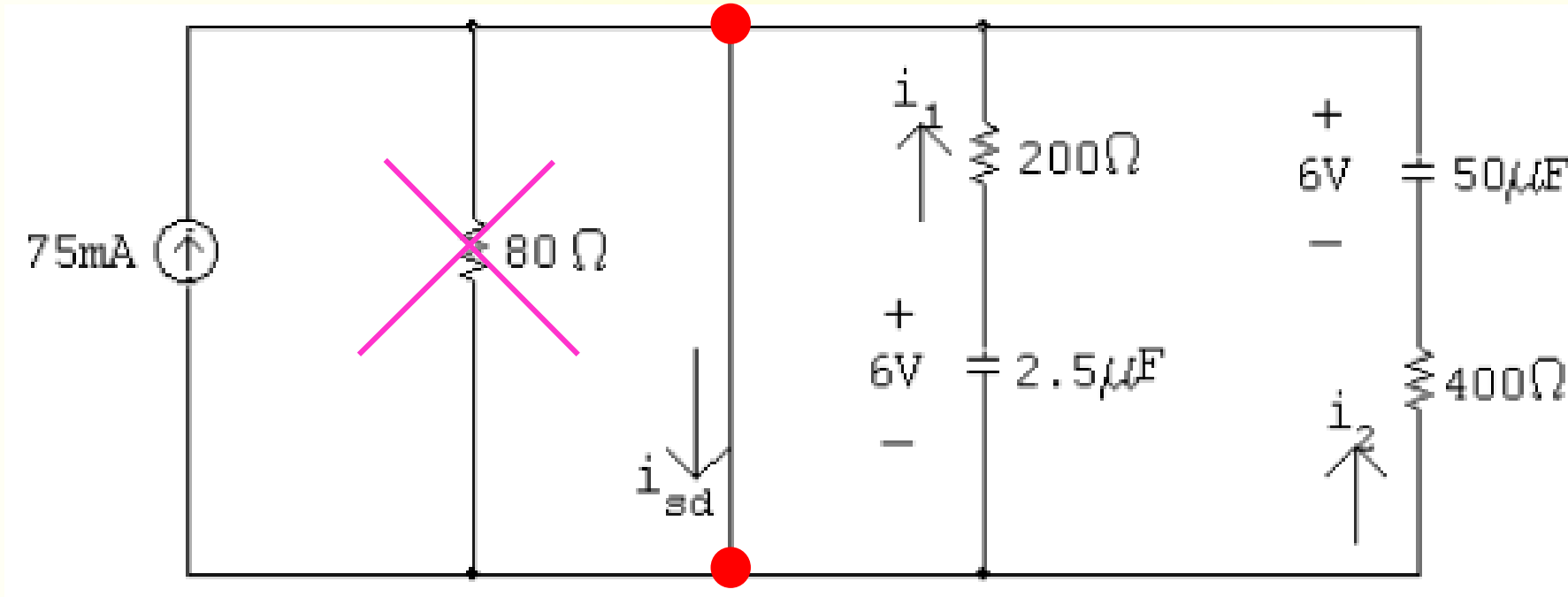
- $t > 0$ [ή $t \geq 0^+$ ή «**META**»]
- Το κύκλωμα γίνεται



- Οι δυο κόκκινοι δίσκοι είναι το βραχυκύκλωμα που έχει «τεντωθεί» για να διερευνήσουμε το ρεύμα στο κατσαβίδι
- Το βραχυκύκλωμα εξουδετερώνει την αντίσταση των $80\ \Omega$

RC

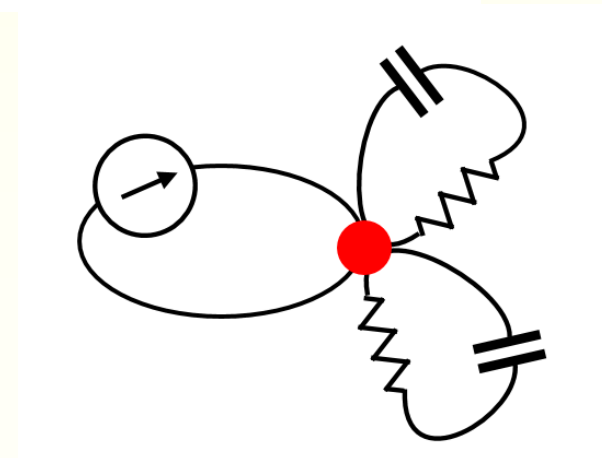
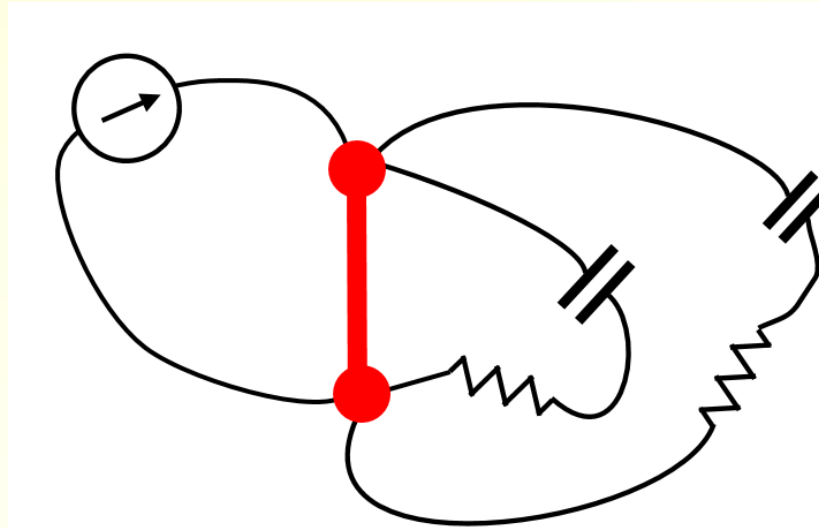
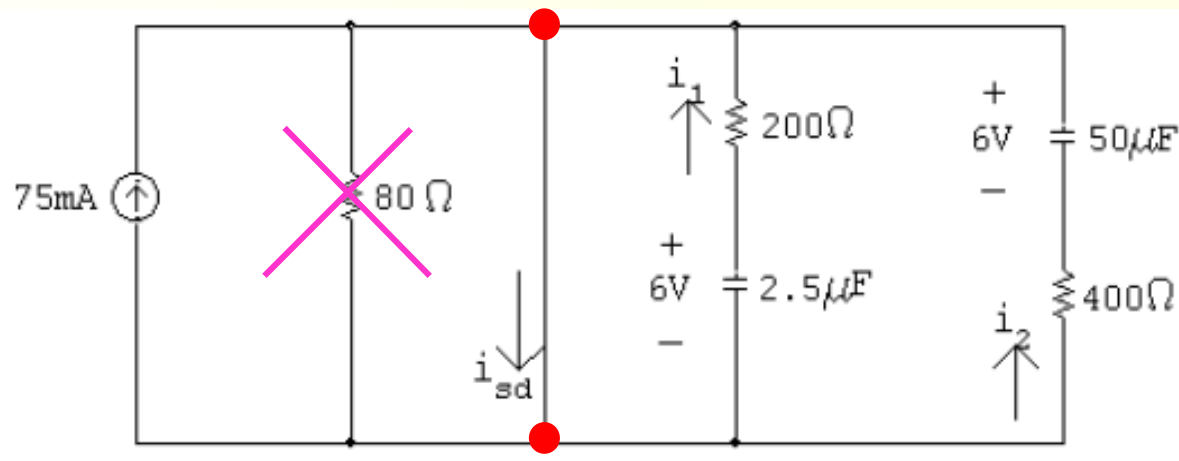
- $t > 0$ [ή $t \geq 0^+$ ή «META»]



- Από NPK: $i_{sd}(0^+) = 0,075 + i_1 + i_2 = 0,075 + 6/200 + 6/400 = 120 \text{ mA}$
- Όταν $t = \infty$ οι πυκνωτές έχουν εκφορτιστεί ($\Rightarrow$ είναι ανοικτά κυκλώματα) και όλο το ρεύμα της πηγής περνάει από το κατσαβίδι/βραχυκύκλωμα «αγνοώντας» πια και τις τρεις αντιστάσεις: $i_{sd}(\infty) = 75 \text{ mA}$

RC

- $t > 0$ [ή $t \geq 0^+$ ή «**META**»]
- Εναλλακτικοί τρόποι αναπαράστασης του ίδιου κυκλώματος



RC

- $t > 0$ [ή $t \geq 0^+$ ή «ΜΕΤΑ»]

- Από NPK:

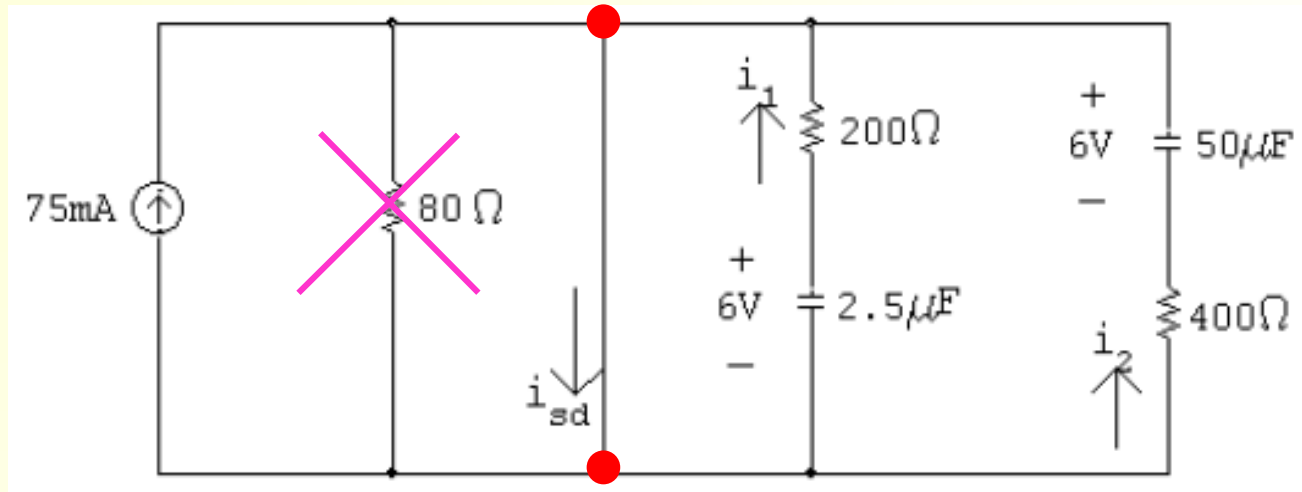
$$i_{sd}(t) = 0,075 + i_1(t) + i_2(t)$$

- Τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ αντιστοιχούν σε ΑΜΔ για κύκλωμα RC

- Οπότε με τον τύπο $x(t) = [x(0) - x(\infty)]e^{-\frac{1}{RC}t} + x(\infty)$, $t \geq 0$

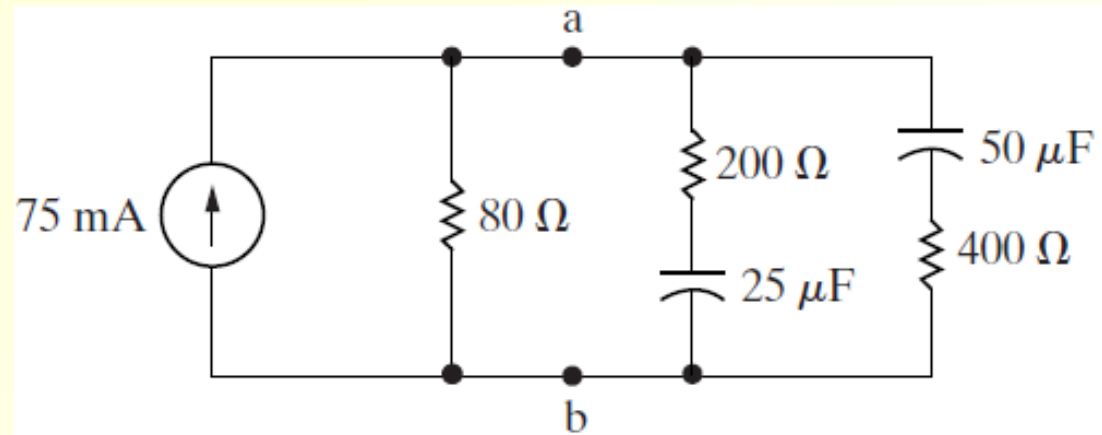
$$\left. \begin{array}{l} R = 200, C = 2,5 \mu\text{F} \Rightarrow RC = 50 \text{ ms} \\ i_1(0) = 30 \text{ mA} \end{array} \right\} \rightarrow i_1(t) = 0,03e^{-20t}, \quad t \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} R = 400, C = 50 \mu\text{F} \Rightarrow RC = 2 \text{ ms} \\ i_2(0) = 15 \text{ mA} \end{array} \right\} \rightarrow i_2(t) = 0,015e^{-50t}, \quad t \geq 0$$

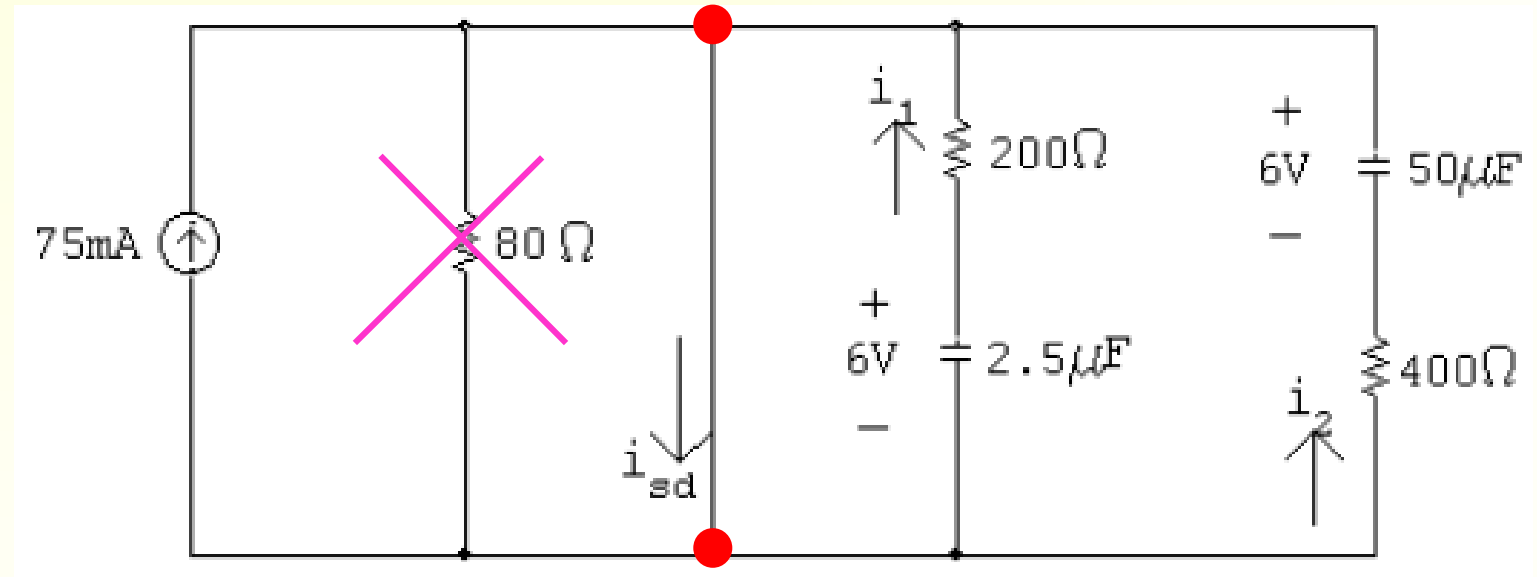


RC

- $t > 0$ [ή $t \geq 0^+$ ή «META»]



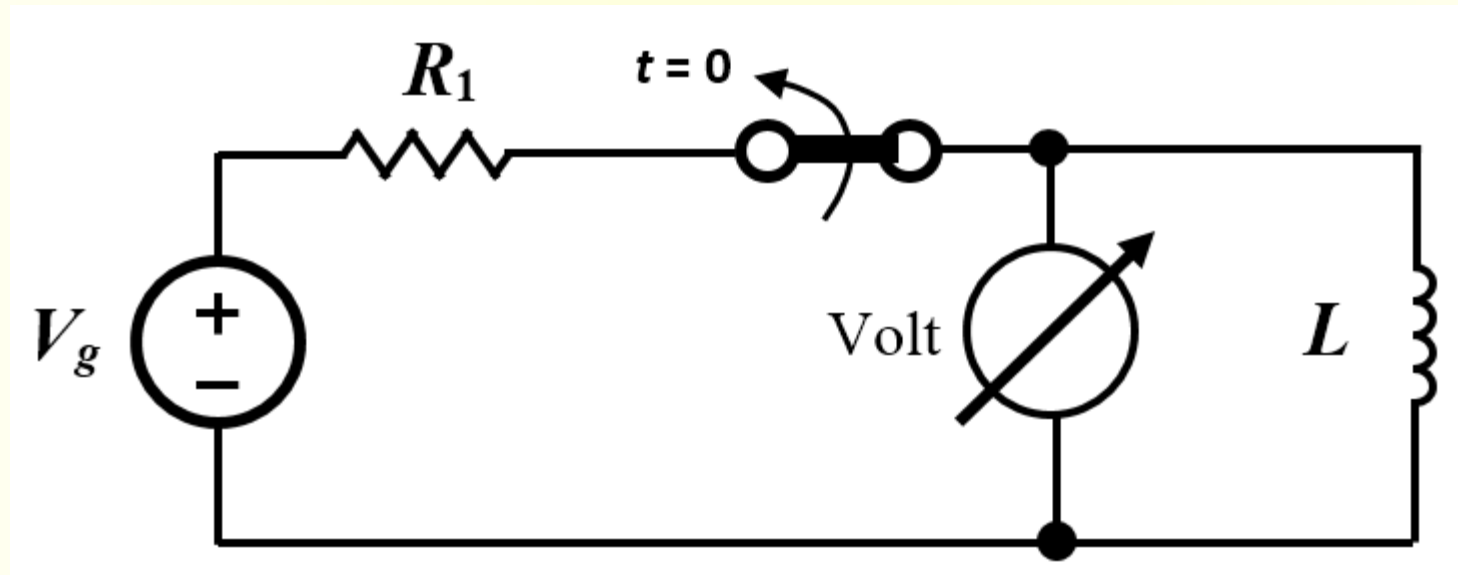
- Τελικά:



$$i_{sd}(t) = 0,075 + 0,03e^{-20t} + 0,015e^{-50t}, \quad t \geq 0$$

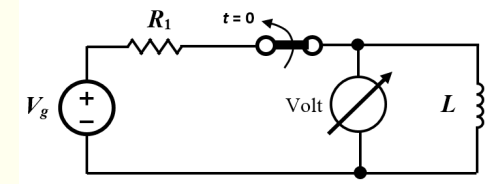
15

RL



- Η πηγή τάσης V_g είναι σταθερή (dc) [$V_g + R_1$: μπαταρία]
- Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Στο $t = 0$ ο διακόπτης ανοίγει και:
 - Εμφανίζεται τόξο στις επαφές τού διακόπτη
 - Το βολτόμετρο καίγεται
- Τι ακριβώς συνέβη;

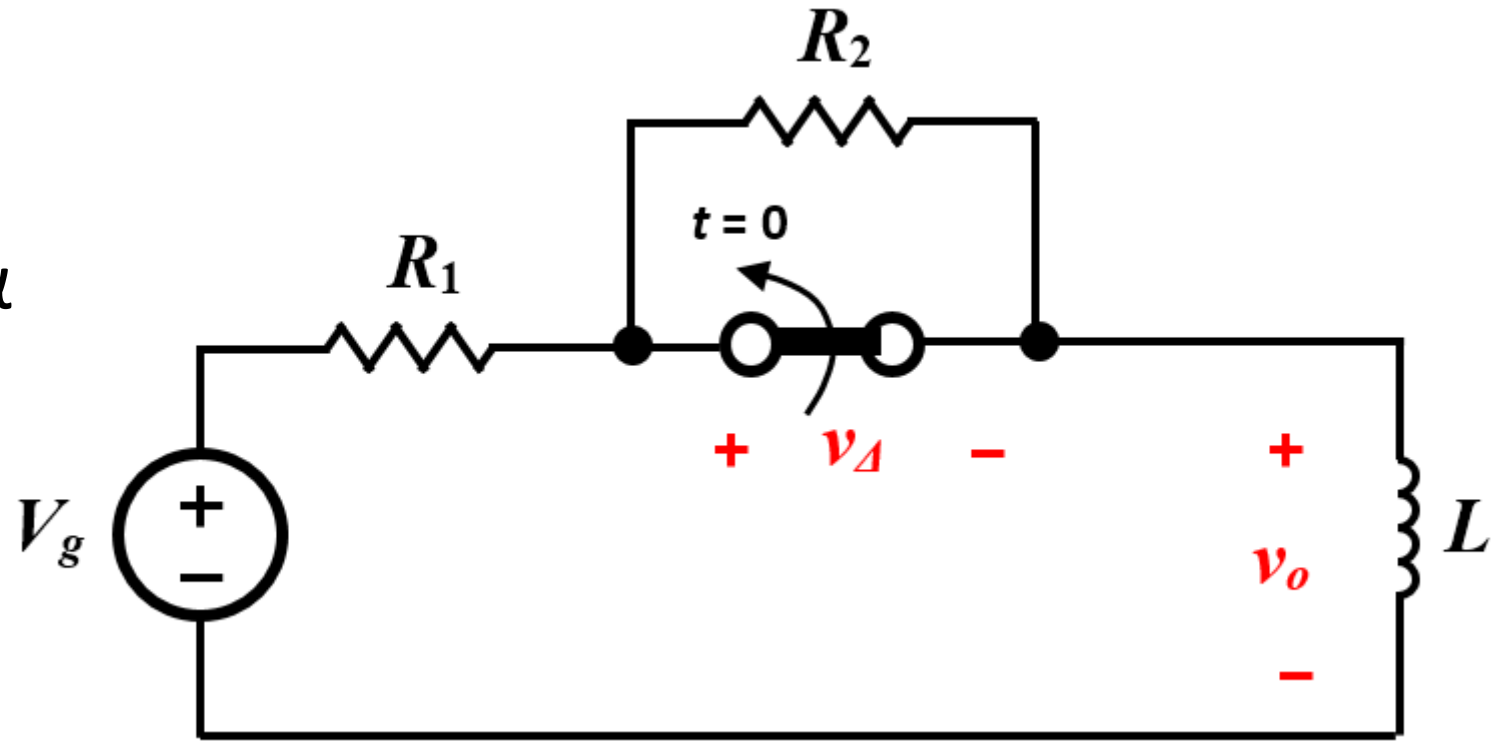
RL



- Το τι συνέβη είναι εύκολο: εμφανίστηκε υπέρταση
- Το τι **ακριβώς** συνέβη **ΔΕΝ** είναι εύκολο
- Μετά το άνοιγμα του διακόπτη μένει το πηνίο μόνο του (στον αέρα) και η ανάλυση δεν είναι εύκολη
- Αυτό που ξέρουμε καλά να αναλύουμε είναι το κύκλωμα RL
- Πώς θα βάλουμε το RL στο παιχνίδι;
- Σε τέτοιες δύσκολες καταστάσεις χρησιμοποιούμε το εξής **τέχνασμα**:
 1. παρεμβάλλουμε μια αντίσταση R στο κύκλωμα
 2. κάνουμε την ανάλυση
 3. αφήνουμε την αντίσταση R να πάει στο 0 ή στο άπειρο (ανάλογα με την παρέμβαση...)

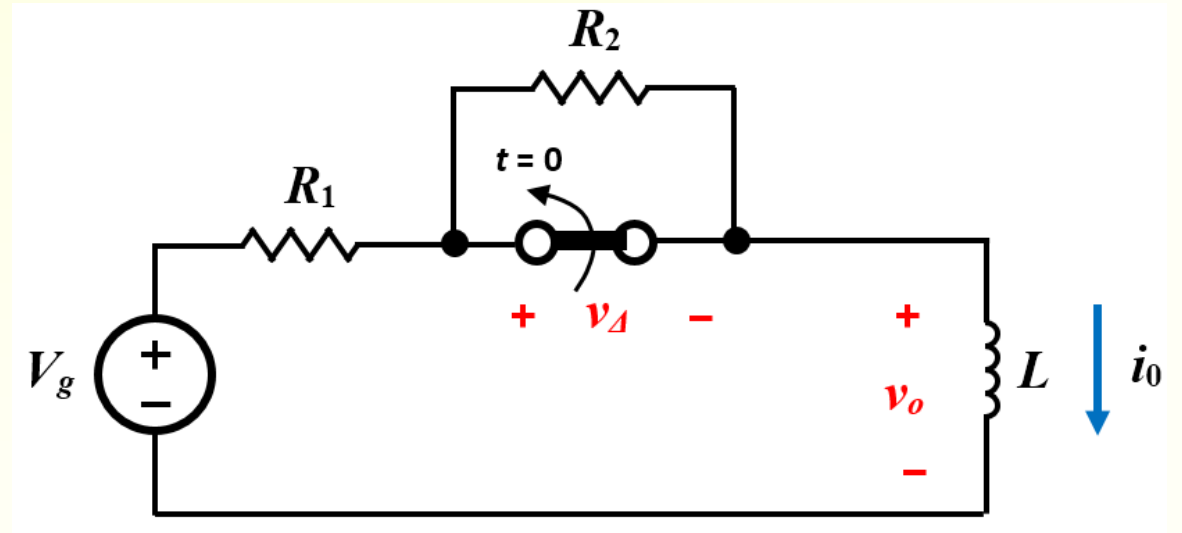
RL

- Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Στο $t = 0$ ο διακόπτης ανοίγει
- Να υπολογιστούν τα εξής:
 1. Η τάση $v_o(t)$
 2. Η τάση $v_o(t)$ καθώς $R_2 \rightarrow \infty$
 3. Η τάση $v_{\Delta}(t)$
 4. Η τάση $v_{\Delta}(t)$ καθώς $R_2 \rightarrow \infty$



RL

- $t < 0$ [ή $t = 0^-$ ή «ΠΡΙΝ»]
- Δεδομένου ότι η **διέγερση** στο κύκλωμα είναι **σταθερή** («dc»), τότε στη μόνιμη κατάσταση το πηνίο έχει γίνει βραχυκύκλωμα
- Τότε, το ρεύμα είναι $i_o = \frac{V_g}{R_1}$



RL

- $t > 0$ [«META»]
- Το ρεύμα στο πηνίο θα μείνει αμετάβλητο για μια στιγμή

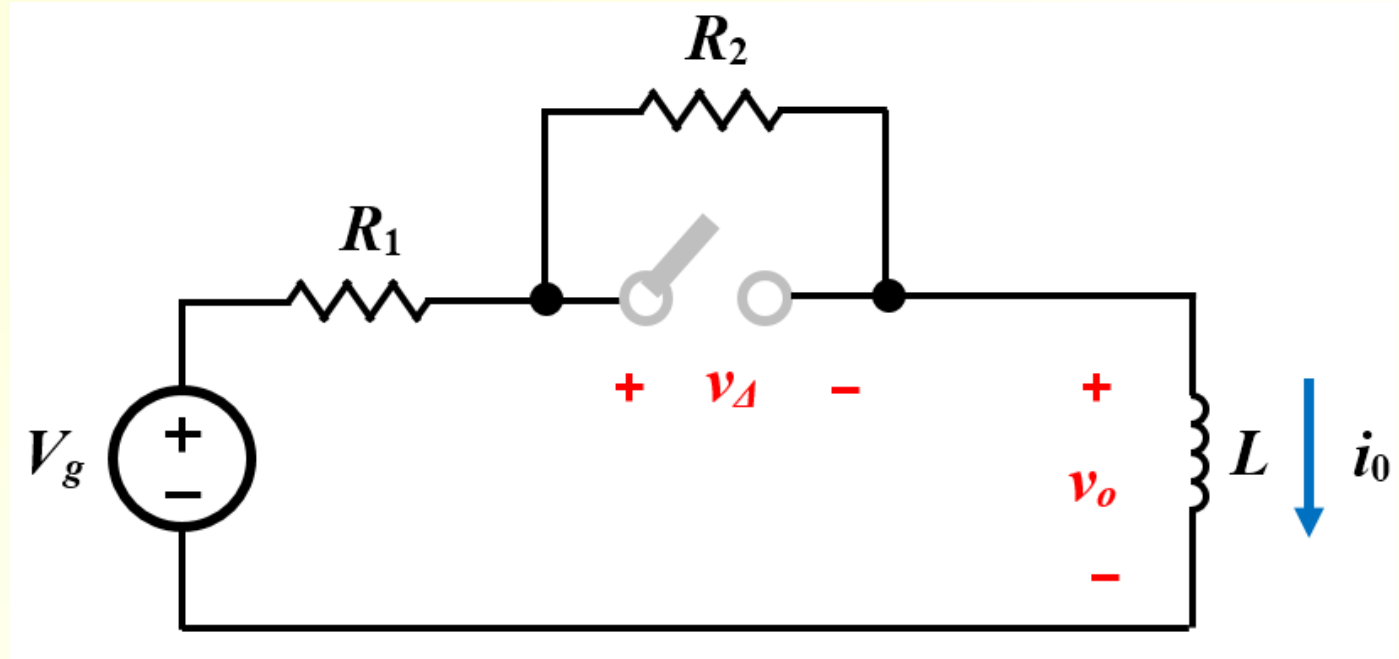
$$i_o(0^+) = i_o(0^-) = \frac{V_g}{R_1}$$

- Από NTK:

$$-V_g + R_1 \times \frac{V_g}{R_1} + R_2 \times \frac{V_g}{R_1} + v_o(0^+) = 0 \Rightarrow v_o(0^+) = -R_2 \times \frac{V_g}{R_1}$$

- Επίσης

$$v_o(\infty) = 0$$

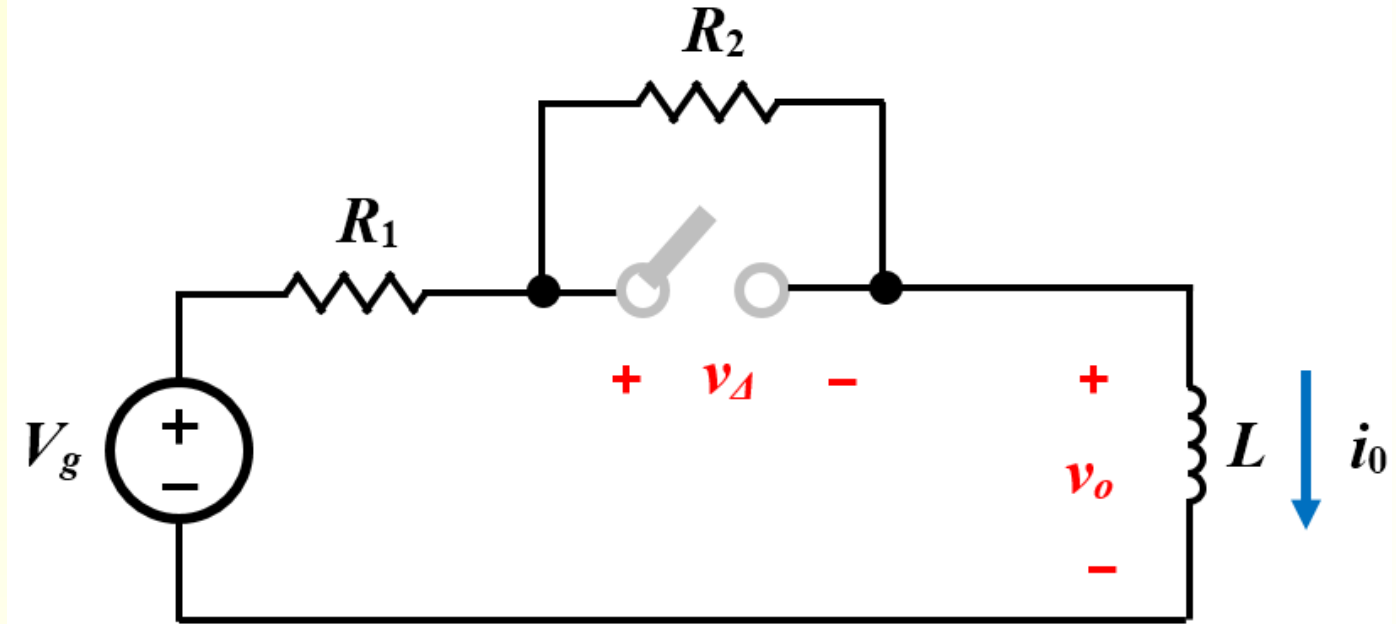


RL

• $t > 0$ [«META»]

1. Έχουμε κύκλωμα RL με πλήρη απόκριση, οπότε από τον γενικό τύπο

$$T = \frac{L}{R_1 + R_2}$$



$$v_o(t) = [v_o(0) - v_o(\infty)]e^{-\frac{1}{T}t} + v_o(\infty), \quad t \geq 0$$

$$= \left(-R_2 \times \frac{V_g}{R_1} - 0 \right) e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} + 0 = -R_2 \times \frac{V_g}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$$

2. Οπότε: $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} v_o(t) = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left(-R_2 \times \frac{V_g}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} \right) = 0$

ΟΜΩΣ

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} v_o(0^+) = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left(-R_2 \frac{V_g}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{L}0} \right) = -\infty$$

RL

• $t > 0$ [«META»]

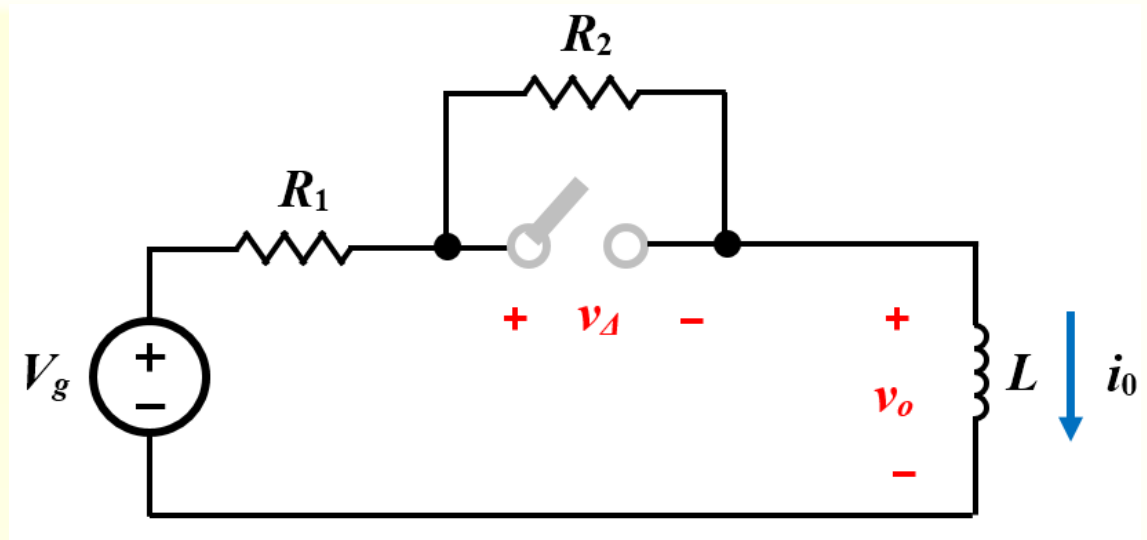
3. $v_{\Delta}(t) = R_2 i_o(t), \quad t \geq 0$

$$i_o(t) = [i_o(0) - i_o(\infty)] e^{-\frac{1}{T}t} + i_o(\infty)$$

$$T = \frac{L}{R_1 + R_2}, \quad i_o(0) = \frac{V_g}{R_1}, \quad i_o(\infty) = \frac{V_g}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$i_o(t) = \left(\frac{V_g}{R_1} - \frac{V_g}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t} + \frac{V_g}{R_1 + R_2}, \quad t \geq 0$$

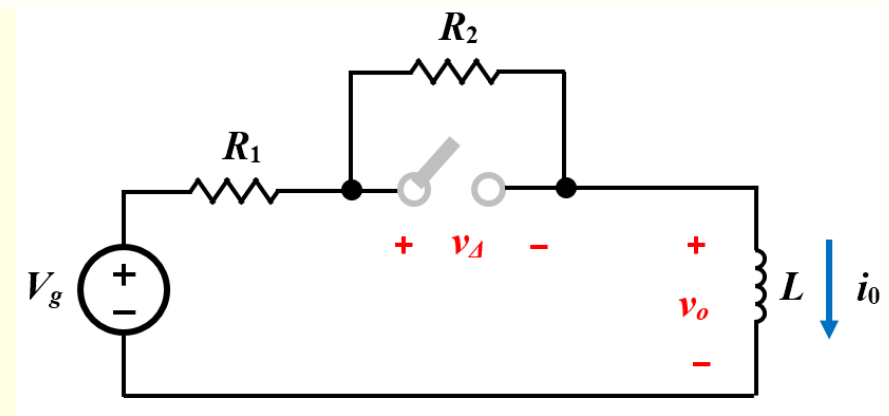
$$v_{\Delta}(t) = R_2 i_o(t) = \left(\frac{R_2 V_g}{R_1} - \frac{R_2 V_g}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t} + \frac{R_2 V_g}{R_1 + R_2}, \quad t \geq 0$$



RL

• $t > 0$ [«META»]

4. Οπότε



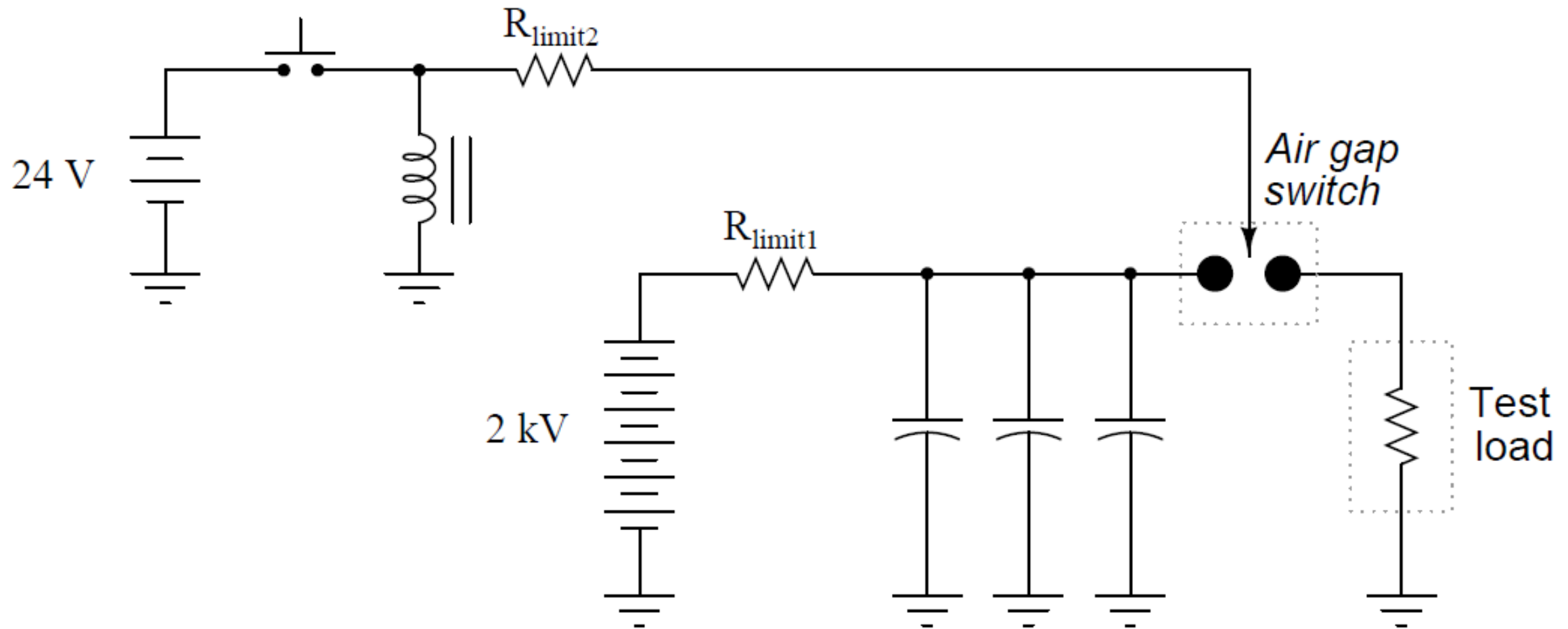
$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} v_{\Delta}(t) = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{R_2 V_g}{R_1} - \frac{R_2 V_g}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} + \frac{R_2 V_g}{R_1 + R_2} \right]$$

$$= V_g$$

$$\text{Αλλά: } v_{\Delta}(0^+) = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{R_2 V_g}{R_1} - \frac{R_2 V_g}{R_1 + R_2} \right) e^{0^+} + \frac{R_2 V_g}{R_1 + R_2} \right] = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{R_2 V_g}{R_1} \right) \right] = \infty$$

Και γι' αυτό εμφανίζεται το τόξο στα άκρα τού διακόπτη

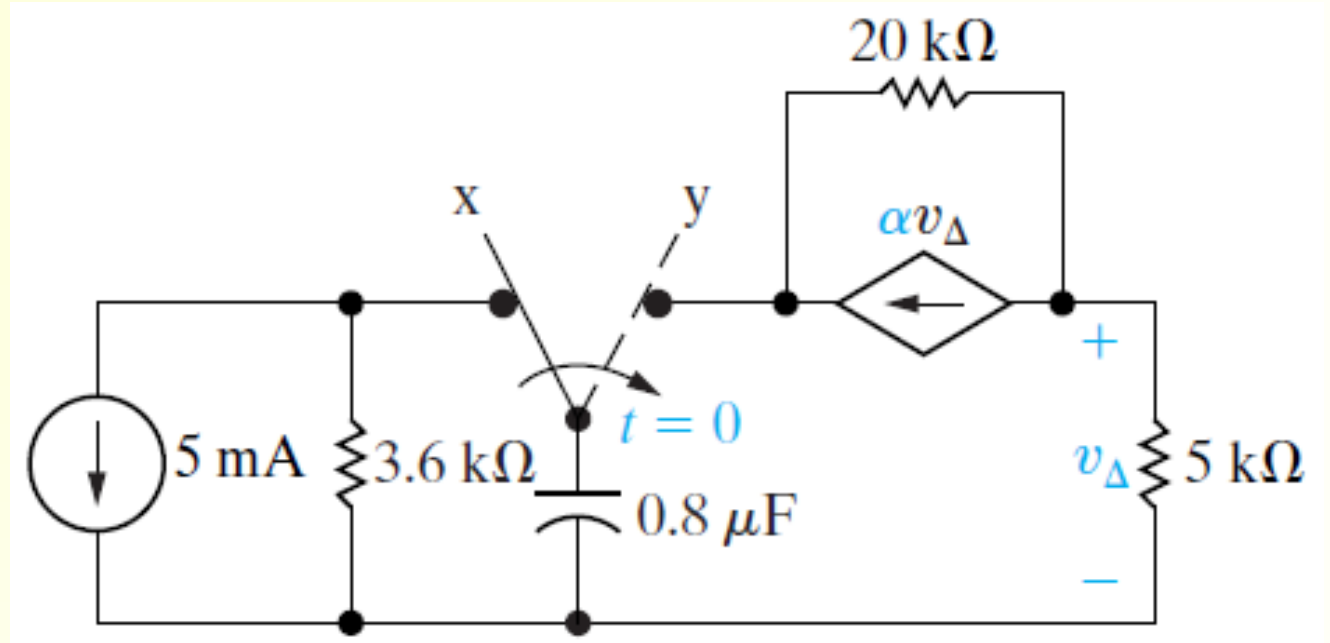
RL - ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ



CAPACITOR BANK

16

RC



- Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Στο $t = 0$ ο διακόπτης μεταβαίνει ακαριαία από το x στο y
 1. Να υπολογιστεί η τιμή του α που κάνει τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος ίση με 40 ms για $t \geq 0$
 2. Για το α που υπολογίστηκε προηγουμένως, να υπολογιστεί η τάση $v_\Delta(t)$ για $t \geq 0$

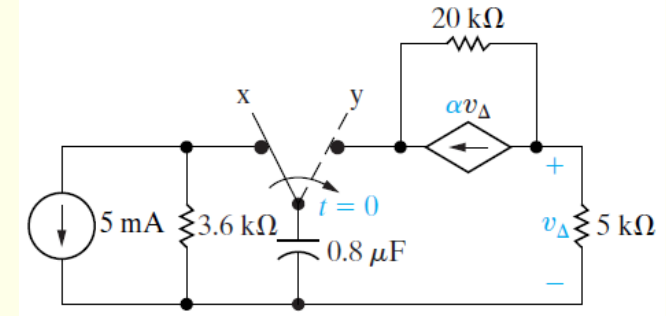
RC

- $t < 0$ [«ΠΡΙΝ»]

- Ο πυκνωτής θα έχει φορτιστεί στην τάση που βλέπει, που είναι σταθερή και ίση με $5 \times 10^{-3} \times 3,6 \times 10^3 = 18 \text{ V}$, αλλά προσοχή στην πολικότητα όταν έρθει η ώρα να τη χρησιμοποιήσουμε

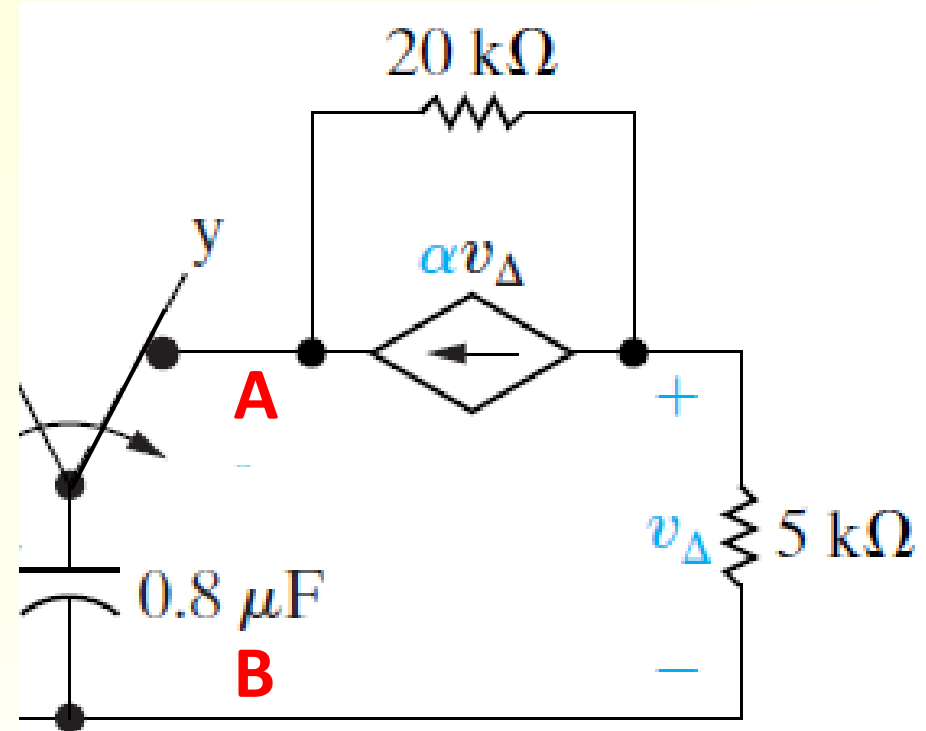
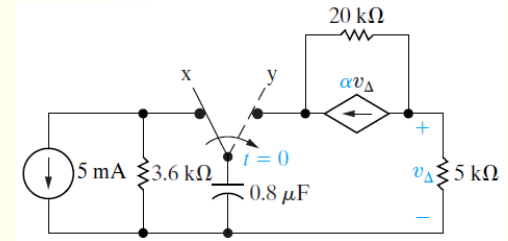
- $t > 0$ [«ΜΕΤΑ»]

- Ο διακόπτης είναι τώρα στο γ
- Ο πυκνωτής βλέπει απέναντί του ένα πολύπλοκο κύκλωμα που περιέχει όμως μόνο πηγές και αντιστάσεις
- Άρα, για να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε εύκολα επιλύσιμο RC, αρκεί να βρούμε το ισοδύναμο Thevenin (και μάλιστα μόνο την αντίσταση!!) για το κύκλωμα απέναντι από τον πυκνωτή



RC

- $t > 0$ [«META»]
- Ο διακόπτης είναι τώρα στο y
- Για να υπολογίσουμε την αντίσταση Thevenin στα A, B μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα με τη γνωστή πηγή (αφού ξέρουμε* ότι θα χρειαστεί μόνο η R_{Th} , ο κανονικός τρόπος ίσως απαιτήσει περισσότερη δουλειά για γενικά κυκλώματα)



* ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ

- Όταν ένα κύκλωμα περιέχει **μόνο** εξαρτημένες πηγές και αντιστάσεις (σε οποιοδήποτε αριθμό), τότε το ισοδύναμό του Thevenin θα είναι μία μόνο αντίσταση (που μπορεί να προκύψει και αρνητική)
- Αυτό συμβαίνει επειδή αν το ισοδύναμο περιείχε ανεξάρτητη πηγή, δηλ. πηγή ισχύος, θα σήμαινε ότι το αρχικό κύκλωμα μπορούσε να αποδώσει ισχύ εκ του μηδενός
- Το παραπάνω ισχύει και όταν το κύκλωμα περιέχει κι άλλου είδους στοιχεία, χωρίς αποθηκευμένα ενέργεια όμως—**φυσικά το ισοδύναμο θα έχει έως και ένα πυκνωτή και ένα πηνίο εκτός από την αντίσταση**

RC

• $t > 0$ [«META»]

• NTK: $v_T = 20 \times 10^3 (i_T + \alpha v_\Delta) + 5 \times 10^3 i_T$

• $v_\Delta = 5 \times 10^3 i_T$

$\Rightarrow v_T = 25 \times 10^3 i_T + 20 \times 10^3 \alpha (5 \times 10^3 i_T)$

• $R_{Th} = v_T / i_T = 25 \times 10^3 + 100 \times 10^6 \alpha$

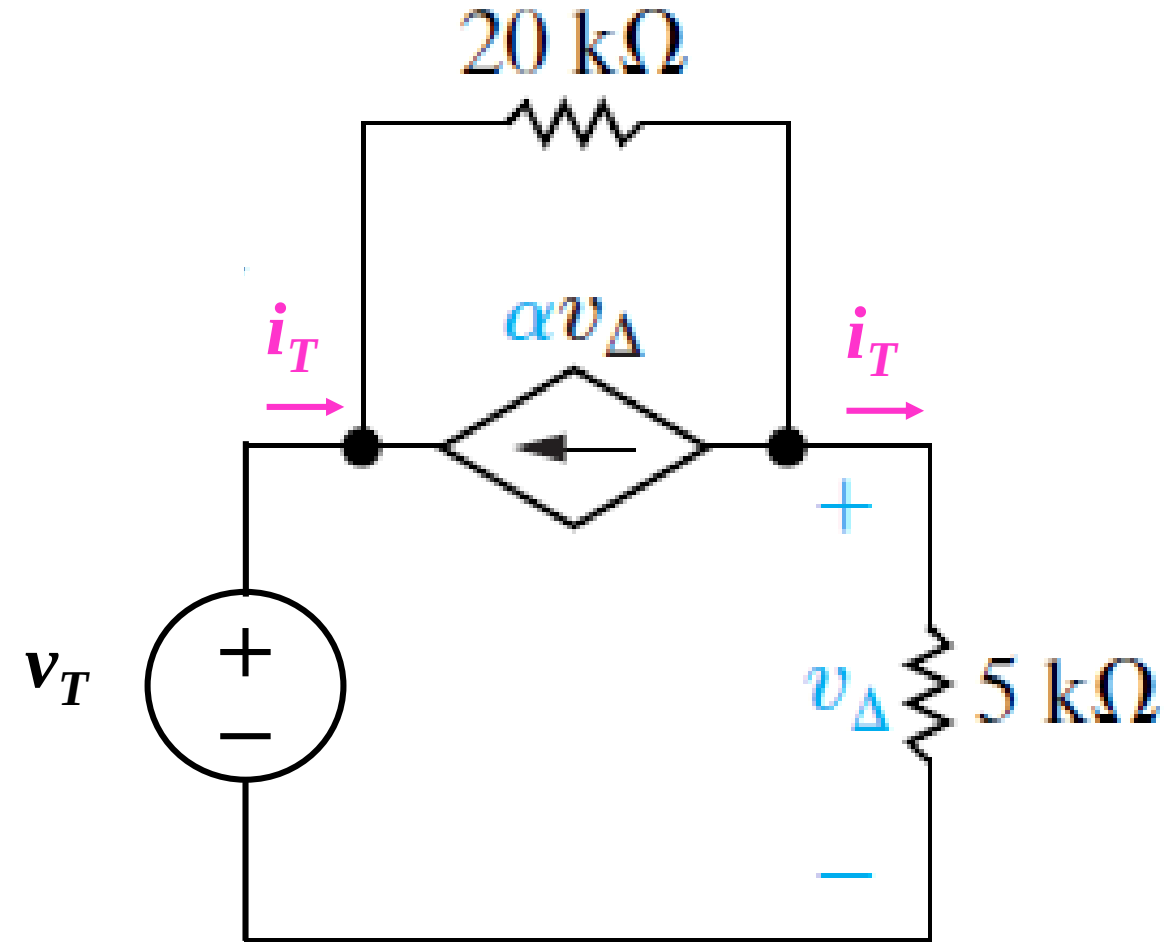
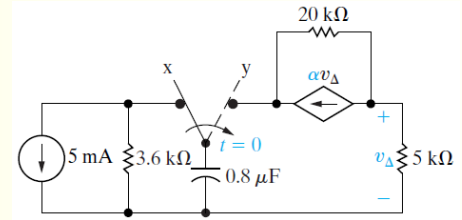
• $\tau = R_{Th} C = 40 \times 10^{-3} = R_{Th} (0,8 \times 10^{-6})$

$\Rightarrow R_{Th} = 50 \text{ k}\Omega$

• Οπότε:

• $50.000 = 25.000 + 100 \times 10^6 \alpha$

$\Rightarrow \alpha = 25.000 / (100 \times 10^6) \Rightarrow \alpha = 2,5 \times 10^{-4}$



RC

- $t > 0$ [«META»]

- Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής κύκλωμα:

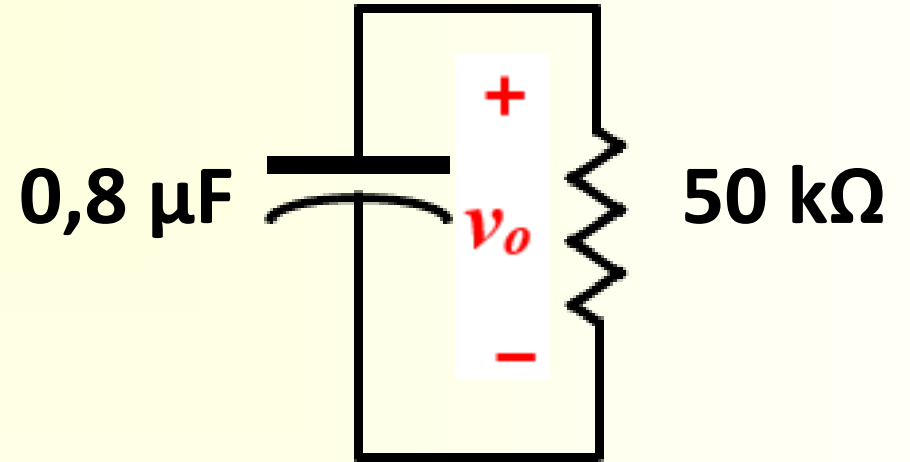
- Πρόκειται για RC σε ΑΜΔ

- Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο με $v_o(\infty) = 0$

- Από προηγούμενως: $v_o(0^-) = -(5 \times 10^{-3} \times 3,6 \times 10^3) = -18 \text{ V}$

- Η σταθερά χρόνου τ έχει ήδη υπολογιστεί ή πιο σωστά επιβεβαιωθεί σαν 40 ms

- Τελικά:
$$v_o(t) = v_o(0)e^{-\frac{1}{T}t}$$
$$= -18e^{-25t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$



RC

- $t > 0$ [«META»]

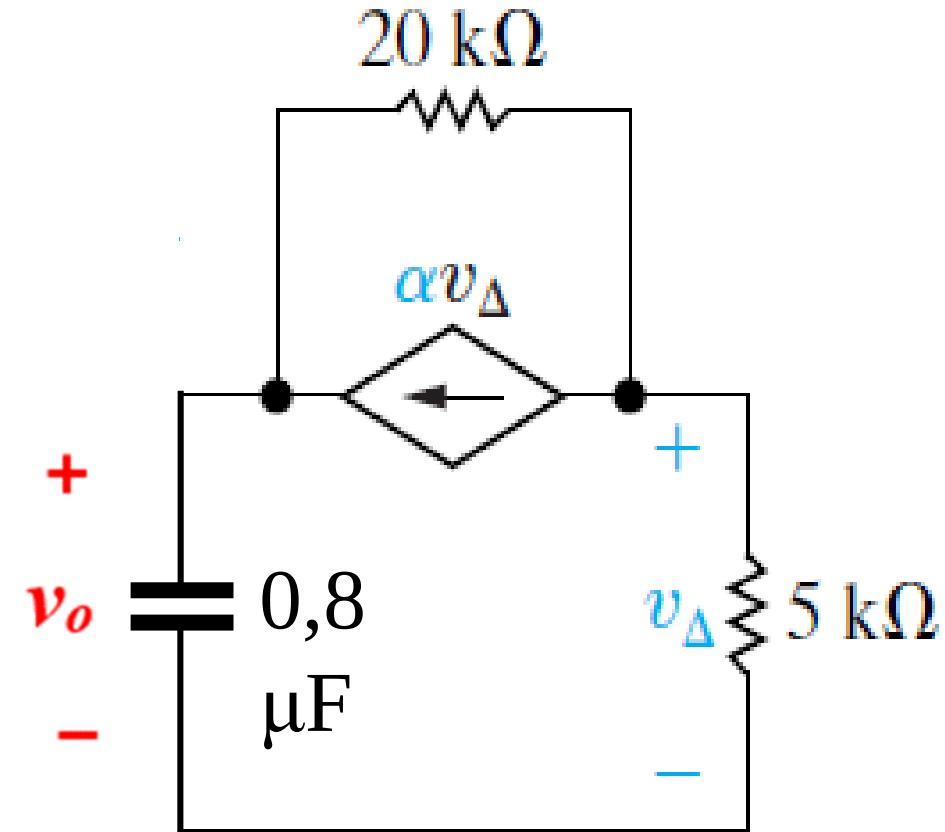
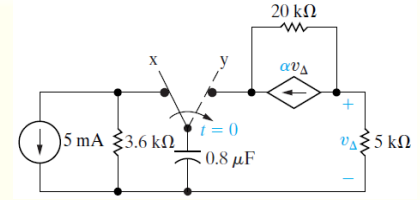
- Φτάνουμε στον τελικό στόχο, την τάση v_{Δ} :

$$\frac{v_{\Delta}(t)}{5000} + \frac{v_{\Delta}(t) - v_o(t)}{20000} + 2,5 \times 10^{-4} v_{\Delta}(t) = 0 \Rightarrow$$

$$4v_{\Delta}(t) + v_{\Delta}(t) - v_o(t) + 5v_{\Delta}(t) = 0 \Rightarrow$$

$$v_{\Delta}(t) = \frac{v_o(t)}{10} \Rightarrow$$

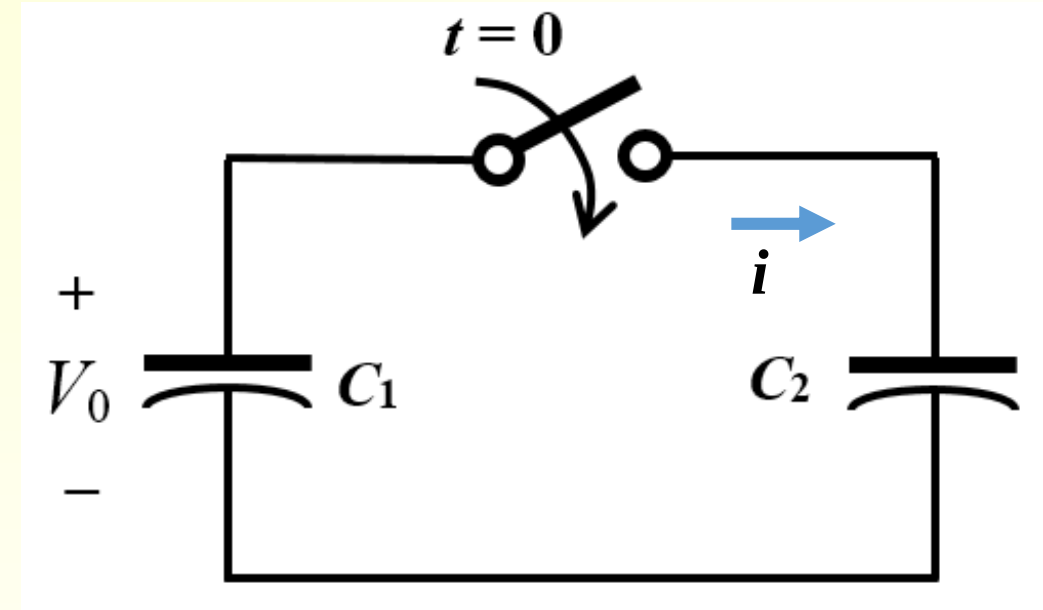
$$v_{\Delta}(t) = -1,8e^{-25t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+$$



17

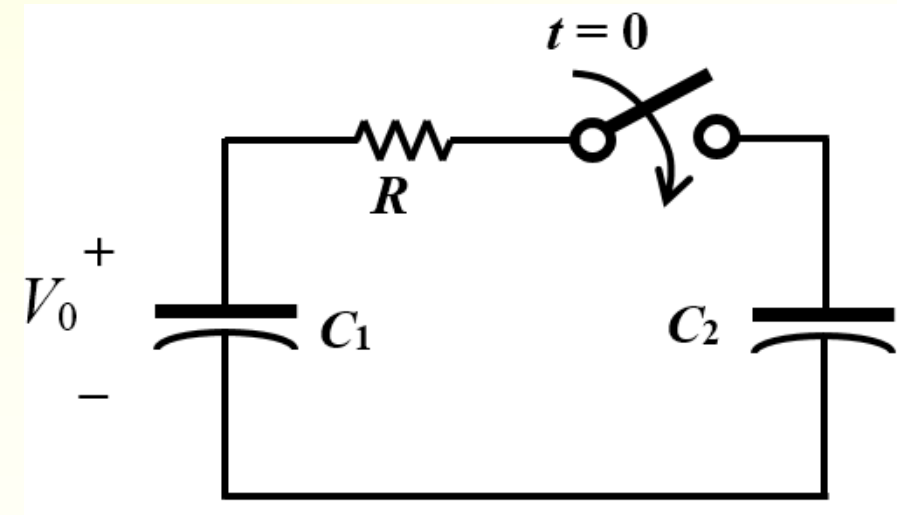
RC – ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Δυο ιδανικοί πυκνωτές, εκ των οποίων ο ένας είναι φορτισμένος με τάση V_0 , έρχονται σε επαφή μόλις κλείσει ο διακόπτης στο $t = 0$
- Να υπολογιστούν τα εξής:
 1. Το ρεύμα $i(t)$, $\forall t \geq 0$
 2. Η καταναλωνόμενη ενέργεια στο διάστημα $(0, T)$
 3. Οι οριακές τιμές των τάσεων των πυκνωτών και του ρεύματος i
 4. Οι αρχικές και τελικές ενέργειες των πυκνωτών
 5. Η σχέση ανάμεσα στις αρχικές και τελικές ενέργειες των πυκνωτών



RC – ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Το πρόβλημα αυτό «εκθέτει» ελαφρά τη Θεωρία Κυκλωμάτων επειδή αναγκάζομαστε να δεχθούμε ότι κάποιο ποσό ενέργειας λείπει από το τελικό ισοζύγιο και λέμε ότι «ακτινοβολείται»
- Το θέμα κινεί ακόμα το ερευνητικό ενδιαφέρον και κάθε λίγα χρόνια εμφανίζεται και μια νέα ιδέα ή προσέγγιση
- Για μια λύση απλή με βάση το ηλ. φορτίο, βλ. Μάργαρη, παρ. 3.2-7, σελ. 63
- Η πιο «προηγμένη» προσέγγιση κάνει χρήση μιας παρένθετης αντίστασης που μετά αφαιρείται με όριο στο μηδέν

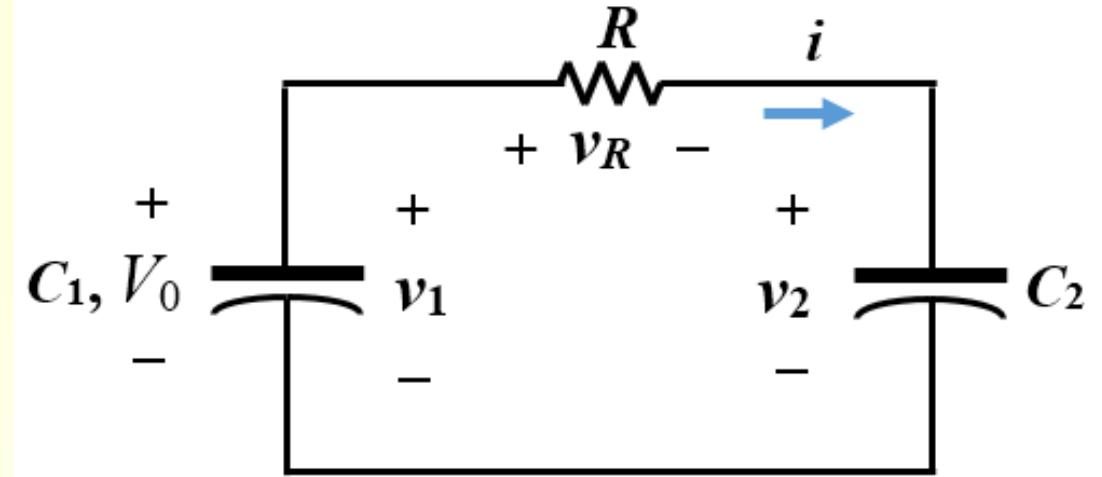


RC – ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- ΑΝΑΛΥΣΗ

$$NTK \Rightarrow v_1 = Ri + v_2$$

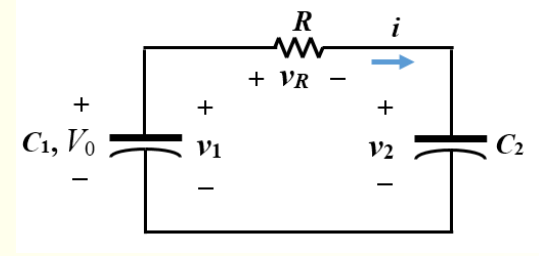
$$NPK \Rightarrow C_2 \frac{dv_2}{dt} = i = -C_1 \frac{dv_1}{dt}$$



$$\Rightarrow -\frac{i}{C_1} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C_2} \Rightarrow R \frac{di}{dt} + i \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + i \frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) = 0 \xrightarrow{i(0) = \frac{V_0}{R}} i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t}, \quad t \geq 0$$

RC – ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ



2. Κατανάλωση στο R

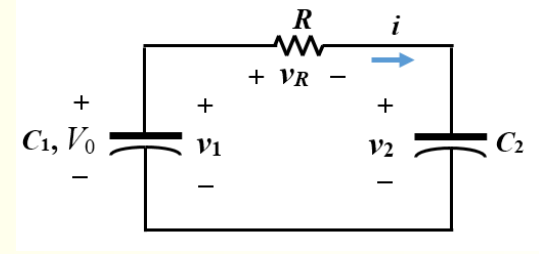
$$\begin{aligned} E_R(T) &= \int_0^T v_R(t) i(t) dt = \int_0^T R i^2(t) dt = \int_0^T R \left(\frac{V_0}{R} \right)^2 e^{-\frac{2}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t} dt \\ &= \dots = \frac{C_1 C_2 V_0^2}{2(C_1 + C_2)} \left(1 - e^{-\frac{2T}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right)} \right) \end{aligned}$$

3. Οι οριακές τιμές:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v_1(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t [-i(\tau)] d\tau = V_0 + \frac{V_0 C_2}{(C_1 + C_2)} \left(e^{\frac{-t}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right)} - 1 \right) \Rightarrow v_1(\infty) = V_0 - \frac{V_0 C_2}{(C_1 + C_2)} = \frac{V_0 C_1}{(C_1 + C_2)} \\ v_2(t) &= \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau = \frac{V_0 C_1}{(C_1 + C_2)} \left(1 - e^{\frac{-t}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right)} \right) \Rightarrow v_2(\infty) = \frac{V_0 C_1}{(C_1 + C_2)} \end{aligned}$$

$$i(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t} = 0$$

RC – ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ



4. Οι αρχικές και τελικές ενέργειες των πυκνωτών

$$E_{C_1}(0) = \frac{C_1 V_0^2}{2}, \quad E_{C_2}(0) = 0 \quad E_{C_1}(\infty) = \frac{1}{2} C_1 \frac{V_0^2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}, \quad E_{C_2}(\infty) = \frac{1}{2} C_2 \frac{V_0^2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}$$

5. Ισοζύγιο:

$$E(0) = E_{C_1}(0) = \frac{1}{2} C_1 V_0^2$$

$$E(\infty) = E_R(\infty) + E_{C_1}(\infty) + E_{C_2}(\infty)$$

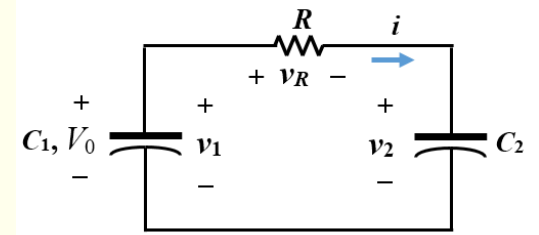
$$= 0 + \frac{1}{2} C_1 \frac{V_0^2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{1}{2} C_2 \frac{V_0^2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 C_1^2}{(C_1 + C_2)} < \frac{1}{2} C_1 V_0^2$$

ΤΙ ΣΥΝΕΒΗ;;

RC – ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΤΙ ΣΥΝΕΒΗ;;

- Δεχόμαστε ότι η ενέργεια που λείπει «ακτινοβολήθηκε»
- Η διαφορά εξηγείται από την ιδανικότητα των στοιχείων
- Το θέμα ερευνάται ακόμα
- Όπως και να 'ναι:



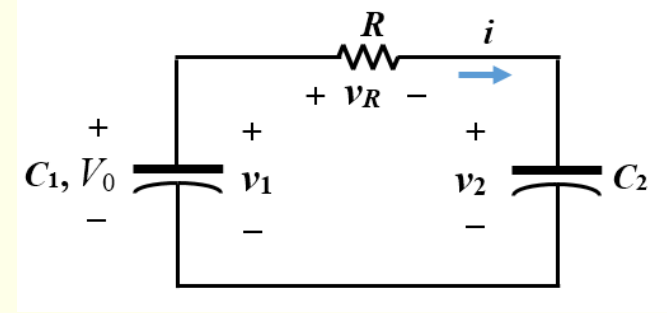
$$\lim_{R \rightarrow 0} i(t) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\frac{V_0}{R}}{e^{\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t}} \stackrel{\text{de l'Hopital}}{=} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\frac{-V_0}{R^2}}{\frac{-(C_1 + C_2)t e^{\frac{(C_1 + C_2)t}{C_1 C_2 R}}}{C_1 C_2 R^2}}$$

$$= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{C_1 C_2 V_0}{(C_1 + C_2) t e^{\frac{(C_1 + C_2)t}{C_1 C_2 R}}} = \frac{C_1 C_2 V_0}{(C_1 + C_2)} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{t e^{\frac{(C_1 + C_2)t}{C_1 C_2 R}}} = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \lim_{R \rightarrow 0} i(0) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V_0}{R} = \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} i(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t} dt = \frac{V_0}{R} \left(-\frac{C_1 C_2 e^{-\frac{(C_1 + C_2)t}{C_1 C_2 R}} R}{(C_1 + C_2)} \right) \Bigg|_0^{\infty} = \frac{C_1 C_2 V_0}{(C_1 + C_2)}$$

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= 0, & t &\neq 0 \\ i(t) &= \infty, & t &= 0 \\ \int_0^{\infty} i(t) dt &= \frac{C_1 C_2 V_0}{(C_1 + C_2)} \end{aligned} \right\} i(t) = \frac{C_1 C_2 V_0}{(C_1 + C_2)} \delta(t)$$

RC – ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ



- Οπότε, τελικά:

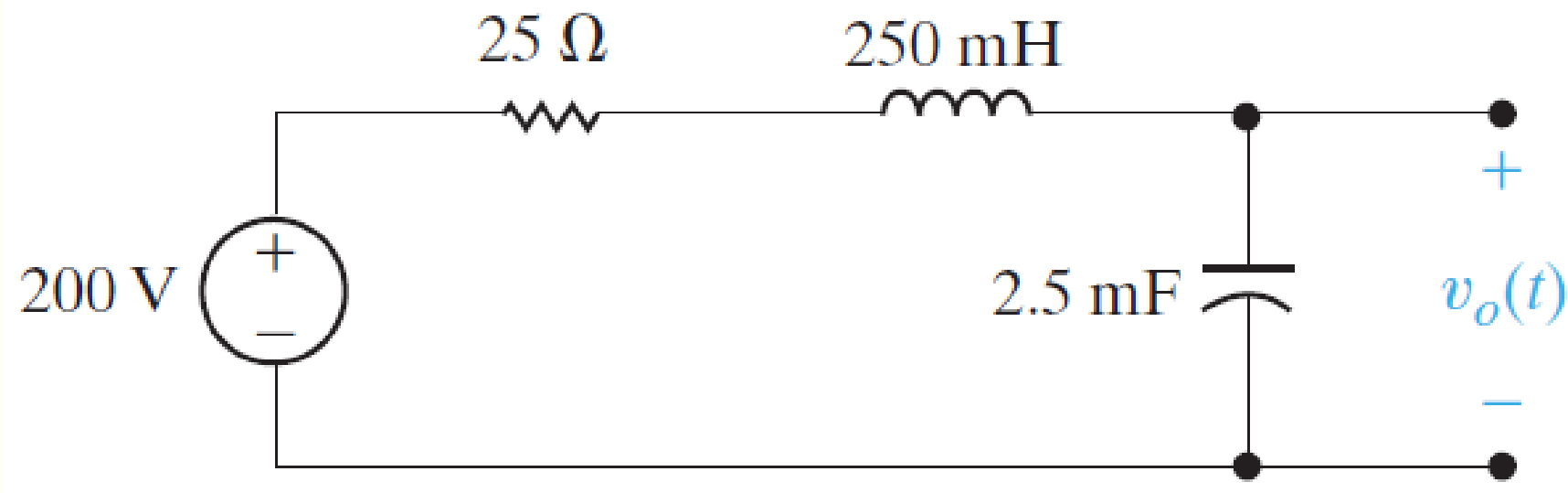
$$\lim_{R \rightarrow 0} i(t) = \frac{C_1 C_2 V_0}{(C_1 + C_2)} \delta(t)$$

- και η μεταφορά τού φορτίου συμβαίνει στιγμιαία

Για περισσότερες ασκήσεις RC/RL δείτε και τα σχετικά θέματα από τον Φεβρουάριο και τον Σεπτέμβριο του 2004

18

RLC



- Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Στο $t = 0$ η τάση της πηγής πέφτει ακαριαία στα 150 V
- Να υπολογιστεί η τάση $v_o(t)$ για $t \geq 0$

RLC

- $t < 0$ [«ΠΡΙΝ»]

- Δεδομένου ότι το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο και το ότι η πηγή είναι σταθερή, ο πυκνωτής έχει γίνει ανοικτό κύκλωμα, οπότε

$$i_C(0) = 0$$

$\Rightarrow$

$$i_L(0) = 0$$

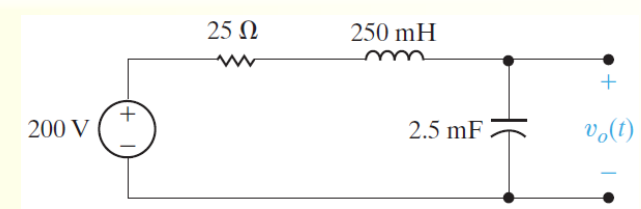
$$v_o(0) = 200 \text{ V}$$

- $t > 0$ [«ΜΕΤΑ»]

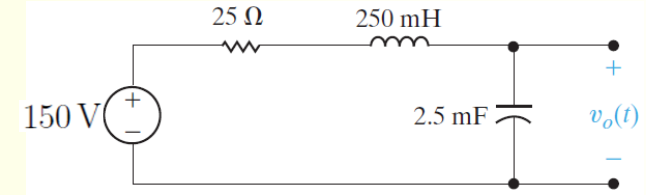
$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{25}{2(0.25)} = 50 \text{ rad/s}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(250 \times 10^{-3})(2.5 \times 10^{-3})}} = 40 \text{ rad/s}$$

- $\alpha > \omega_0 \Rightarrow$ υπερκρίσιμη απόκριση



RLC



- Οι ρίζες τής χαρακτηριστικής εξίσωσης θα δώσουν:

$$s_{1,2} = -50 \pm \sqrt{50^2 - 40^2} = -20, -80 \text{ rad/s}$$

$$v_o = V_f + A'_1 e^{-20t} + A'_2 e^{-80t}$$

- Η τελική τάση τού πυκνωτή θα είναι (καθώς θα έχει γίνει πάλι ανοικτό κύκλωμα):

$$V_f = 150 \text{ V}$$

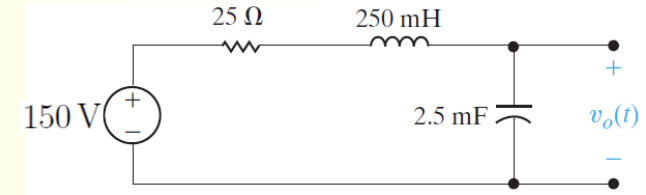
- Από την αρχική συνθήκη

$$v_o(0) = 150 + A'_1 + A'_2 = 200 \quad \Rightarrow \quad A'_1 + A'_2 = 50$$

- Από την παράγωγο της τάσης

$$\left. \frac{dv_o}{dt} \right|_{t=0} = -20A'_1 - 80A'_2 = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_L(0)}{C} = 0$$

RLC



- Λύνοντας το σύστημα:

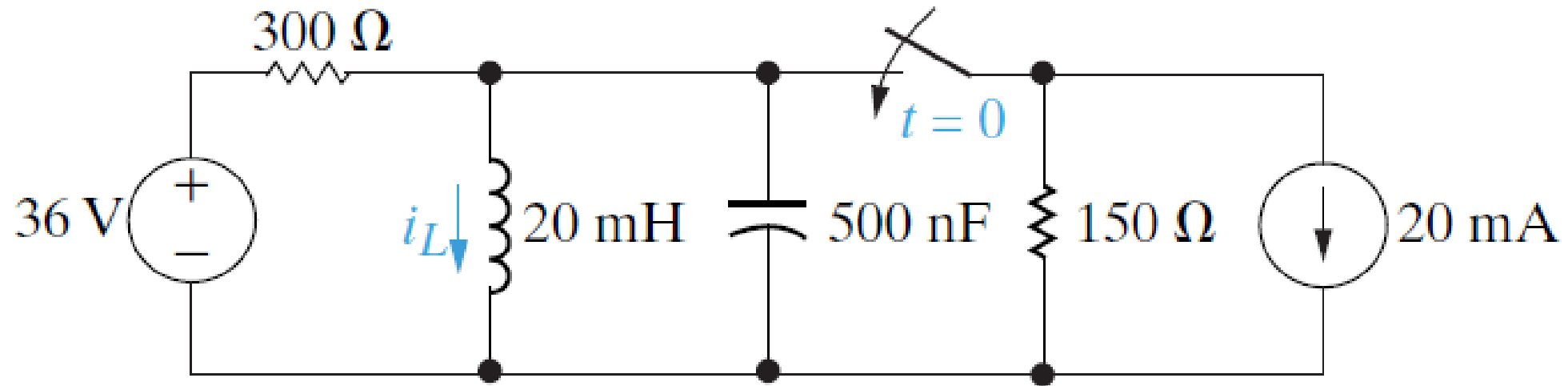
$$A'_1 = 66,67 \quad A'_2 = -16,67$$

- Τελικά η τάση τού πυκνωτή θα είναι:

$$v_o(t) = 150 + 66,67e^{-20t} - 16,67e^{-80t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$

19

RLC



- Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Στο $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει
- Να υπολογιστεί το ρεύμα $i_L(t)$ για $t \geq 0$

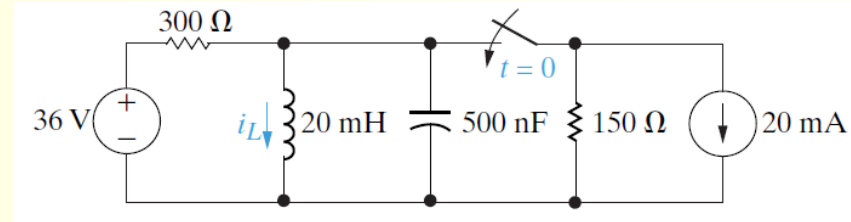
RLC

- $t < 0$ [«ΠΡΙΝ»]

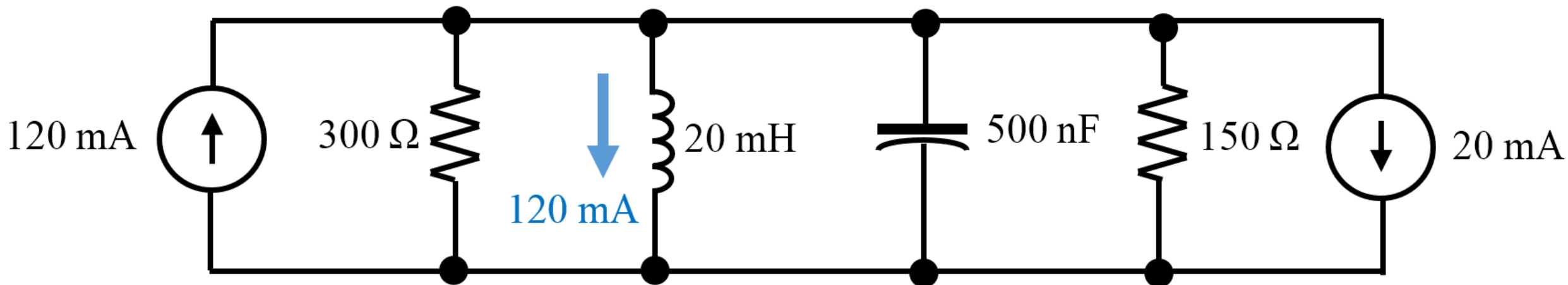
- Δεδομένου ότι το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο και το ότι η πηγή είναι σταθερή, ο πυκνωτής έχει γίνει ανοικτό κύκλωμα και το πηνίο βραχυκύκλωμα, οπότε

$$i_L(0^-) = \frac{36}{300} = 0.12 \text{ A}$$

$$v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

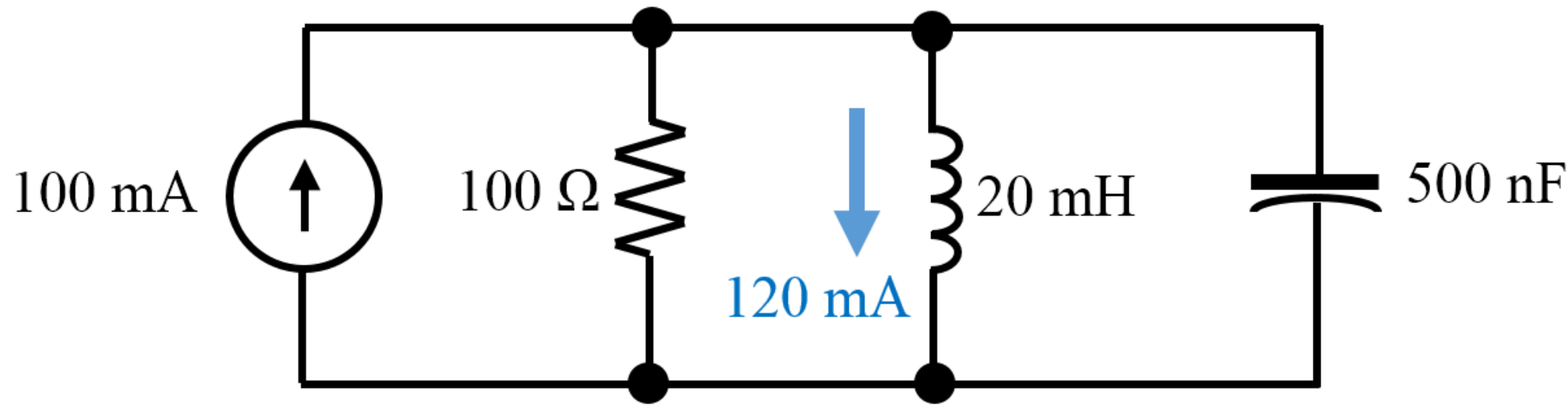
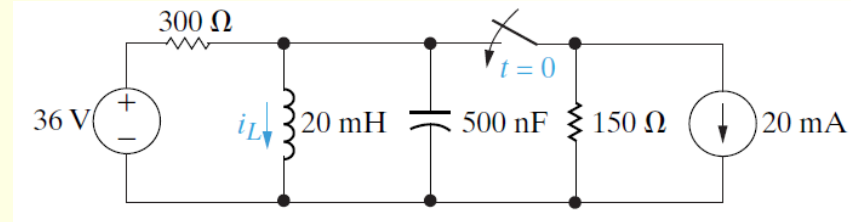


- $t > 0$ [«ΜΕΤΑ»]



RLC

- Και τελικά:



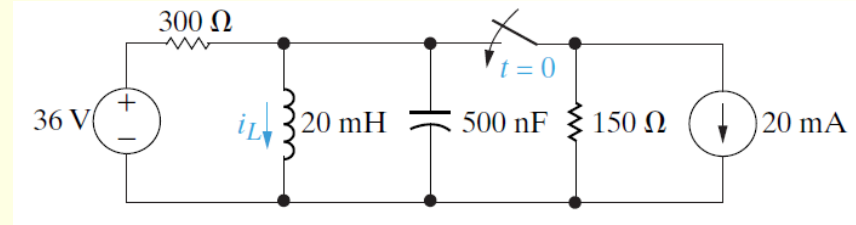
- Θα έχουμε: $i_L(\infty) = 0.1 \text{ A}$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(20 \times 10^{-3})(500 \times 10^{-9})}} = 10,000 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{(100)(500 \times 10^{-9})} = 10,000 \text{ rad/s}$$

ΚΡΙΣΙΜΟ

RLC



$$i_L(t) = 0,1 + A'_1 t e^{-10000t} + A'_2 e^{-10000t}$$

$$i_L(0) = 0,1 + A'_2 = 0,12 \Rightarrow A'_2 = 0,02$$

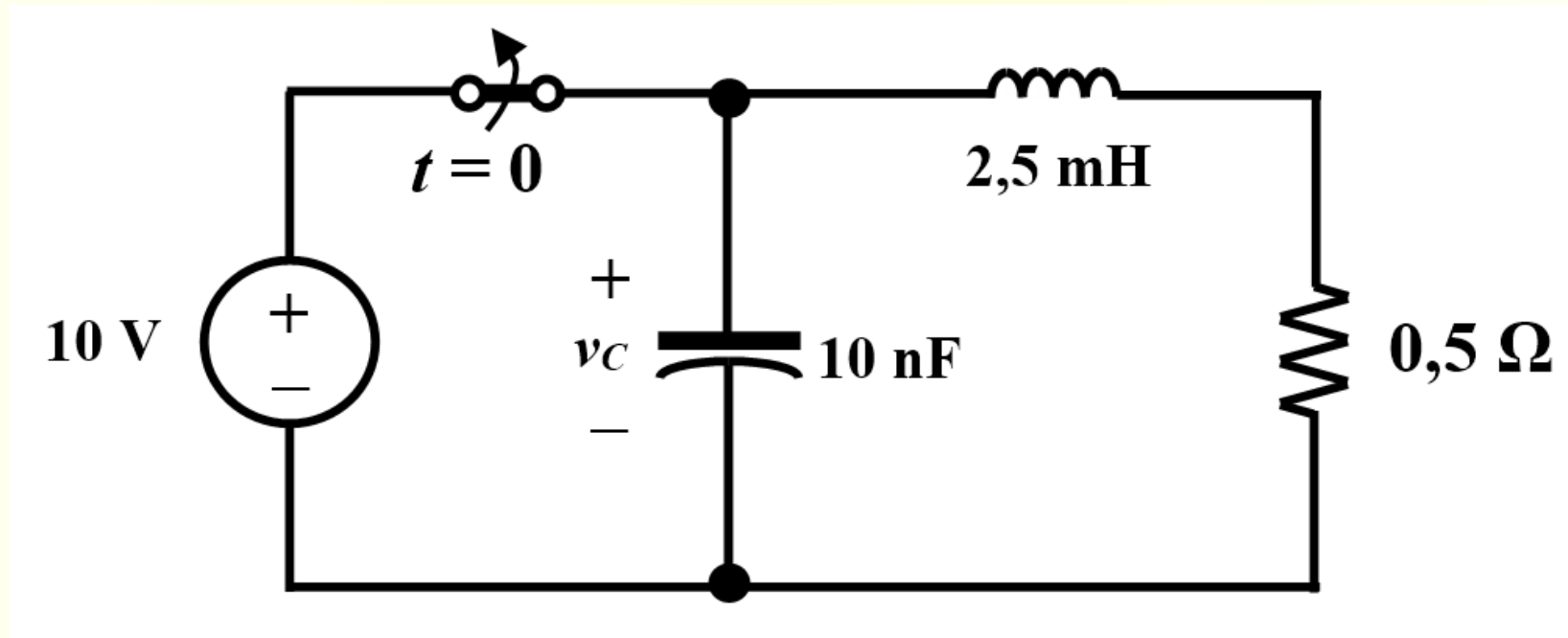
$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = A'_1 - 10000 A'_2 = \frac{V_L}{L} = \frac{V_C}{L} = 0 \Rightarrow A'_1 = 200$$

- Θα έχουμε τελικά:

$$i_L(t) = 0,1 + 200 t e^{-10000t} + 0,02 e^{-10000t}, \quad t \geq 0$$

20

RLC



- Στο κύκλωμα, που λειτουργούσε για πολύ χρόνο, ο διακόπτης ανοίγει στον χρόνο $t = 0$
- Διερευνήστε κατά πόσο η τάση v_C είναι επικίνδυνη

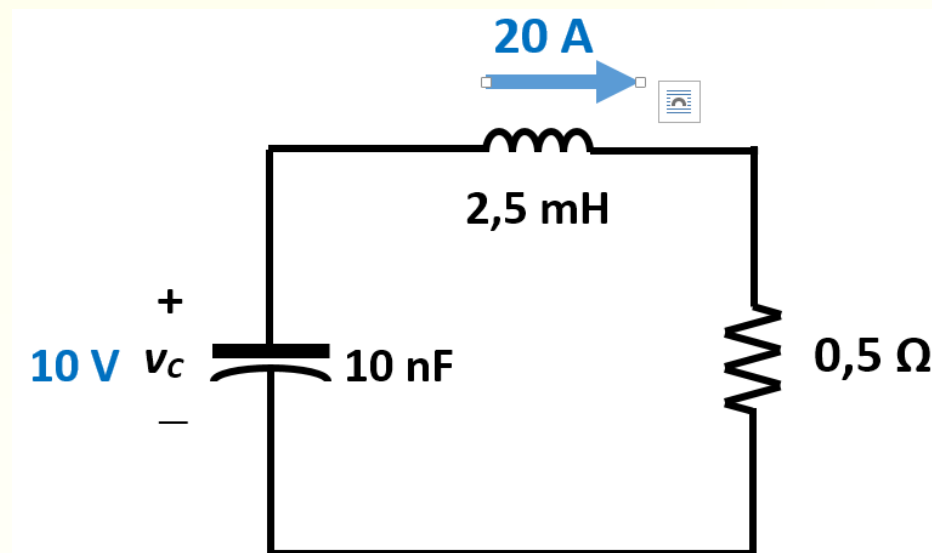
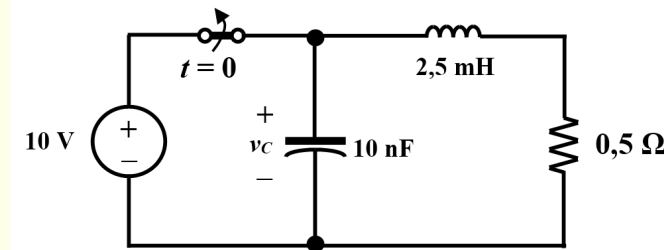
RLC

- $t < 0$ [«ΠΡΙΝ»]

- Το κύκλωμα είναι στη μόνιμη κατάσταση και ο πυκνωτής λόγω της πηγής «βλέπει» 10 Volt ενώ το ρεύμα που κυκλοφορεί στον βρόχο τού βραχυκυκλωμένου πηνίου και αντιστάτη είναι $10/0,5 = 20 \text{ A}$

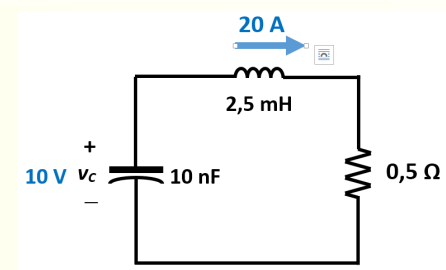
- $t > 0$ [«ΜΕΤΑ»]

- Μόλις ανοίξει ο διακόπτης, η πηγή απομονώνεται και απομένει ένα κύκλωμα RLC με σύνδεση σε σειρά



RLC

- Δεδομένου



$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{0,5}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} = 100, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 4 \times 10^{10}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d = -100 \pm j199999,975 \cong -100 \pm j200000$$

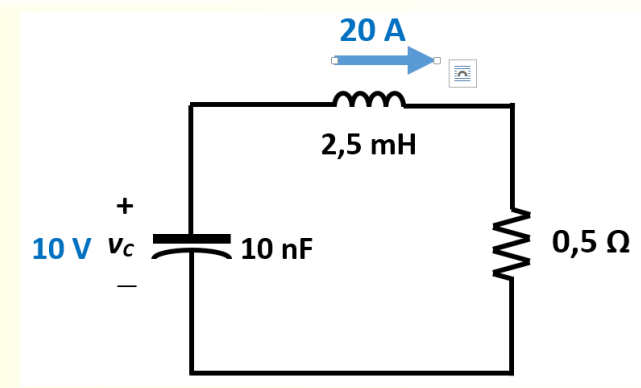
$$\begin{aligned} v_C(t) &= A_0 e^{s_1 t} + B_0 e^{s_2 t} = A_0 e^{(-100 + j200000)t} + B_0 e^{(-100 - j200000)t} \\ &= e^{-100t} [A \cos(200000t) + B \sin(200000t)] \end{aligned}$$

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 = 1 \cdot (A \cdot 1 + B \cdot 0) \Rightarrow A = 10$$

$$i_C = C D v_C \Rightarrow \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{-i_L(0^+)}{C} = \frac{-i_L(0^-)}{C} = \frac{-20}{10 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = -2 \times 10^9$$

$$\left. \frac{d}{dt} e^{-100t} [A \cos(200000t) + B \sin(200000t)] \right|_{t=0^+} = -100A + 200000B = -2 \times 10^9 \Rightarrow B \cong -10000$$

RLC



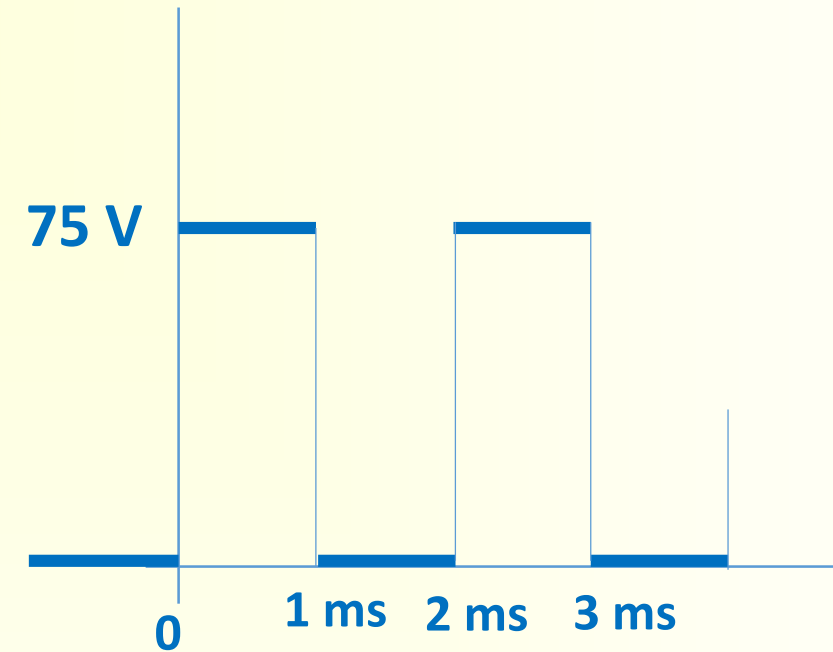
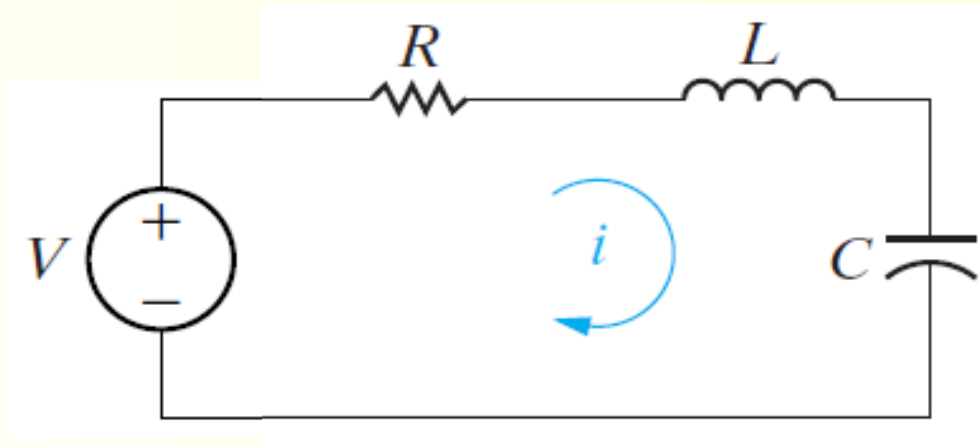
- Τελικά

$$v_C(t) = e^{-100t} \left[10 \cos(200000t) - 10000 \sin(200000t) \right]$$

- Η τάση αυτή μπορεί να πάρει μεγάλες τιμές, της τάξης των 10 kV

21

RLC



- Εφαρμόζουμε στο κύκλωμα την απεικονιζόμενη τάση
- $R = 25\ \Omega$, $L = 5\text{ mH}$, $C = 50\ \mu\text{F}$
- Να υπολογιστεί το ρεύμα i για $t = 0\text{ ms}$, $t = 1\text{ ms}$ και $t = 2\text{ ms}$

RLC

- $t < 0$ [«ΠΡΙΝ»]
- Στο κύκλωμα δεν υπάρχει αποθηκευμένη ενέργεια: $i(0) = 0$, $v_C(0) = 0$
- $t > 0$ [«ΜΕΤΑ»] αλλά για λιγότερο από 1 ms
- Έχουμε ένα κύκλωμα RLC με σύνδεση σε σειρά

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{25000}{2 \times 5} = 2500, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 4 \times 10^6$$

$$s_{1,2} = \{-1000, -4000\}$$

$$i(t) = A_1 e^{-1000t} + A_2 e^{-4000t} (+0)$$

RLC

- Υπολογίζουμε τις σταθερές από τις αρχικές συνθήκες λύνοντας το σύστημα:

$$i(0) = A_1 + A_2 = 0$$

$$V = v_R + v_L + v_C = 0 + v_L + 0 \Rightarrow$$

$$V(0) = 75 = v_L(0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = -1000A_1 - 4000A_2 = \frac{V(0^+)}{L} = \frac{75}{0,005} = 15000$$

- Βρίσκουμε ότι

$$A_1 = 5, \quad A_2 = -5$$

- Οπότε

$$i(t) = 5 e^{-1000t} - 5e^{-4000t}, \quad 0 \leq t < 1\text{ms}$$

$$i(0,001) = 1,74782 \text{ A}$$

RLC

- $1 \leq t < 2 \text{ ms}$

- Η διαδικασία θα είναι ίδια αλλά πρέπει να είμαστε λίγο **προσεχτικοί**

$$i(t) = B_1 e^{-1000(t-0,001)} + B_2 e^{-4000(t-0,001)} (+0)$$

- Βρίσκουμε τις σταθερές από τις «**αρχικές**» συνθήκες λύνοντας το σύστημα:

$$i(0,001) = B_1 + B_2 = 1,74782$$

$$V = v_R + v_L + v_C \Rightarrow v_L(0,001) = V(0,001) - v_R(0,001) - v_C(0,001)$$

$$\Rightarrow v_L(0,001) = 0 - 25 \times 1,74782 - v_C(0) - \frac{1}{C} \int_0^{0,001} (5 e^{-1000t} - 5e^{-4000t}) dt$$

$$\Rightarrow v_L(0,001) = -43,6955 - 0 - \frac{10^6}{50} \left(-0,005e^{-1000t} + 0,00125e^{-4000t} \right) \Big|_0^{0,001}$$

$$\Rightarrow v_L(0,001) = -43,6955 - 100e^{-1} + 25e^{-1} = -43,6955 - 38,6699 = -82,3654$$

RLC

- $1 \leq t < 2 \text{ ms}$

$$v_L(0,001) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0,001^+} \Rightarrow \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0,001^+} = \frac{v_L(0,001)}{L} = \frac{-82,3654}{0,005} \Rightarrow$$
$$-16473,08 = -1000B_1 - 4000B_2$$

- Βρίσκουμε ότι $B_1 = -3,16060$, $B_2 = 4,90842$

- Οπότε

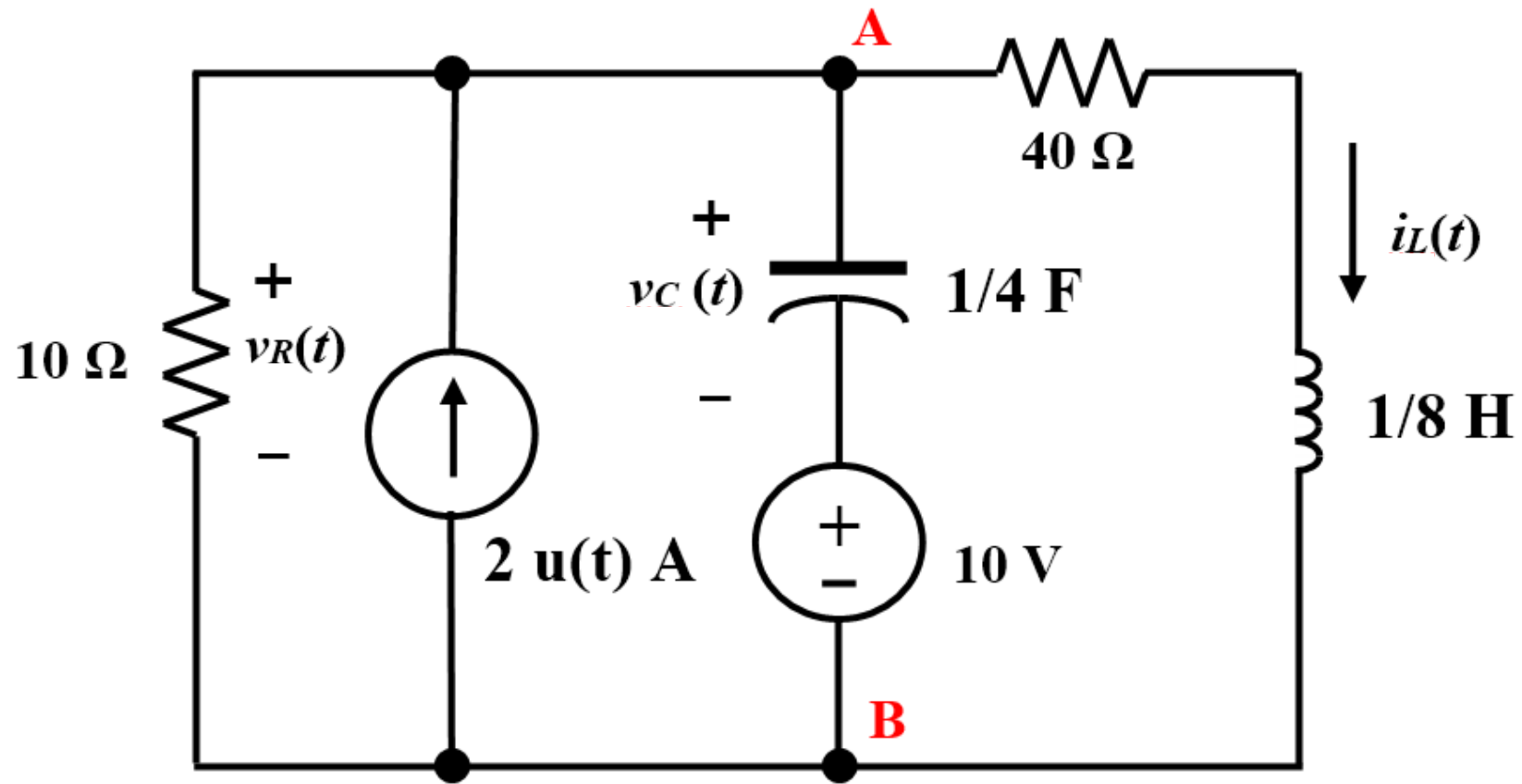
$$i(t) = -3,1606e^{-1000(t-0,001)} + 4,90842e^{-4000(t-0,001)}, \quad 0,001 \leq t < 0,002$$

$$i(0,002) = -1,072819 \text{ A}$$

22

[ΦΕΒ. 2010]

- Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Προσδιορίστε τις τιμές των μεγεθών:



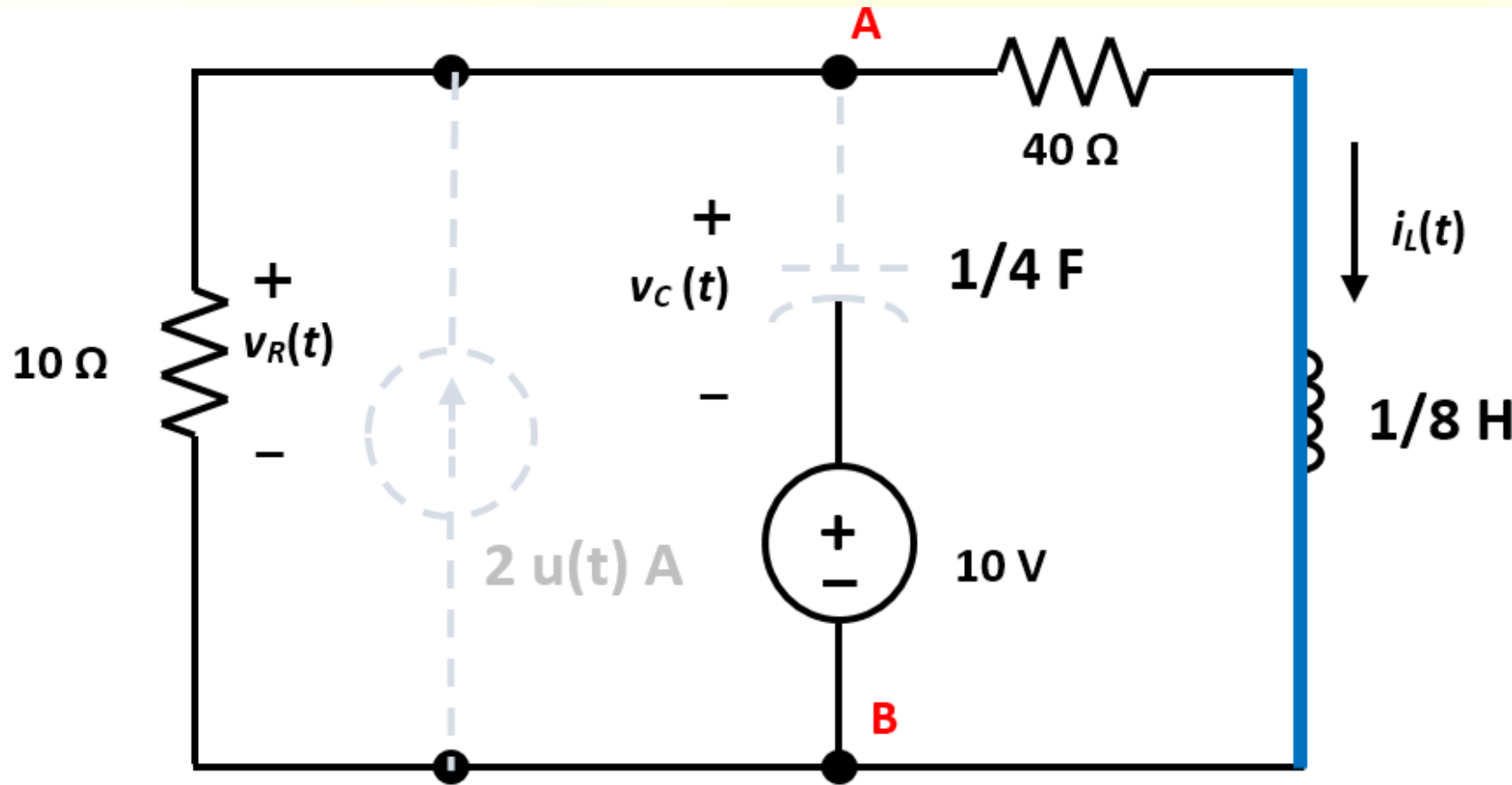
$v_C(0^-)$, $v_R(0^-)$, $i_L(0^-)$, $v_C(0^+)$, $v_R(0^+)$, $i_L(0^+)$,

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+}, \left. \frac{dv_R}{dt} \right|_{t=0^+}, \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+},$$

$v_C(\infty)$, $v_R(\infty)$, $i_L(\infty)$

- $t < 0$ [«ΠΡΙΝ»]

- Το κύκλωμα είναι:



$$i_L(0^-) = 0$$

$$v_{AB}(0^-) = 0$$

$$v_R(0^-) = 0$$

$$v_C(0^-) = -10$$

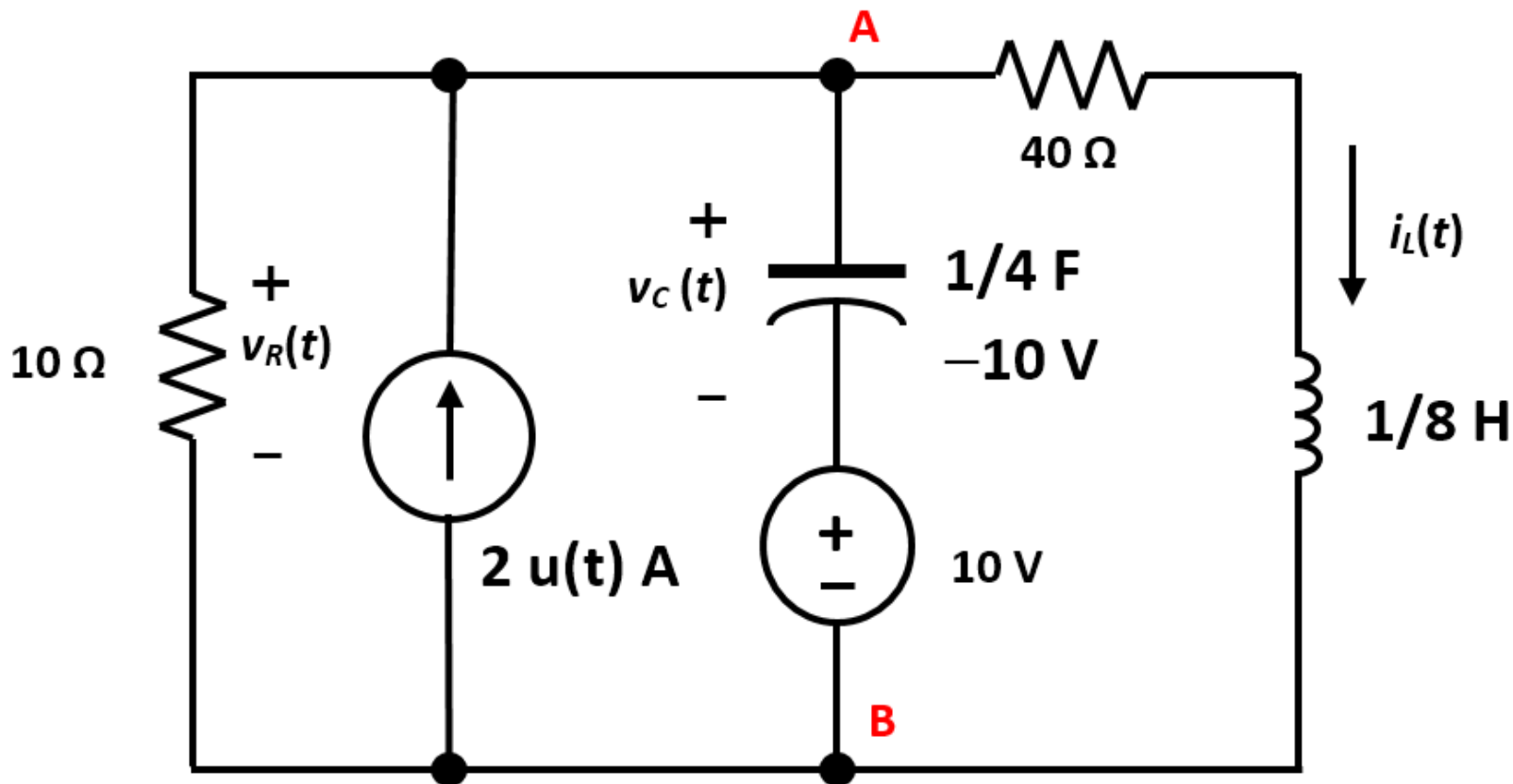
- $t > 0$ [«META»]
- Το κύκλωμα είναι:
- Προφανώς:

$$i_L(0^+) = 0$$

$$v_C(0^+) = -10$$

- Και (NTK):

$$\begin{aligned} v_R(0^+) &= 10 + v_C(0^+) \\ &= 10 + (-10) \\ &= 0 \end{aligned}$$



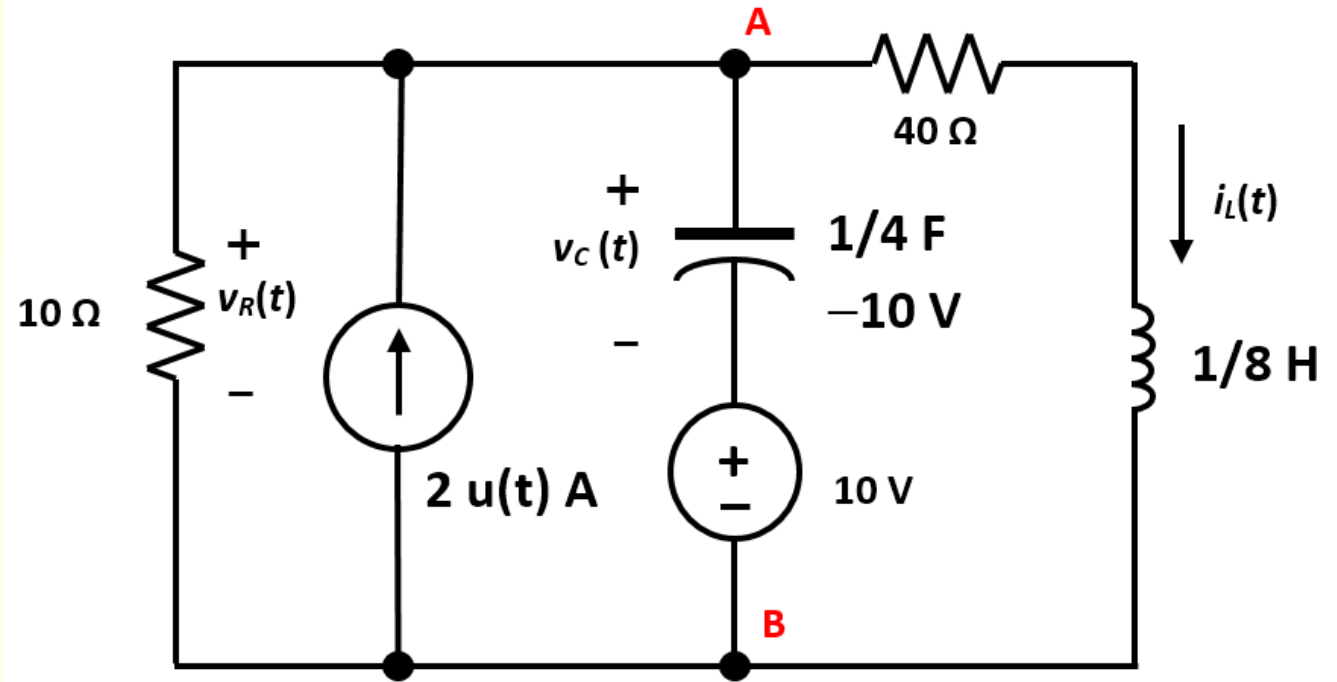
• $t > 0$ [«META»] dv_C/dt ?

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C}{C} \Big|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{1/4} = 4i_C(0^+)$$

$$i_C(0^+) + i_L(0^+) + i_R(0^+) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$i_C(0^+) + 0 + (10 - 10)/10 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$i_C(0^+) = 2$$

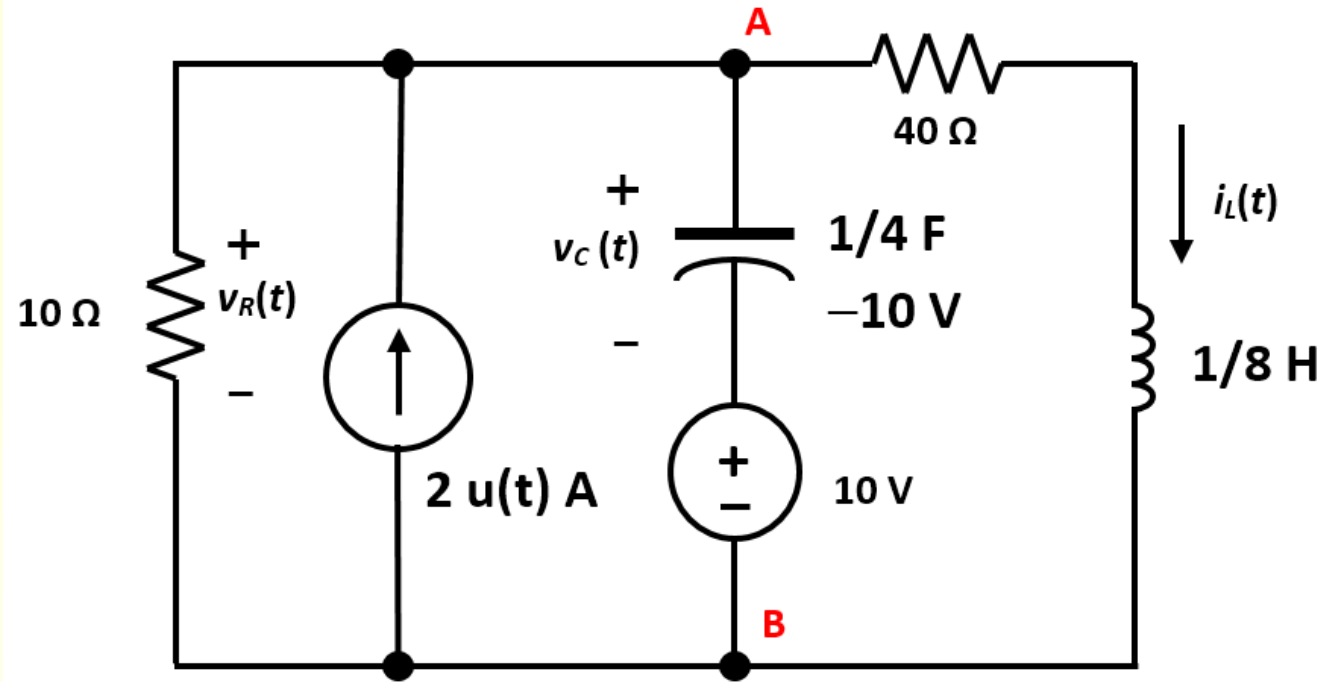


$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 4i_C(0^+) = 8 \text{ V/s}$$

• $t > 0$ [«META»] dv_R/dt ?

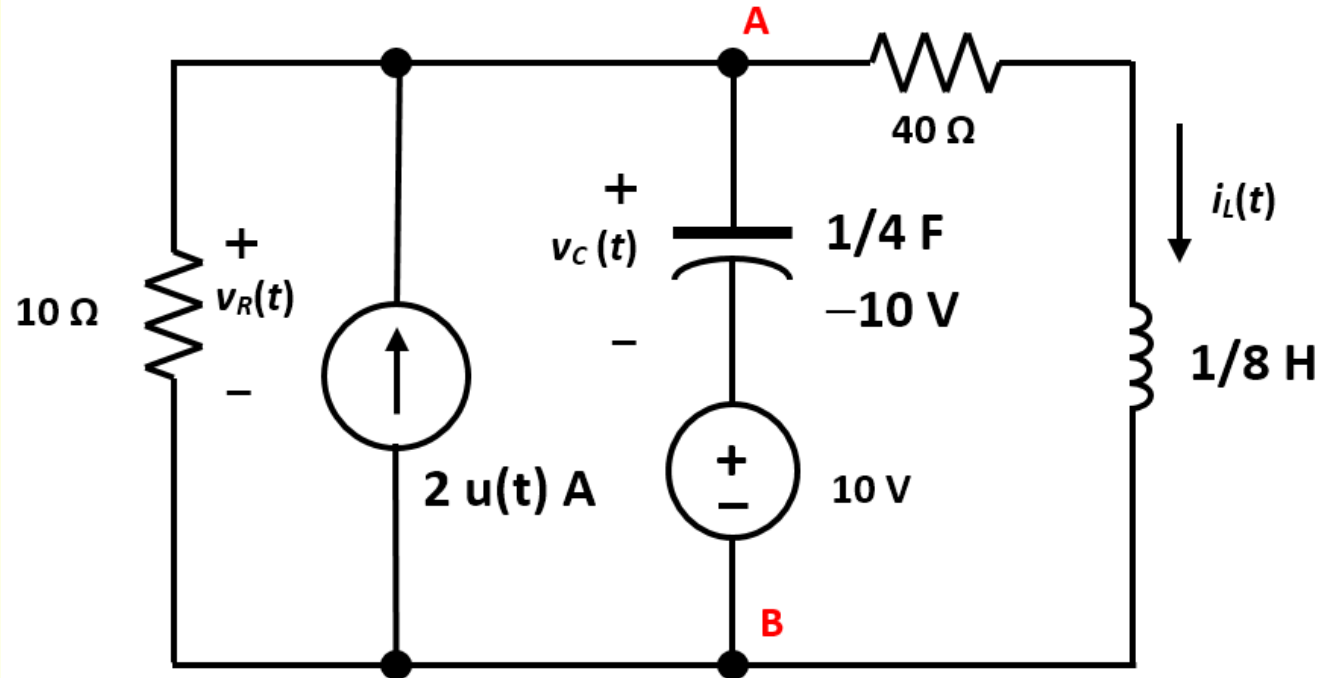
$$\begin{aligned}
 v_R &= v_C + 10 \Rightarrow \\
 \left. \frac{dv_R}{dt} \right|_{t=0^+} &= \left. \frac{dv_C}{dt} + \frac{d10}{dt} \right|_{t=0^+} \\
 &= \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 8 \text{ V/s}
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dv_R}{dt} \right|_{t=0^+} = 8 \text{ V/s}$$



- $t > 0$ [«META»] di_L/dt ?

$$\begin{aligned}\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} &= \left. \frac{v_L}{L} \right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} \\ &= \frac{10 + v_C(0^+) + 40 i_L(0^+)}{1/8} \\ &= \frac{10 - 10 + 40 \times 0}{1/8} = 0\end{aligned}$$



$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = 0 \text{ A/s}$$

- $t = \infty$ [«ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ ΜΕΤΑ»]
- Διαίρετης ρεύματος

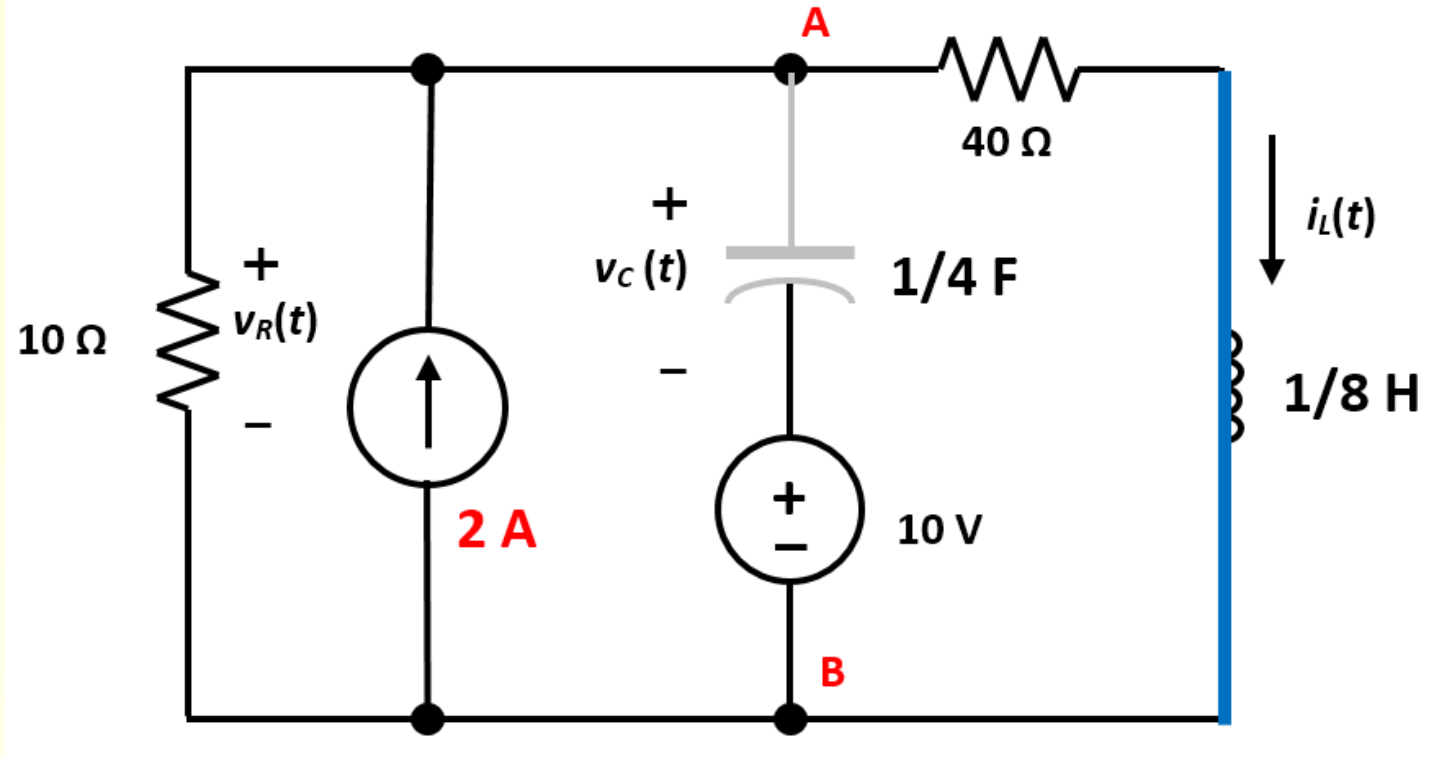
$$i_L(\infty) = 2 \times \frac{10}{10 + 40} = 0,4 \text{ A}$$

$$i_R(\infty) = 2 \times \frac{40}{10 + 40} = 1,6 \Rightarrow$$

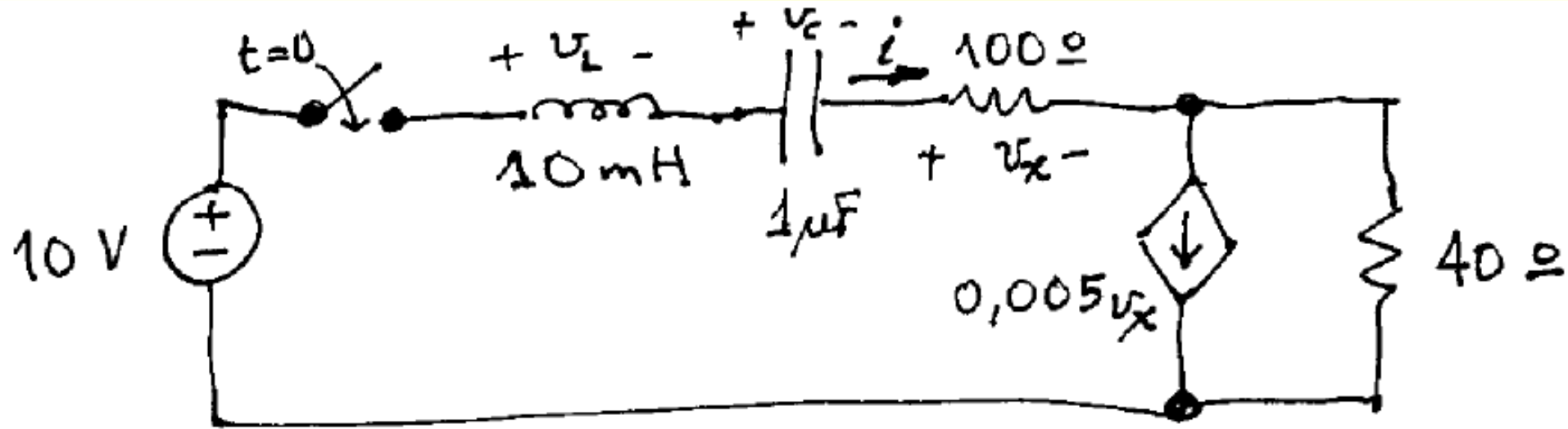
$$v_R(\infty) = 1,6 \times 10 = 16 \text{ V}$$

$$v_C(\infty) + 10 - v_R(\infty) = 0 \Rightarrow$$

$$v_C(\infty) = -10 + 16 = 6 \text{ V} = 40 \times i_L(\infty) - 10 = 40 \times 0,4 - 10$$



A1



$$v_C(0) = 5\text{ V}$$

$$v_C, v_L ?$$

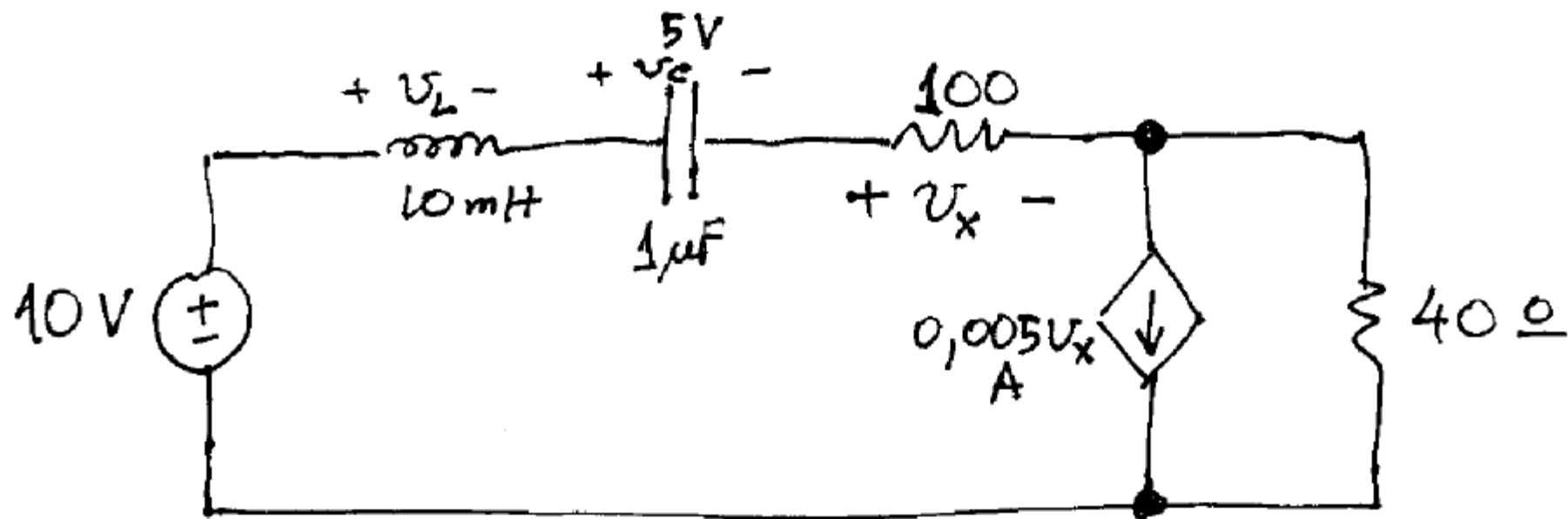
$$i(0^-) = 0, \quad v_C(0^-) = 5V$$

$$v_x(0^-) = 0, \quad v_L(0^-) = 0$$

$$i(0^+) = 0 \quad v_C(0^+) = 5V$$

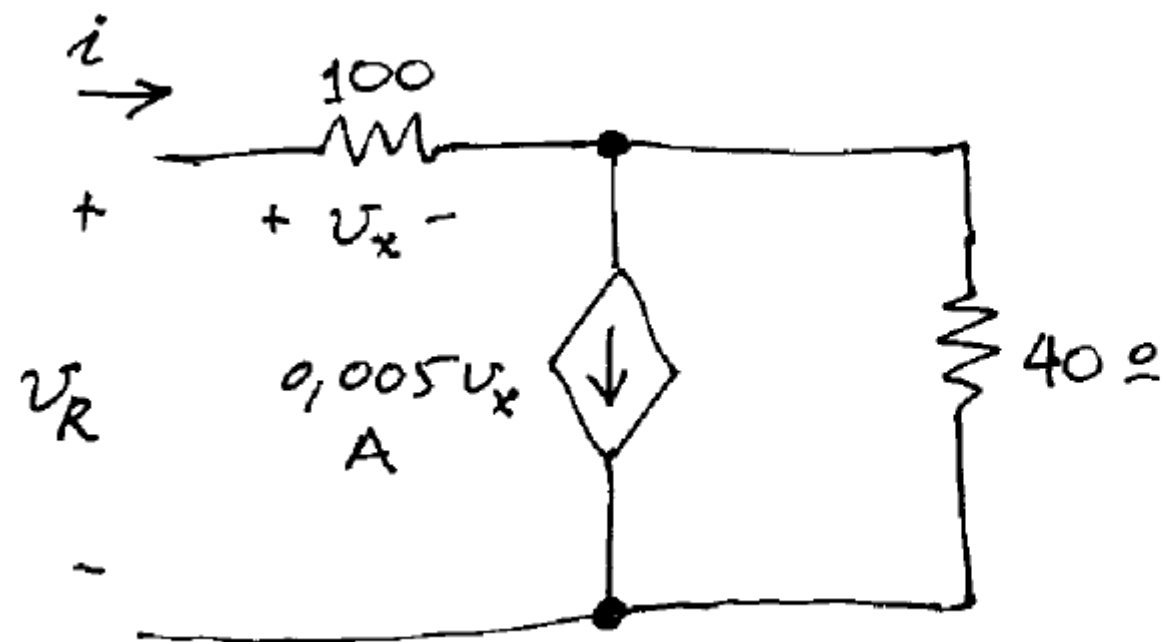
$$v_x(0^+) = 0$$

$$v_L(0^+) = 5V$$



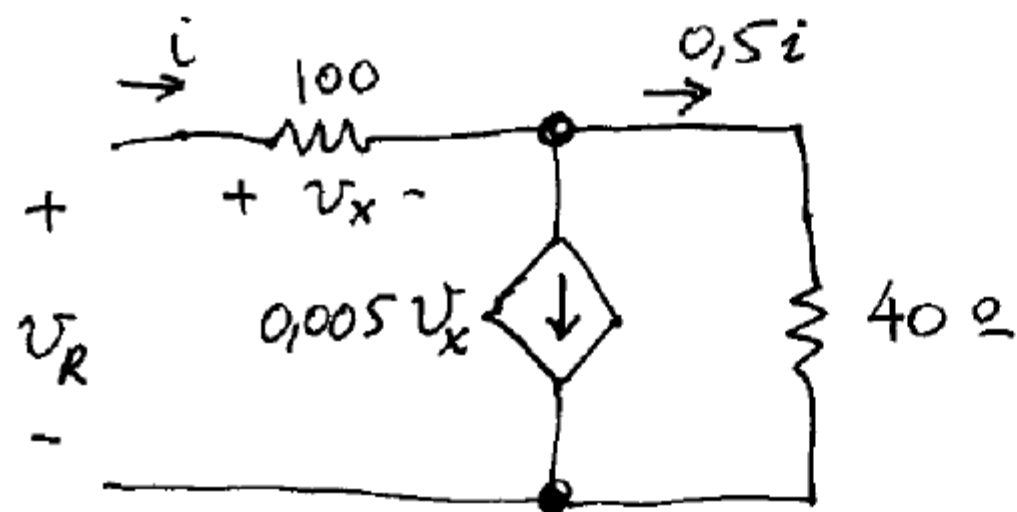
$$t \rightarrow \infty \Rightarrow i(\infty) = 0 \quad v_x(\infty) = 0 \quad v_L(\infty) = 0$$

$$v_C(\infty) = 10\text{ V}$$



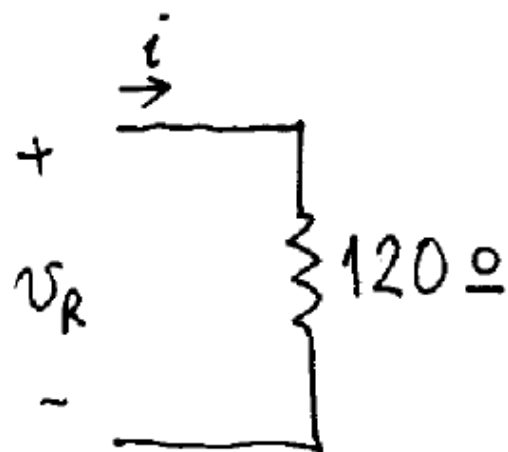
$$0,005 v_x = 0,005 \cdot 100 \cdot i$$

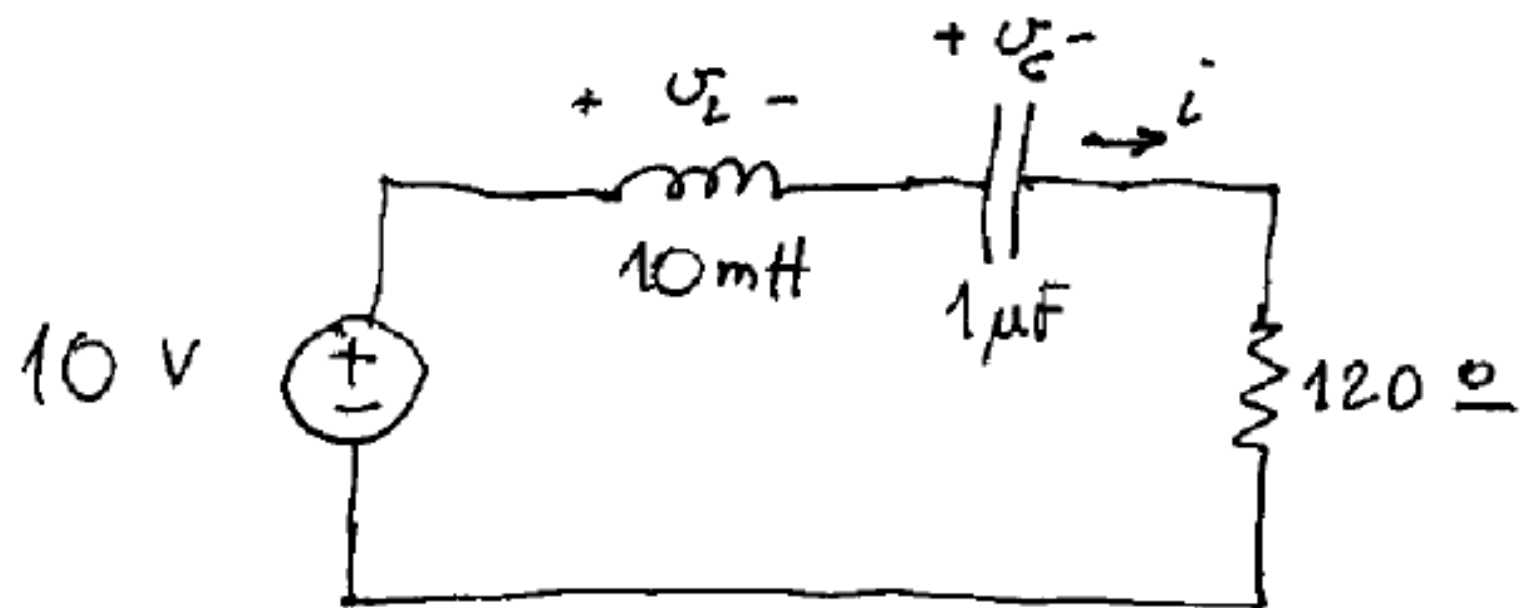
$$= 0,5 i$$



$$v_R = 100 i + 40 \cdot 0,5 i$$

$$= 120 i$$





RLC

RLC

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{120}{2 \cdot 10^{-2}} = 6000 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \cdot 10^{-6}}} = 10000 \text{ rad/s}$$

> ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΟ

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 10^3 \sqrt{100 - 36} = 8000 \text{ rad/s}$$

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + v_c(\infty)$$

$$v_c(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + v_c(\infty)$$

$$v_c(0^+) = 5, \quad v_c(\infty) = 10 \Rightarrow A = -5$$

$$\frac{dv_c}{dt} = 5\alpha e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + \omega_d B e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + F(t)$$

$$F(t) \text{ nepixu nulzova} \Rightarrow F(0^+) = 0$$

$$\left. 5\alpha e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + \omega_d B e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + F(t) \right|_{t=0^+} = 0$$

$$i(0^+) = C \left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0^+}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{5\alpha}{\omega_d}$$

$$v_c(t) = -5 e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) + 10$$

for $t \geq 0^+$

$$i(t) = C \frac{dv_c}{dt} = \dots = 5C e^{-\alpha t} \left[\left(\frac{\alpha^2 + \omega_d^2}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right]$$

$t \geq 0^+$

$$= \frac{5}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{5}{\omega_d} e^{-\alpha t} \left(-\alpha \sin \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t \right)$$

$$= 5 e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right)$$

$$v_c(t) = 5 \left[2 - e^{-6t} (\cos 8t + 0,75 \sin 8t) \right] \text{ V}$$

$$\boxed{! \text{ 0E ms}}$$

$$t \geq 0^+ \text{ ms}$$

$$i(t) = 62,5 e^{-6t} \sin 8t \text{ mA}, \quad t \geq 0^+ \text{ ms}$$

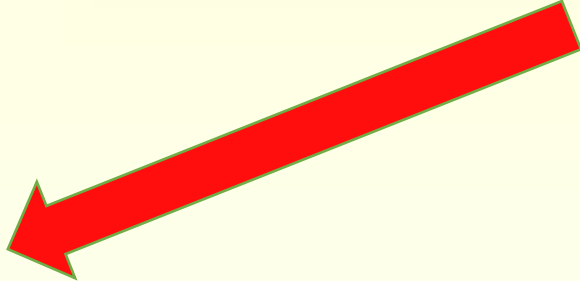
$$v_L(t) = 5 e^{-6t} (\cos 8t - 0,75 \sin 8t) \text{ V}, \quad t \geq 0^+ \text{ ms}$$

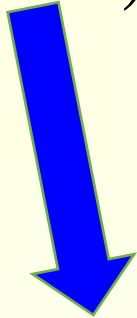
23

Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

- Να βρεθεί η τιμή του $\cos(3000t + 35^\circ)$ όταν $t = 2,6 \text{ s}$

$$\cos(3000 \times 2,6 + 35^\circ) = \cos(7800 + 35^\circ)$$


$$\begin{aligned} &\cos\left(7800 + 35^\circ \frac{\pi}{180^\circ}\right) \\ &= \cos(7800,61087 \text{ rad}) \\ &= -0,99934 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} &\cos\left(7800 \frac{180^\circ}{\pi} + 35^\circ\right) \\ &= \cos(446942,0802^\circ) \\ &= -0,99934 \end{aligned}$$

24

Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

- Να βρεθεί η τιμή του

$$y(t) = 60 \cos(100t + 60^\circ) - 120 \sin(100t - 125^\circ) + 100 \cos(100t + 90^\circ)$$

- Εφόσον έχουν την ίδια συχνότητα

$$60 \cos(100t + 60^\circ) - 120 \sin(100t - 125^\circ) + 100 \cos(100t + 90^\circ)$$

$$= 60 \angle 60^\circ - 120 \angle -215^\circ + 100 \angle 90^\circ$$

$$= 30 + j51,96 + 98,298 - j68,829 + 0 + j100$$

$$= 128,298 + j83,131$$

$$= 152,88 \angle 32,94^\circ$$

$$= 152,88 \cos(100t + 32,94^\circ)$$

25

Η ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ

- Να βρεθεί η τιμή του

$$y(t) = 100 \cos(\omega t + 40^\circ) + 100 \cos(\omega t + 160^\circ) + 100 \cos(\omega t - 80^\circ)$$

- Εφόσον έχουν την ίδια συχνότητα

$$100 \cos(\omega t + 40^\circ) + 100 \cos(\omega t + 160^\circ) + 100 \cos(\omega t - 80^\circ)$$

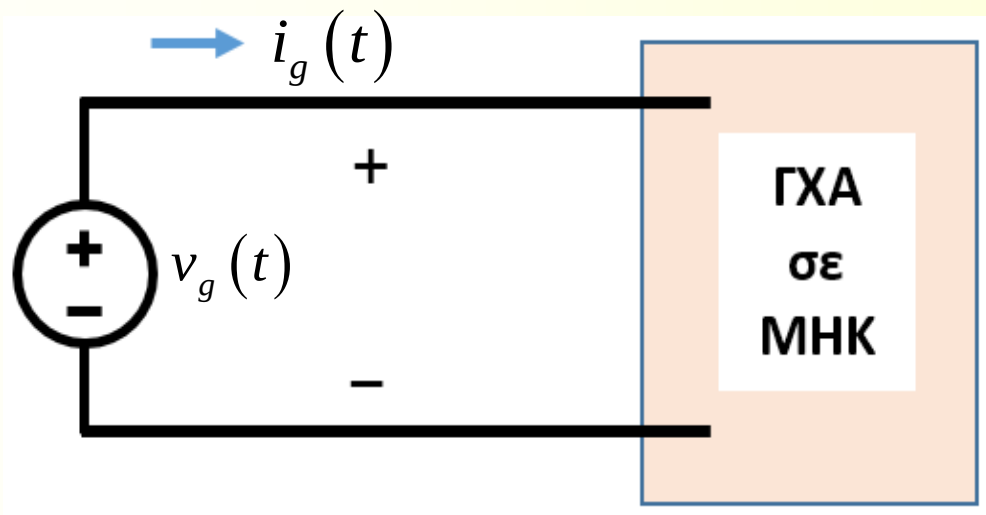
$$= 100 \angle 40^\circ + 100 \angle 160^\circ + 100 \angle -80^\circ$$

$$= 76,60444 + j64,27876 - 93,96926 + j34,20201 + 17,36482 - j98,48078$$

$$= 0 \angle 0^\circ$$

26

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



$$v_g(t) = 150 \cos(8000\pi t + 20^\circ) \text{ V}$$

$$i_g(t) = 30 \sin(8000\pi t + 38^\circ) \text{ A}$$

- Ποια είναι η εμπέδηση που «βλέπει» η πηγή;
- Κατά πόσα μs είναι εκτός φάσης το ρεύμα σε σχέση με την τάση;

ΕΜΠΕΔΗΣΗ

- Οι φάσορες:

$$v_g(t) = 150 \cos(8000\pi t + 20^\circ) \Rightarrow \mathbf{V}_g = 150 \angle 20^\circ$$

$$i_g(t) = 30 \sin(8000\pi t + 38^\circ) \Rightarrow \mathbf{I}_g = 30 \angle -52^\circ \quad (= 38 - 90)$$

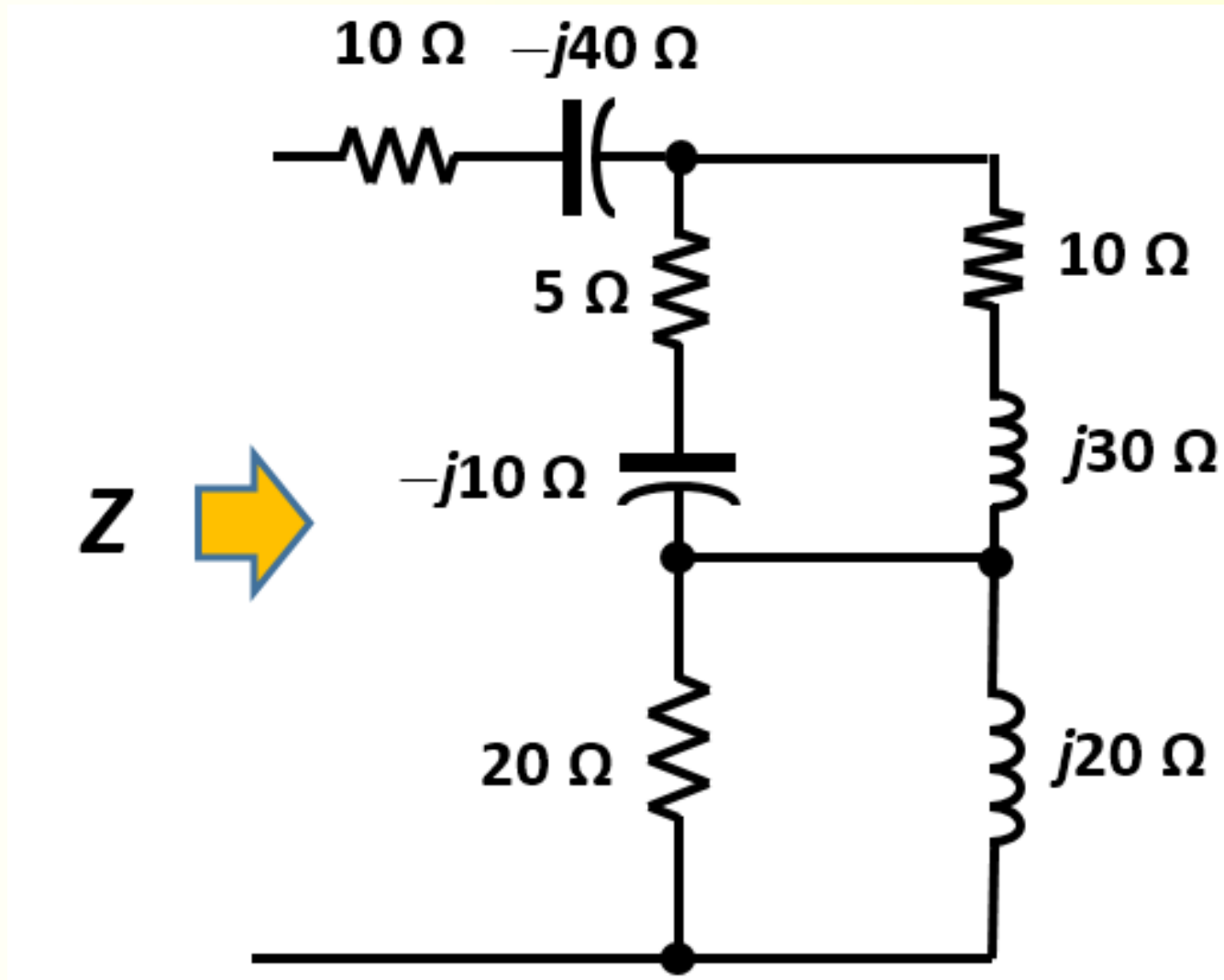
- Η εμπέδηση:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{I}_g} = \frac{150 \angle 20^\circ}{30 \angle -52^\circ} = 5 \angle 72^\circ \quad (20 - (-52))$$

- Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι 72 μοίρες
- Η ημιτονοειδής i_g καθυστερεί κατά $(72/360) \times (\text{περίοδο } T)$
- $2\pi f = 8000\pi \Rightarrow f = 4000 \text{ Hz} \Rightarrow T = 1/f = 250 \mu\text{s}$
- Οπότε η καθυστέρηση του ρεύματος είναι $1/5 \times 250 = \mathbf{50 \mu\text{s}}$

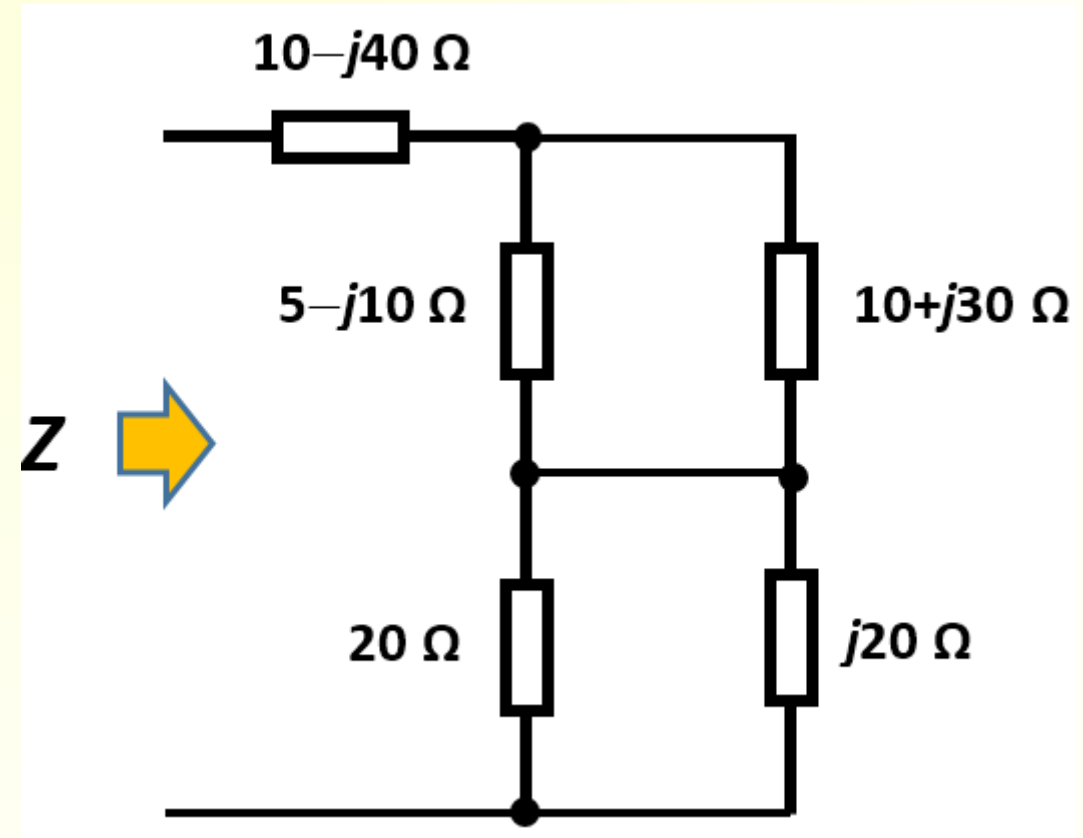
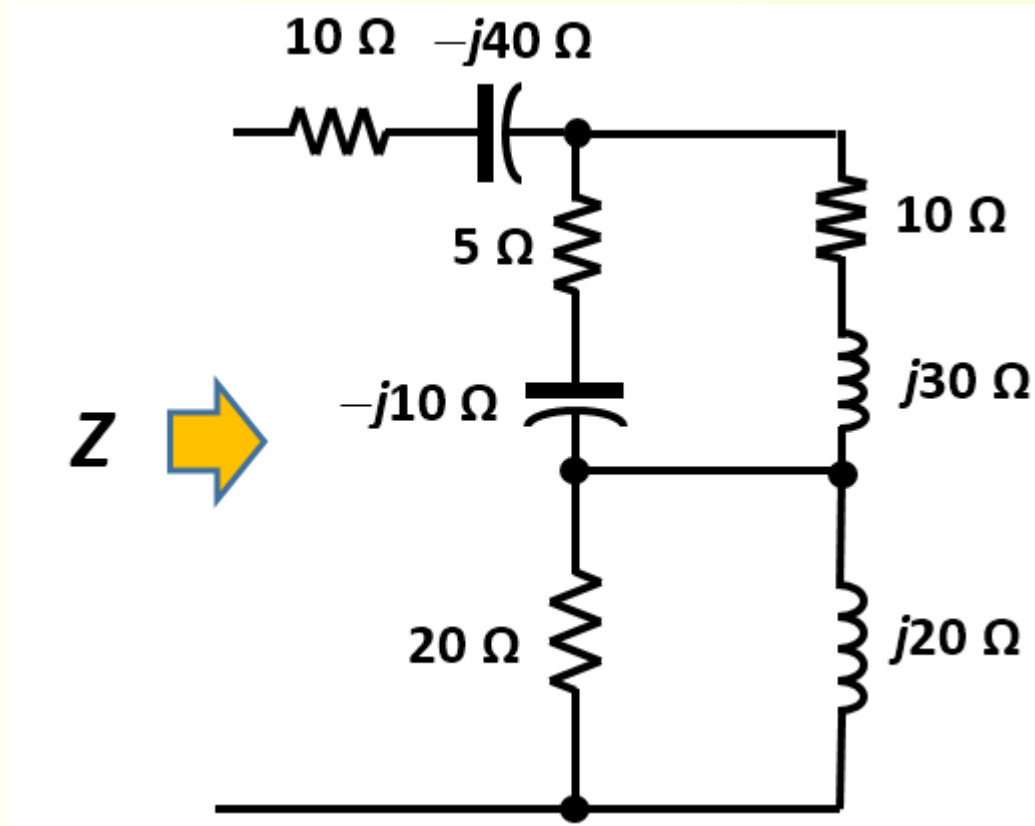
27

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



- Ποιά είναι η εμπέδηση Z ;

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



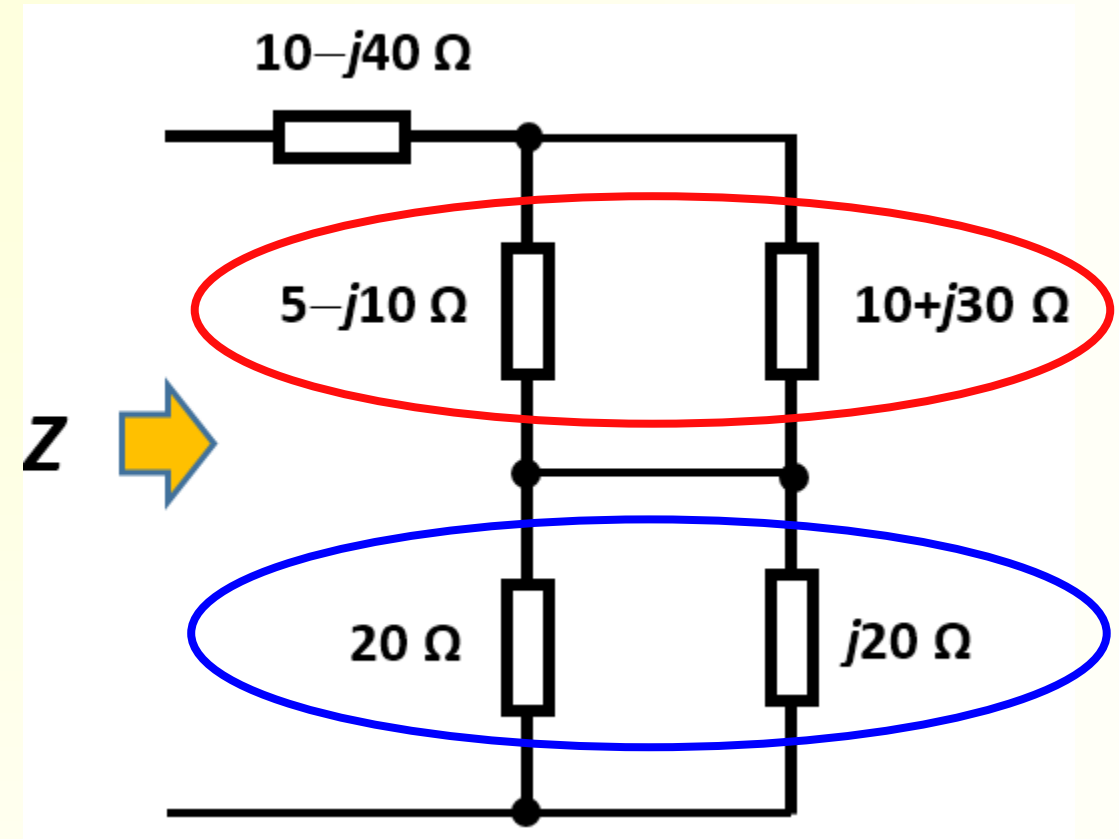
- Τα δυο κυκλώματα είναι ισοδύναμα

ΕΜΠΕΔΗΣΗ

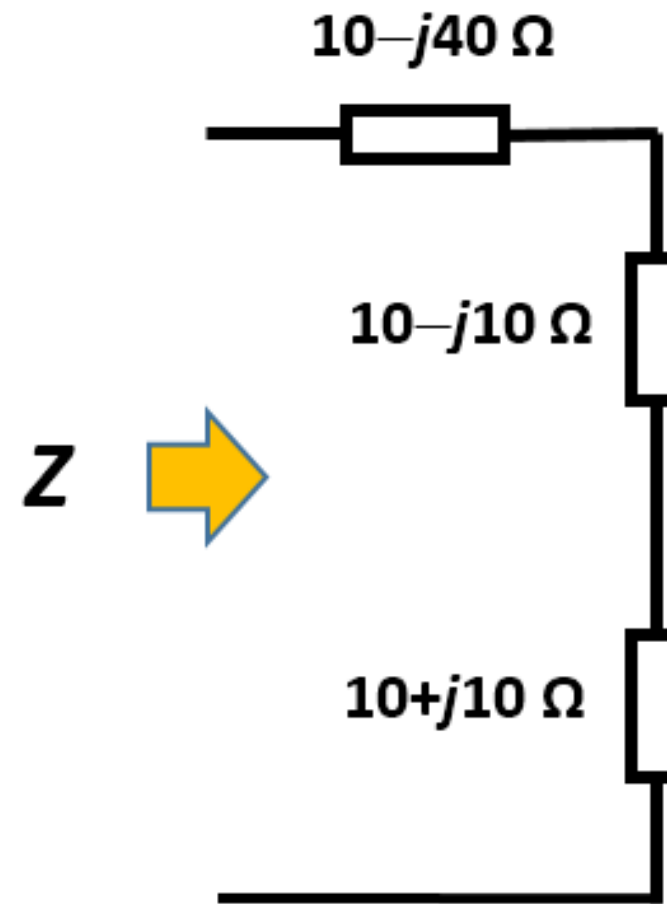
$$\begin{aligned} & \frac{(5 - j10)(10 + j30)}{(5 - j10 + 10 + j30)} \\ &= \frac{(11,2 \angle -63,4^\circ)(31,62 \angle 71,7^\circ)}{(25 \angle 53,1^\circ)} \\ &= 14,14 \angle -45^\circ = 10 - j10 \end{aligned}$$

$$\frac{(20)(j20)}{(20 + j20)}$$

$$= 20 \frac{j}{(1 + j)} = 20 \frac{j(1 - j)}{(1 + j)(1 - j)} = 20 \frac{(1 + j)}{2} = 10 + j10 = 14,14 \angle 45^\circ$$



ΕΜΠΕΔΗΣΗ

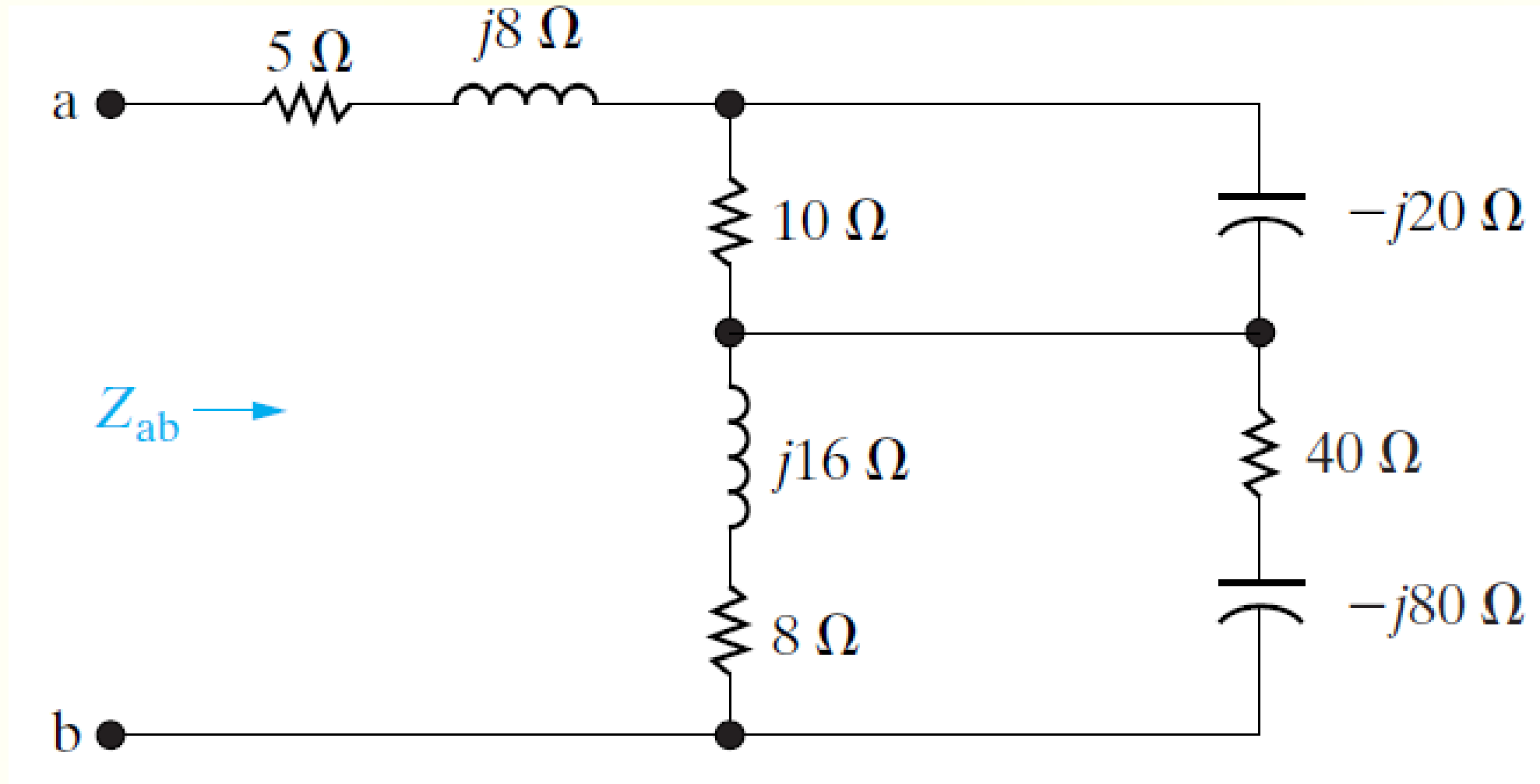


- Τελικά:

$$(10 - j40) + (10 - j10) + (10 + j10) = 30 - j40 = 50 \angle 53,13^\circ \Omega$$

27-A

ΕΜΠΕΔΗΣΗ—ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

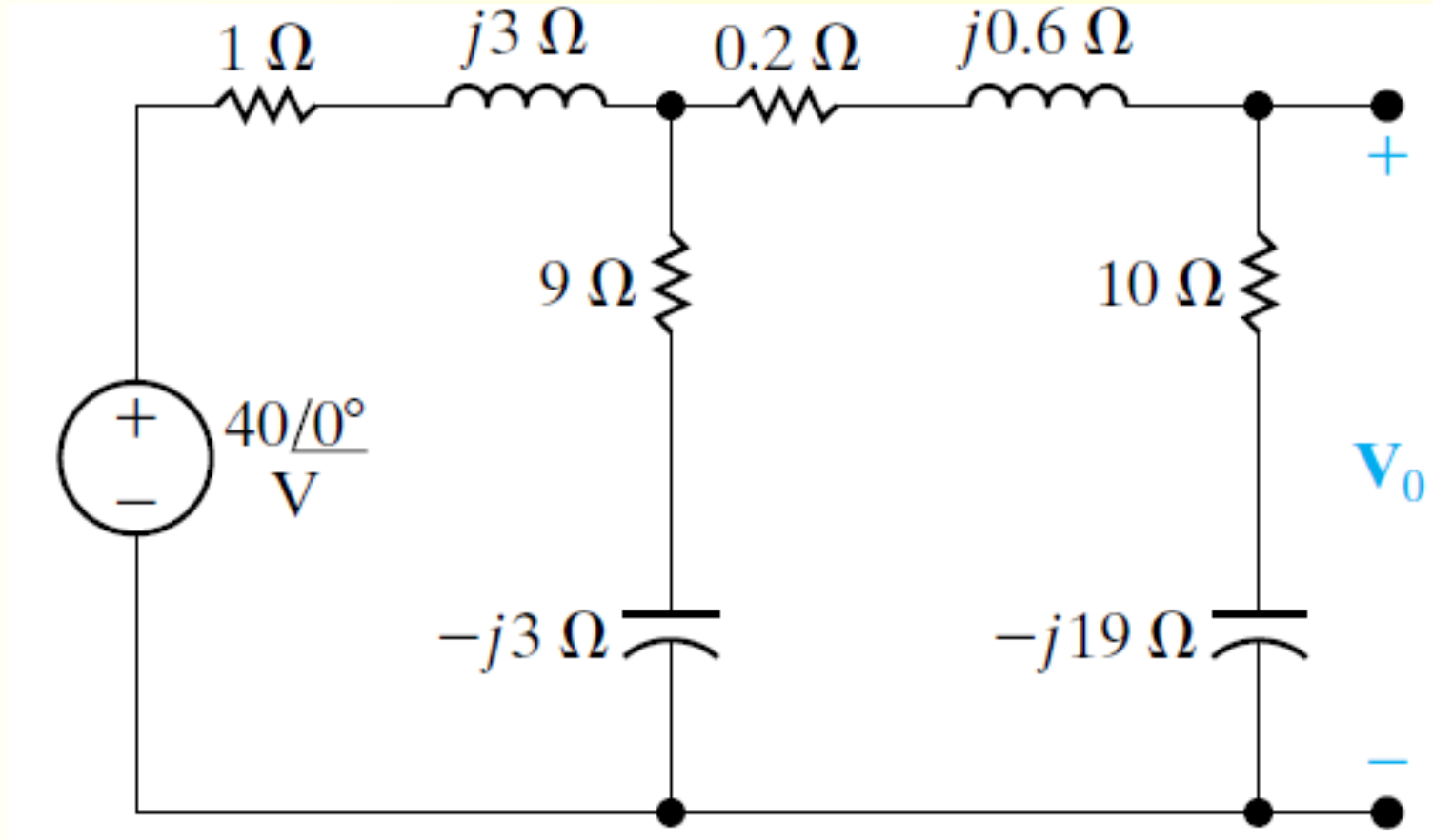


- Ποιά είναι η εμπέδηση Z_{ab} ;

$$25 + j20 = 32,02 \angle 38,66^\circ \ \Omega$$

28

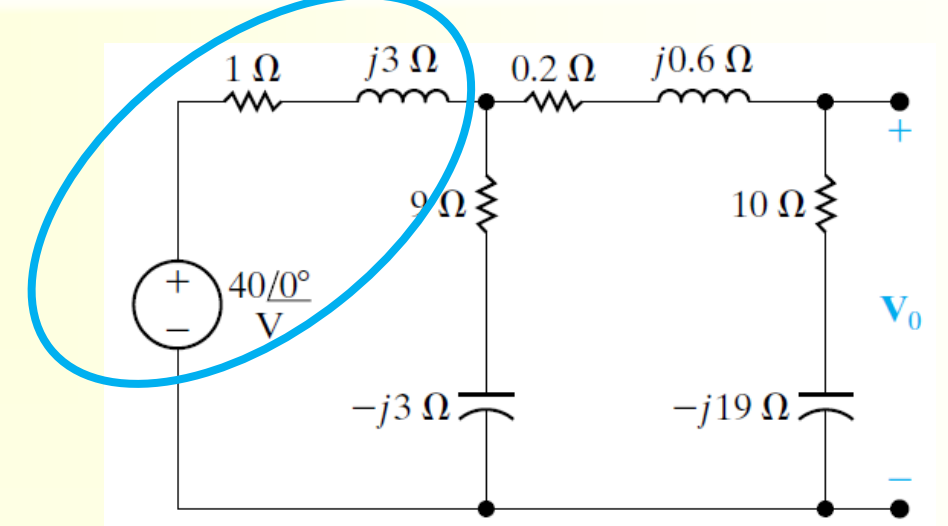
ΕΜΠΕΔΗΣΗ



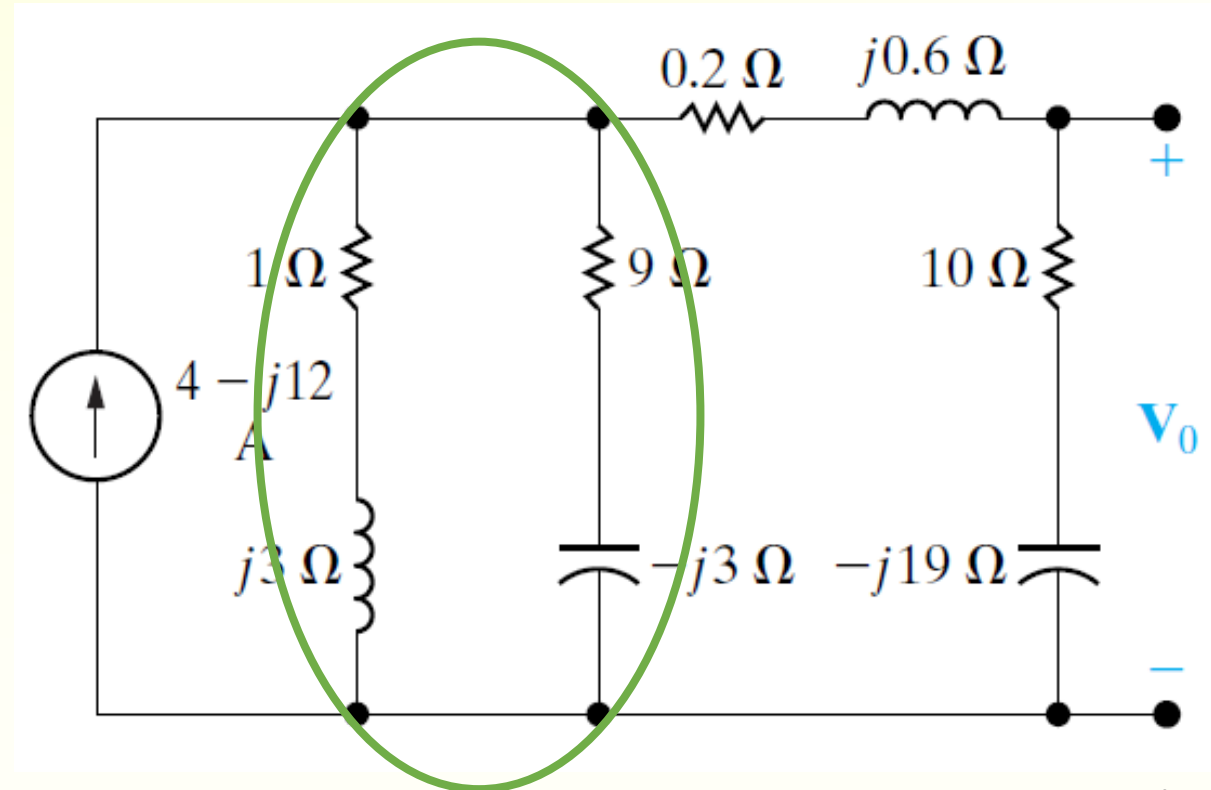
- Να υπολογιστεί η τάση V_0

ΕΜΠΕΔΗΣΗ

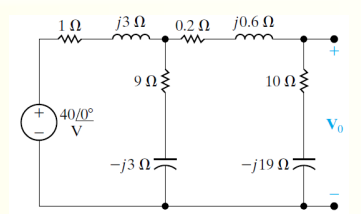
- Εξαιτίας τής μοναδικής πηγής, λύνουμε με απλοποιήσεις και μετασχηματισμούς



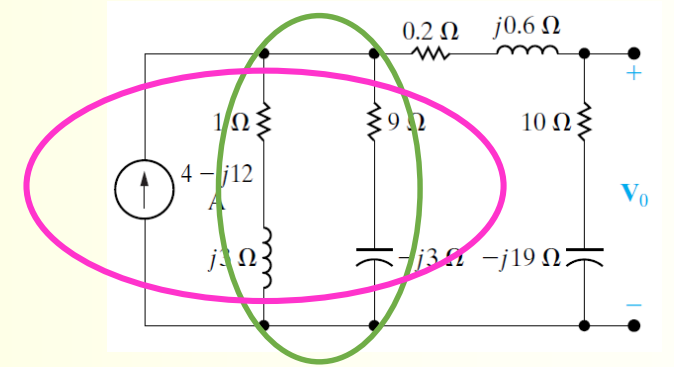
$$\mathbf{I} = \frac{40}{1 + j3} = \frac{40}{10}(1 - j3) = 4 - j12\text{ A}$$



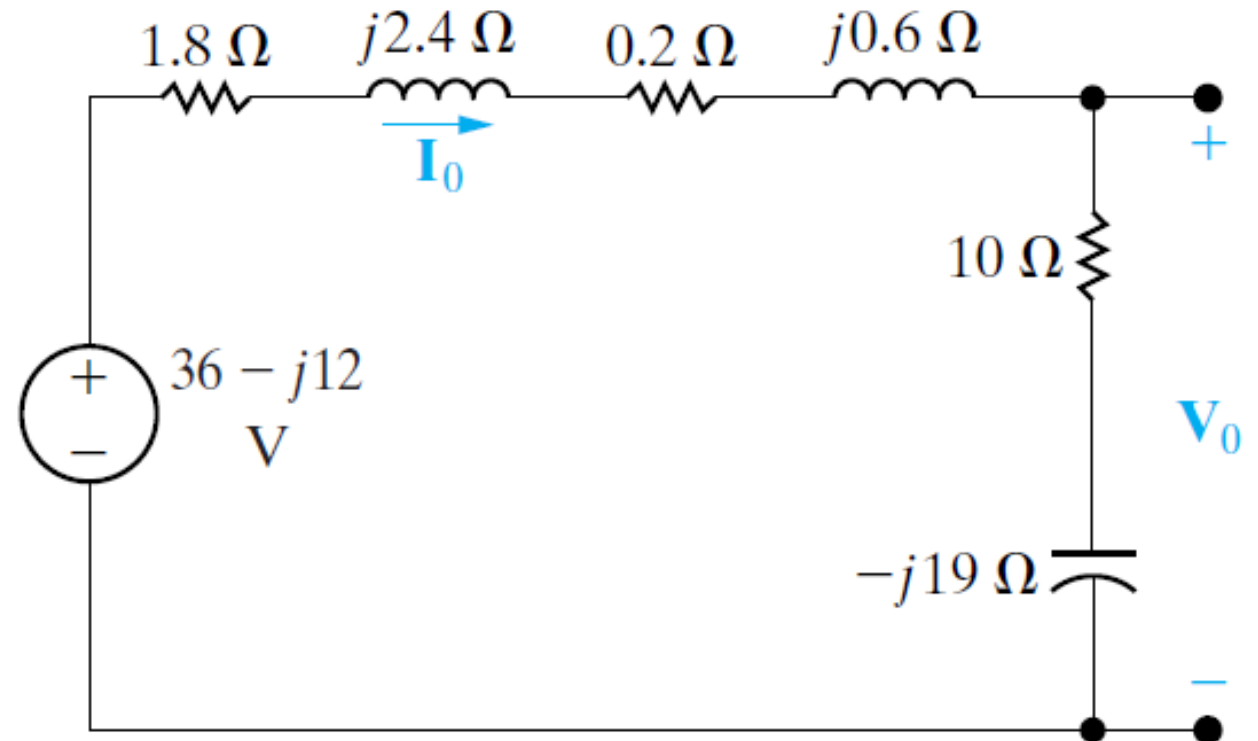
ΕΜΠΕΔΗΣΗ



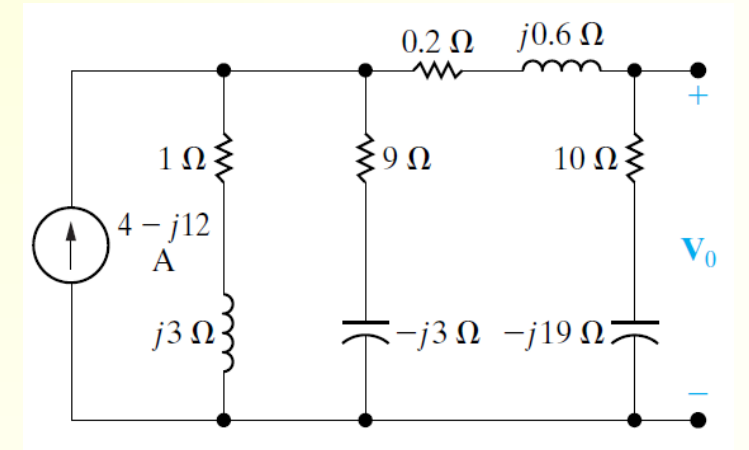
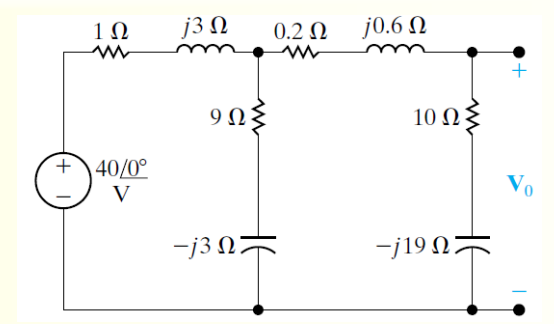
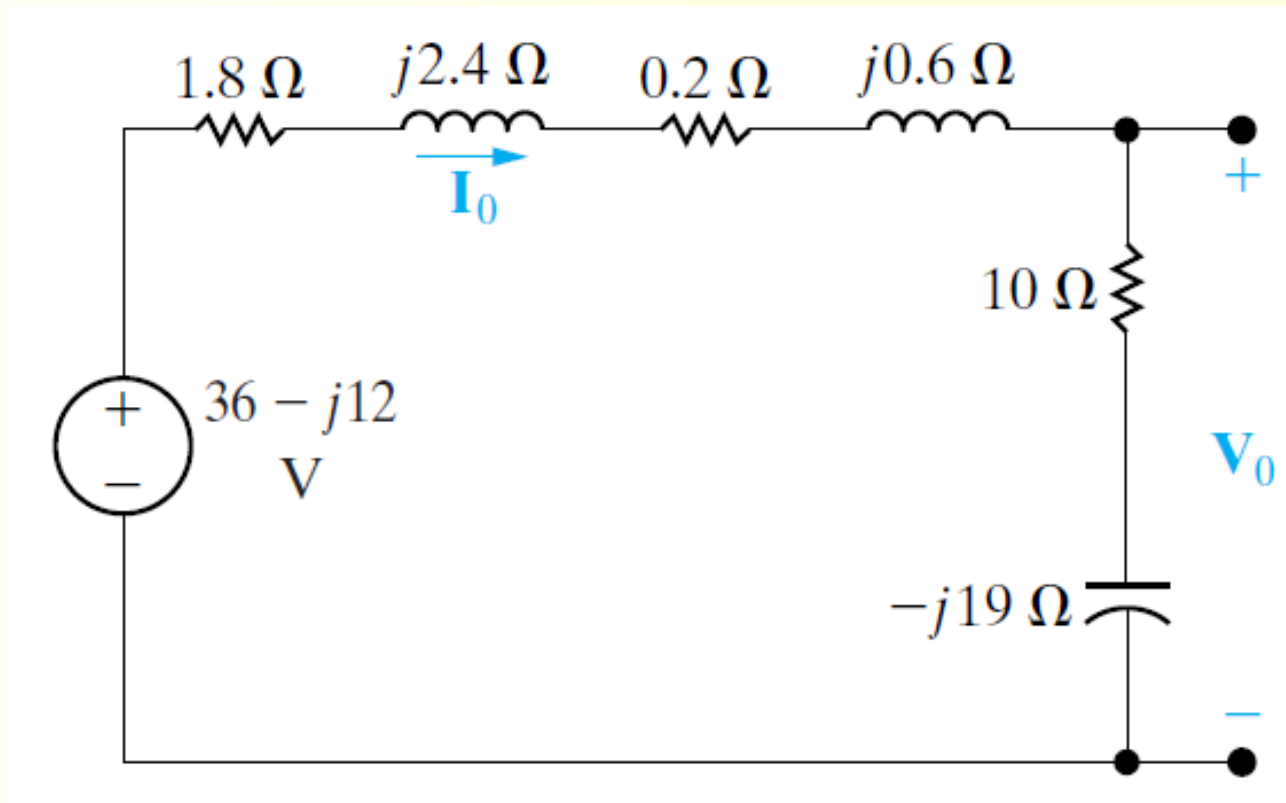
$$Z = \frac{(1 + j3)(9 - j3)}{10} = 1.8 + j2.4\ \Omega$$



$$\mathbf{V} = (4 - j12)(1.8 + j2.4) = 36 - j12\ \text{V}$$



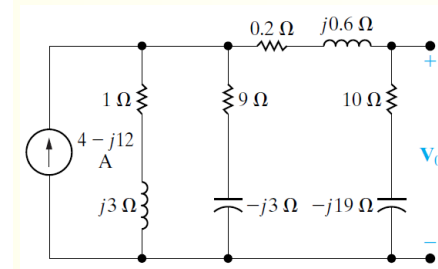
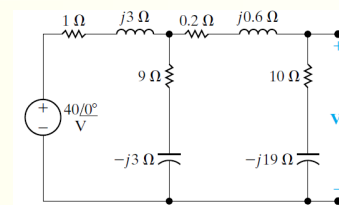
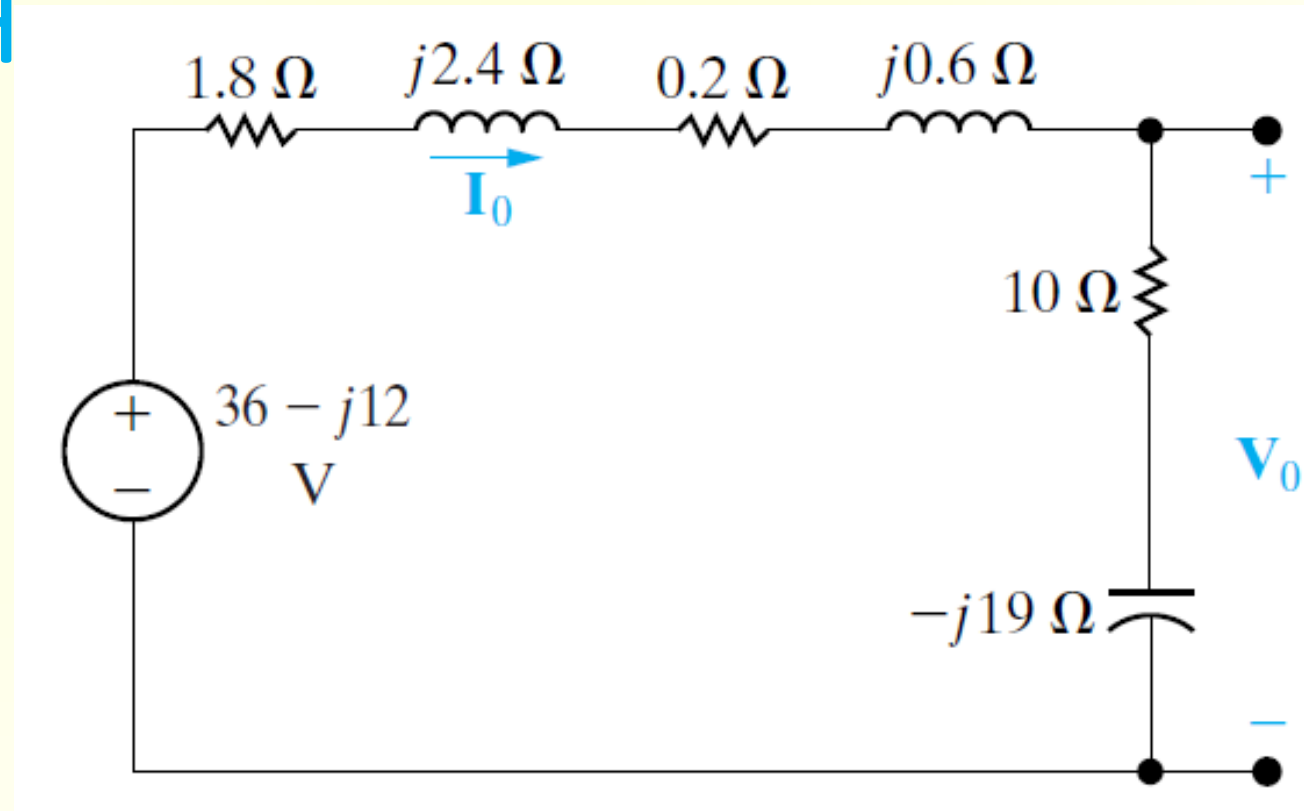
ΕΜΠΕΔΗΣΗ



- Δυο επιλογές (ίδιας πολυπλοκότητας):

 1. Διαιρέτης τάσης
 2. Υπολογισμός ρεύματος $\mathbf{I_0}$ και πολ/μός επί $10-j19 \Omega$

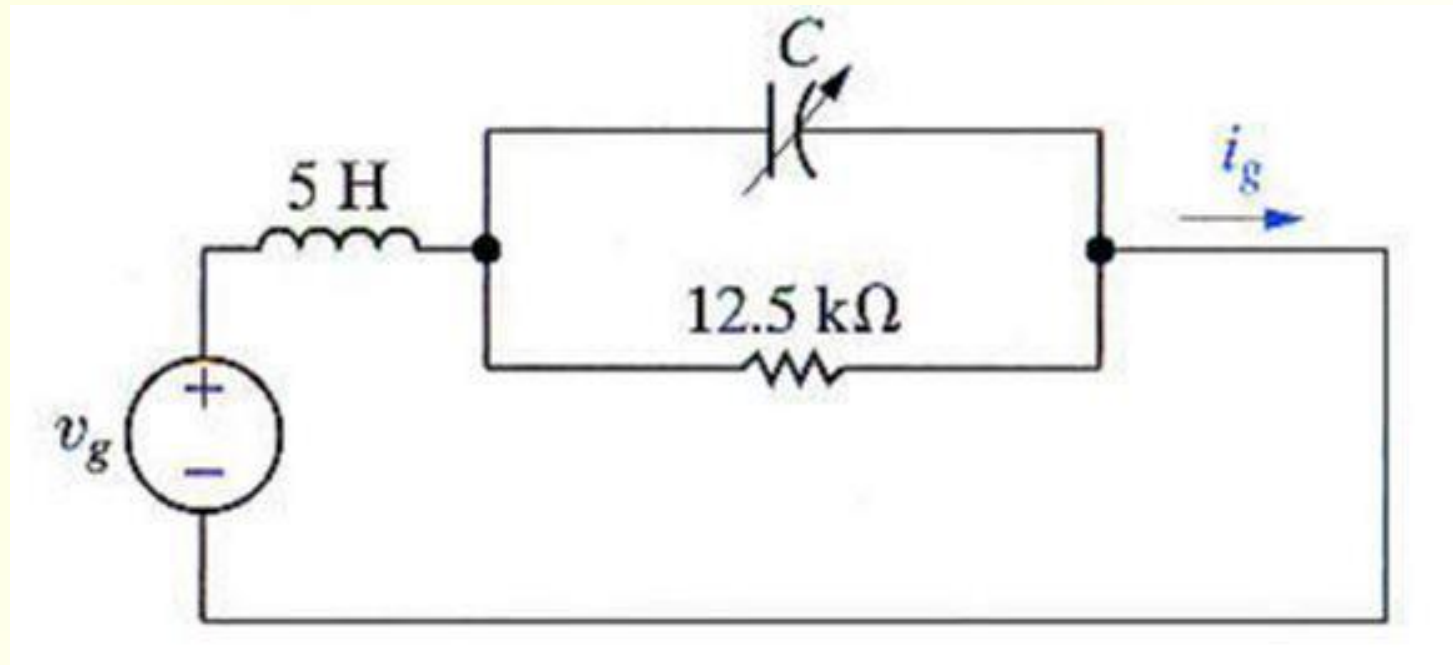
ΕΜΠΕΔΗΣΗ



$$\begin{aligned}
 V_0 &= (36 - j12) \frac{10 - j19}{(1,8 + j2,4) + (0,2 + j0,6) + (10 - j19)} \\
 &= 37,95 \angle -18,44^\circ \frac{21,47 \angle -62,24^\circ}{20 \angle -53,13^\circ} \\
 &= 40,74 \angle -27,55^\circ = 36,12 - j18,84 \text{ V}
 \end{aligned}$$

29

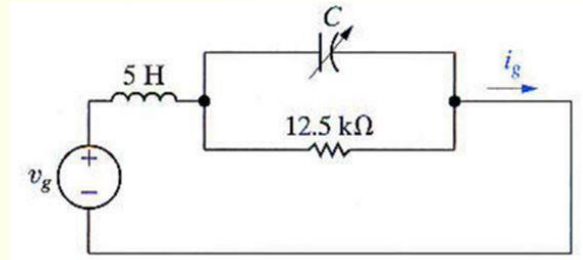
ΕΜΠΕΔΗΣΗ



- Το κύκλωμα λειτουργεί σε ΜΗΚ
 - Μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή έως ότου το ρεύμα i_g και η τάση v_g είναι σε φάση
1. Να υπολογιστεί αυτή η χωρητικότητα (ή οι χωρητικότητες) του πυκνωτή αν $v_g = 250 \cos(1000t)\text{ V}$
 2. Να υπολογιστεί το αντίστοιχο για τη χωρητικότητα αυτή ρεύμα i_g

ΕΜΠΕΔΗΣΗ

- Υπολογίζουμε την ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση του συνδυασμού πυκνωτή και αντίστασης:



$$Z_p = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + (1/j\omega C)} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$= \frac{12,500}{1 + j(1000)(12,500)C} = \frac{12,500}{1 + j12.5 \times 10^6 C}$$

$$= \frac{12,500(1 - j12.5 \times 10^6 C)}{1 + 156.25 \times 10^{12} C^2}$$

$$= \frac{12,500}{1 + 156.25 \times 10^{12} C^2} - j \frac{156.25 \times 10^9 C}{1 + 156.25 \times 10^{12} C^2}$$

ΕΜΠΕΔΗΣΗ

- Υπολογίζουμε και τη σύνθετη αντίσταση του πηνίου:

$$j\omega L = j1000 \times 5 = j5000 \Omega$$

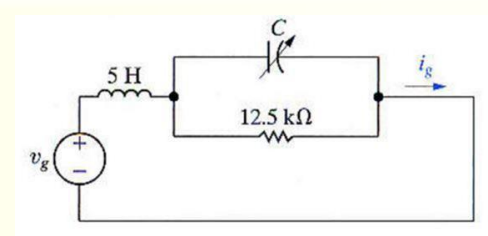
- και την προσθέτουμε στην ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση του συνδυασμού πυκνωτή και αντίστασης που βρήκαμε πριν
- Για να είναι σε φάση η τάση και το ρεύμα, πρέπει η σύνθετη αντίσταση να είναι ωμική, ή, με άλλα λόγια, το φανταστικό μέρος της σύνθετης αντίστασης να είναι 0, οπότε πρέπει

$$5000 = \frac{156.25 \times 10^9 C}{1 + 156.25 \times 10^{12} C^2}$$

- ή ισοδύναμα

$$781.25 \times 10^{15} C^2 - 156.25 \times 10^9 C + 5000 = 0$$

$$C^2 - 20 \times 10^{-8} C + 64 \times 10^{-16} = 0$$



ΕΜΠΕΔΗΣΗ

- Επιλύοντας:

$$C_{1,2} = 10 \times 10^{-8} \pm \sqrt{100 \times 10^{-16} - 64 \times 10^{-16}}$$

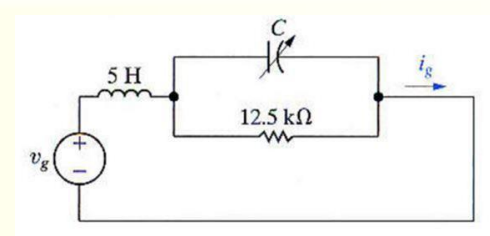
- Οπότε οι δυο δυνατές χωρητικότητες είναι:

$$C_1 = 10 \times 10^{-8} + 6 \times 10^{-8} = 16 \times 10^{-8} = 0.16 \mu\text{F}$$

$$C_2 = 10 \times 10^{-8} - 6 \times 10^{-8} = 4 \times 10^{-8} = 0.04 \mu\text{F}$$

- Τα αντίστοιχα ρεύματα προκύπτουν από τον υπολογισμό της συνολικής σύνθετης (στην πραγματικότητα πια ωμικής μόνο) αντίστασης που είναι:

$$R_e = \frac{12,500}{1 + 156.25 \times 10^{12} C^2}$$



ΕΜΠΕΔΗΣΗ

- Για τις χωρητικότητες που βρήκαμε:

$$C = 160 \text{ nF}$$

$$R_e = 2500 \Omega$$

$$I_g = \frac{250/\underline{0^\circ}}{2500} = 0.1/\underline{0^\circ} \text{ A}$$

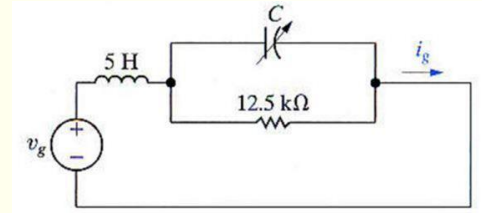
$$i_g = 100 \cos 1000t \text{ mA}$$

$$C = 40 \text{ nF}$$

$$R_e = 10\,000 \Omega$$

$$I_g = \frac{250/\underline{0^\circ}}{10,000} = 0.025/\underline{0^\circ} \text{ A}$$

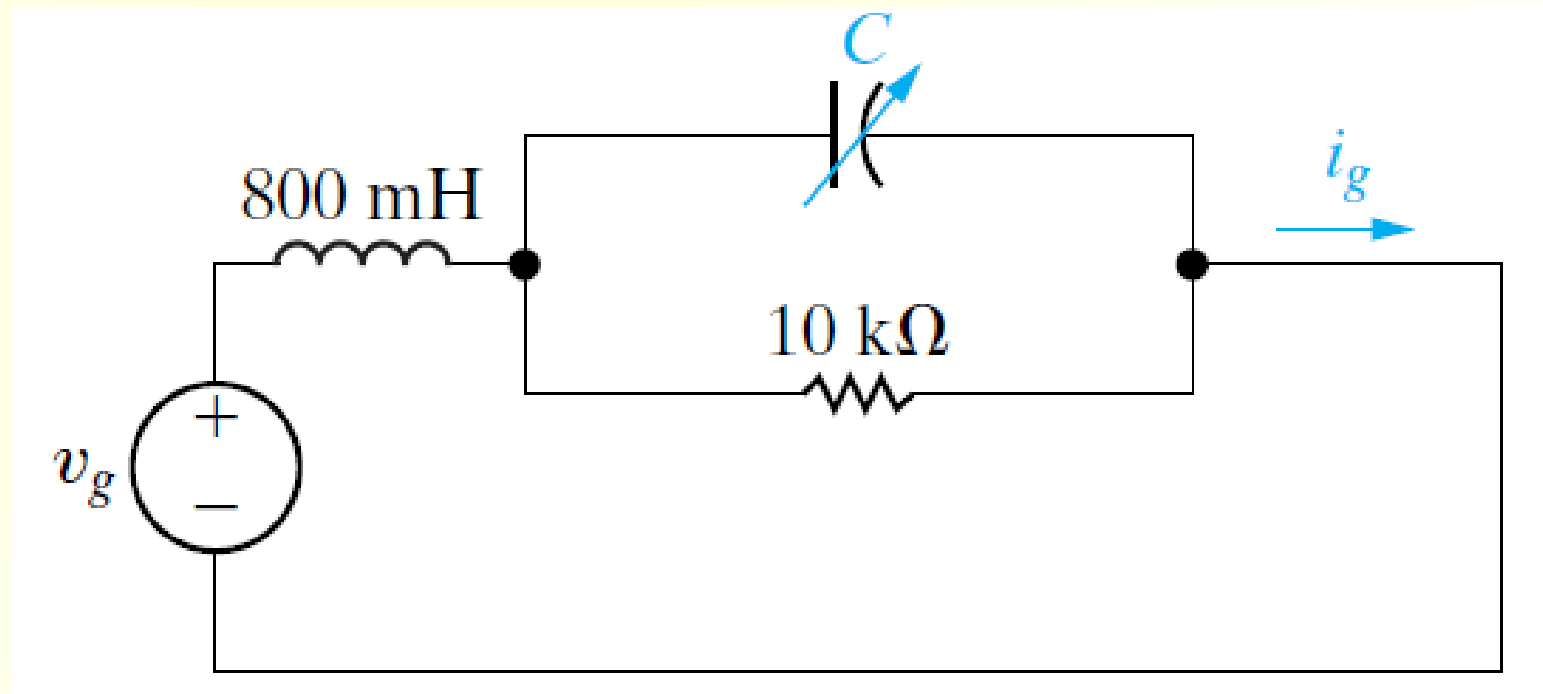
$$i_g = 25 \cos 1000t \text{ mA}$$



$$R_e = \frac{12,500}{1 + 156.25 \times 10^{12} C^2}$$

29A

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



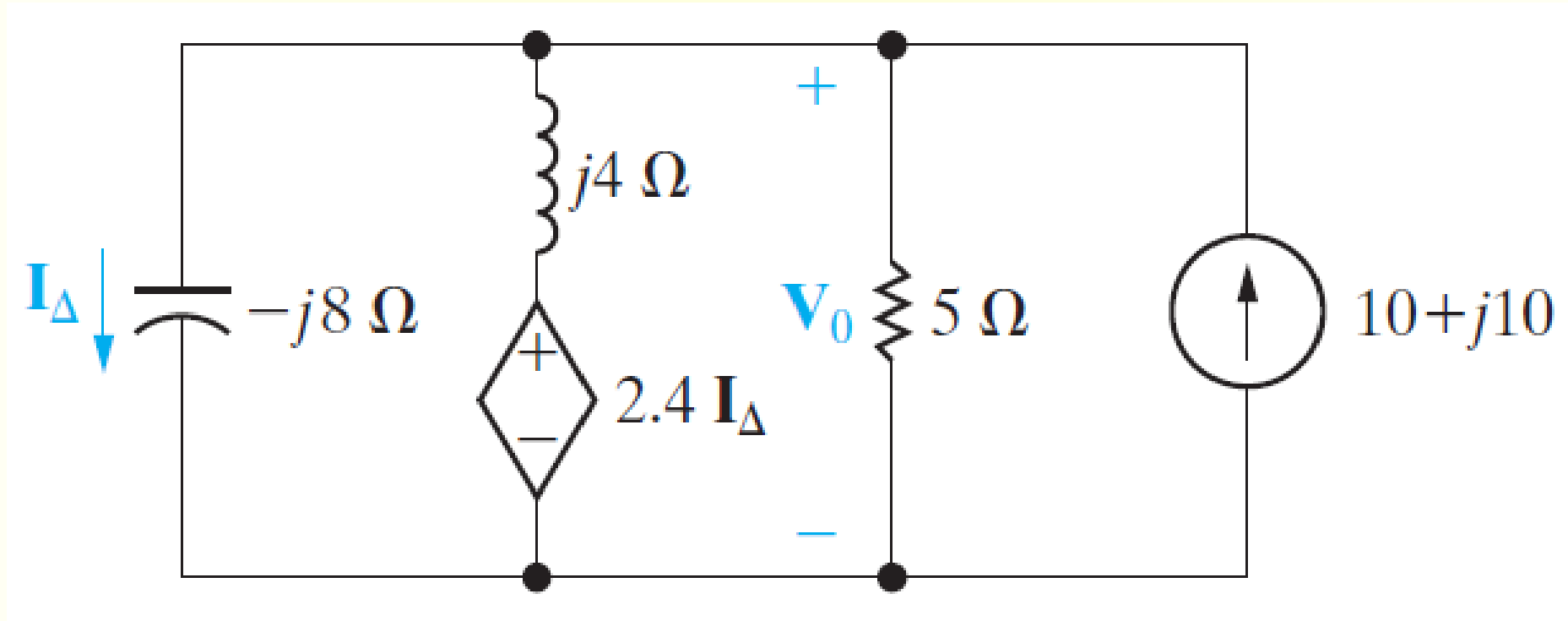
- Το κύκλωμα λειτουργεί σε ΜΗΚ
 - Μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή έως ότου το ρεύμα i_g και η τάση v_g είναι σε φάση
1. Να υπολογιστεί αυτή η χωρητικότητα (ή οι χωρητικότητες) του πυκνωτή αν $v_g = 80 \cos(5000t) \text{ V}$

$C_1 = 40 \text{ nF}$ $C_2 = 10 \text{ nF}$
 2. Να υπολογιστεί το αντίστοιχο για τη χωρητικότητα αυτή ρεύμα i_g

$i_g = 40 \cos 5000t \text{ mA}$ $i_g = 10 \cos 5000t \text{ mA}$

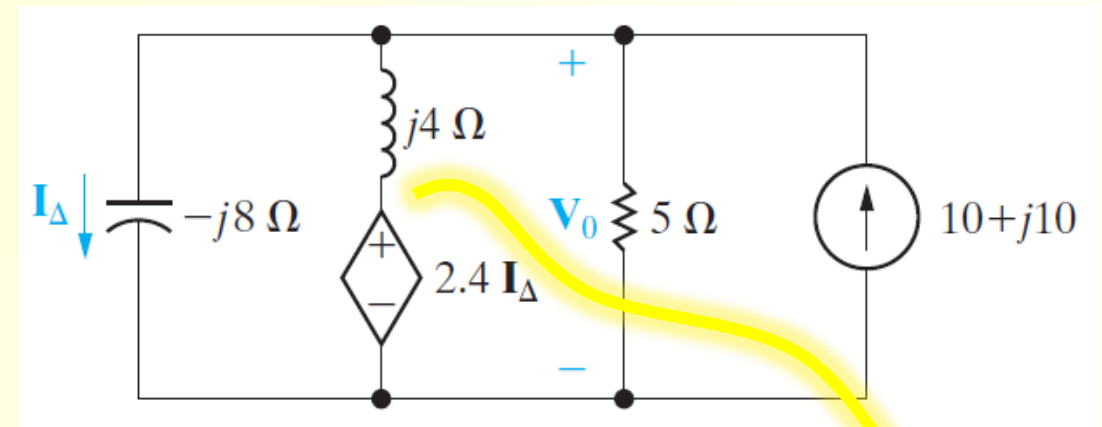
30

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



- Το κύκλωμα λειτουργεί σε ΜΗΚ
- Να υπολογιστεί η τάση $\mathbf{V}_0$

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



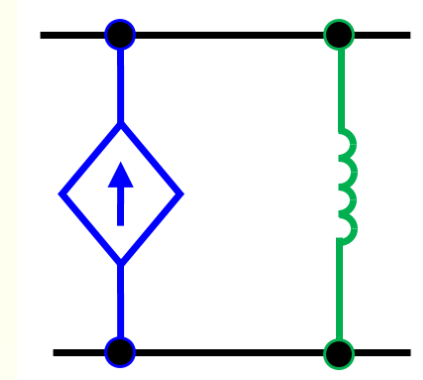
- Προφανώς η μέθοδος κομβικών τάσεων είναι η κατάλληλη (μια εξίσωση μόνο)

$$\frac{V_o}{-j8} + \frac{V_o - 2.4I_\Delta}{j4} + \frac{V_o}{5} - (10 + j10) = 0$$

- Και ο περιορισμός: $I_\Delta = \frac{V_o}{-j8}$

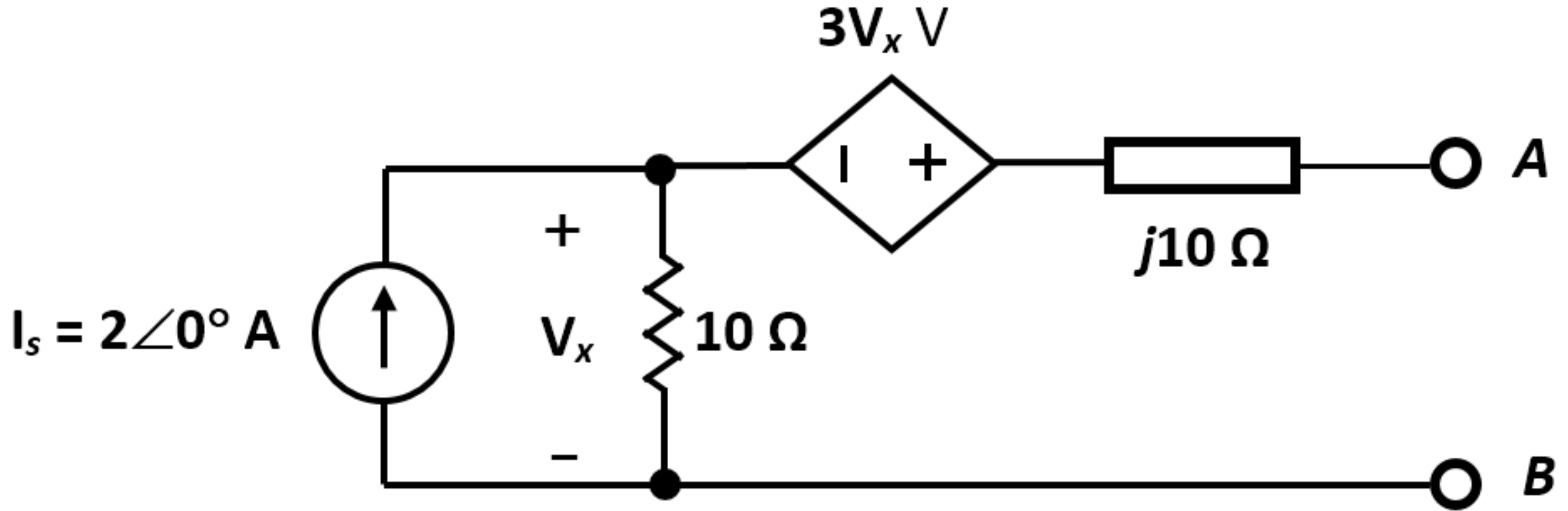
- Οπότε:

$$V_o = j80 = 80/\underline{90^\circ} \text{ V}$$



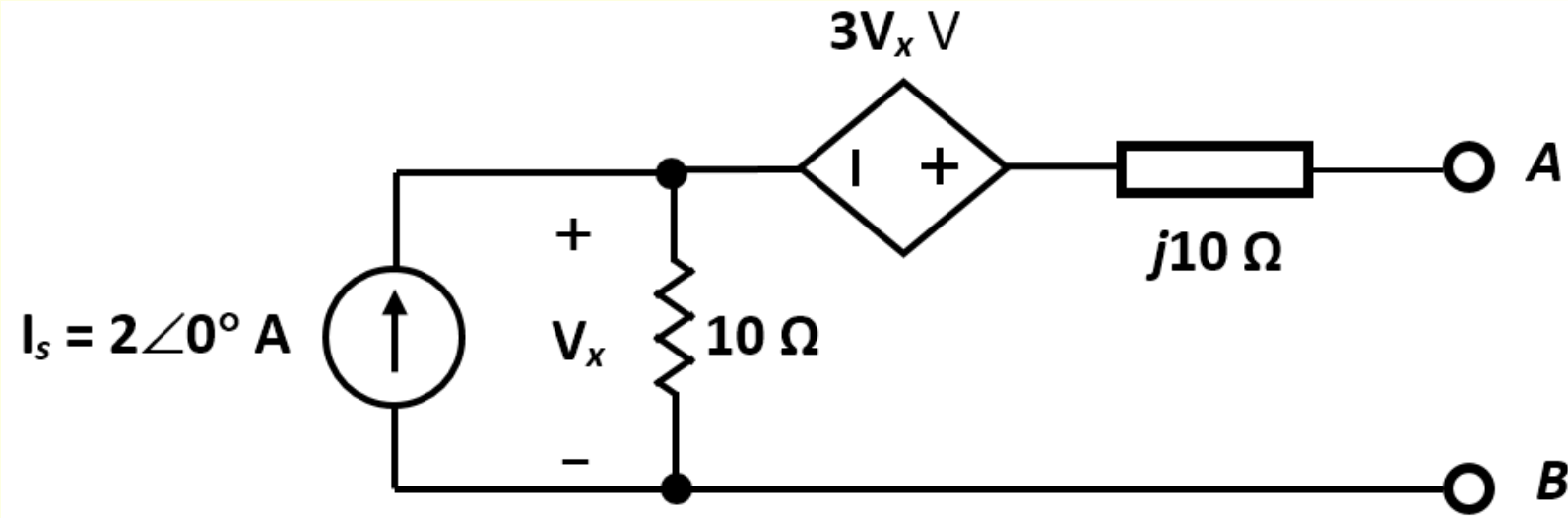
31

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



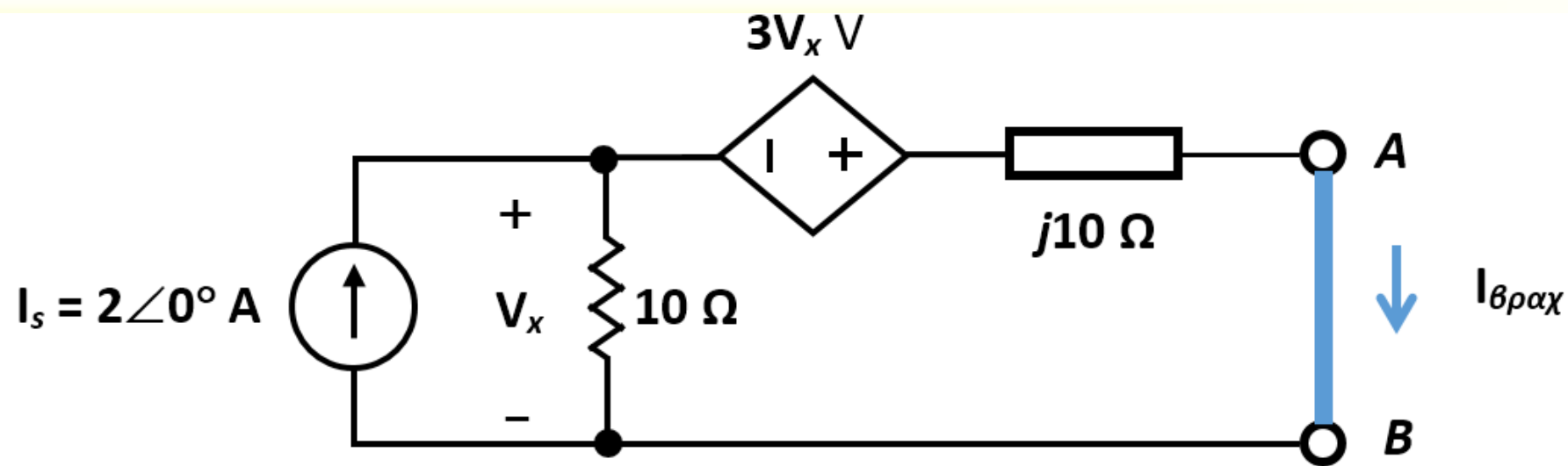
- Το κύκλωμα λειτουργεί σε ΜΗΚ
- Να υπολογιστεί το ισοδύναμο Thevenin από τα σημεία A και B

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



- Όταν τα σημεία A και B είναι ανοιχτοκυκλωμένα, όλο το ρεύμα τής πηγής περνάει από την ωμική αντίσταση και:
- $V_x = I_s \times 10 = 2\angle 0^\circ \times 10 = 20\angle 0^\circ \text{ V}$
- Τότε: $V_{Th} = V_{AB} = V_x + 3 V_x + (0 \times j10) = 4 V_x = 80\angle 0^\circ \text{ V}$
- Για την αντίσταση Thevenin μπορούμε να βραχυκυκλώσουμε τα σημεία A και B

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



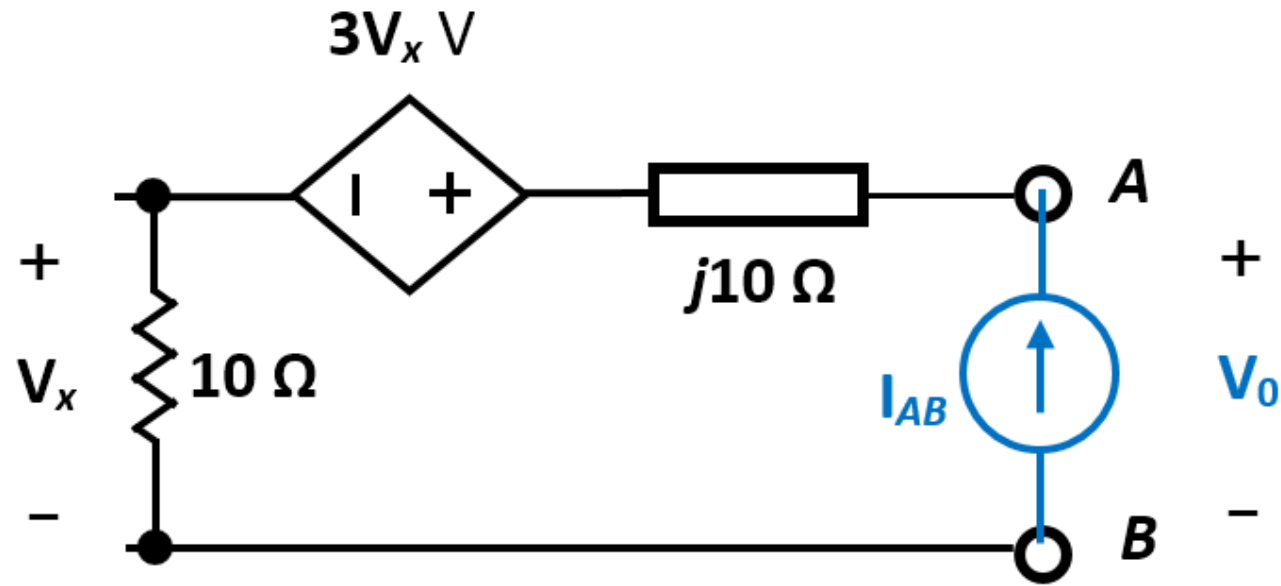
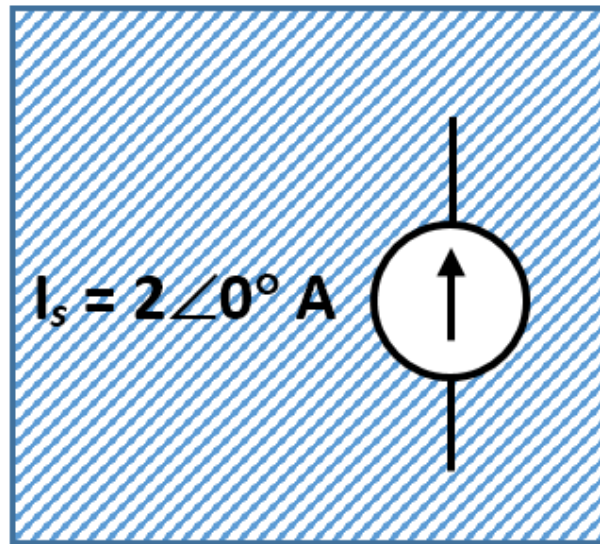
- Με (π.χ.) κομβικές τάσεις:
$$\frac{V_x}{10} - 2\angle 0^\circ + \frac{V_x + 3V_x}{j10} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{V_x}{10} + \frac{4V_x}{j10} = 2\angle 0^\circ \Rightarrow$$

$$V_x = 1,17647 + j4,70588$$

- Οπότε
$$I_{\beta\chi} = \frac{4V_x}{j10} = 1,88325 - j0,47059$$

- Και η εμπέδηση Thevenin:
$$Z_{Th} = \frac{V_{AB}}{I_{\beta\chi}} = \frac{80\angle 0^\circ}{1,88325 - j0,47059} = 40 + j10 \Omega$$

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



- Εναλλακτικά:

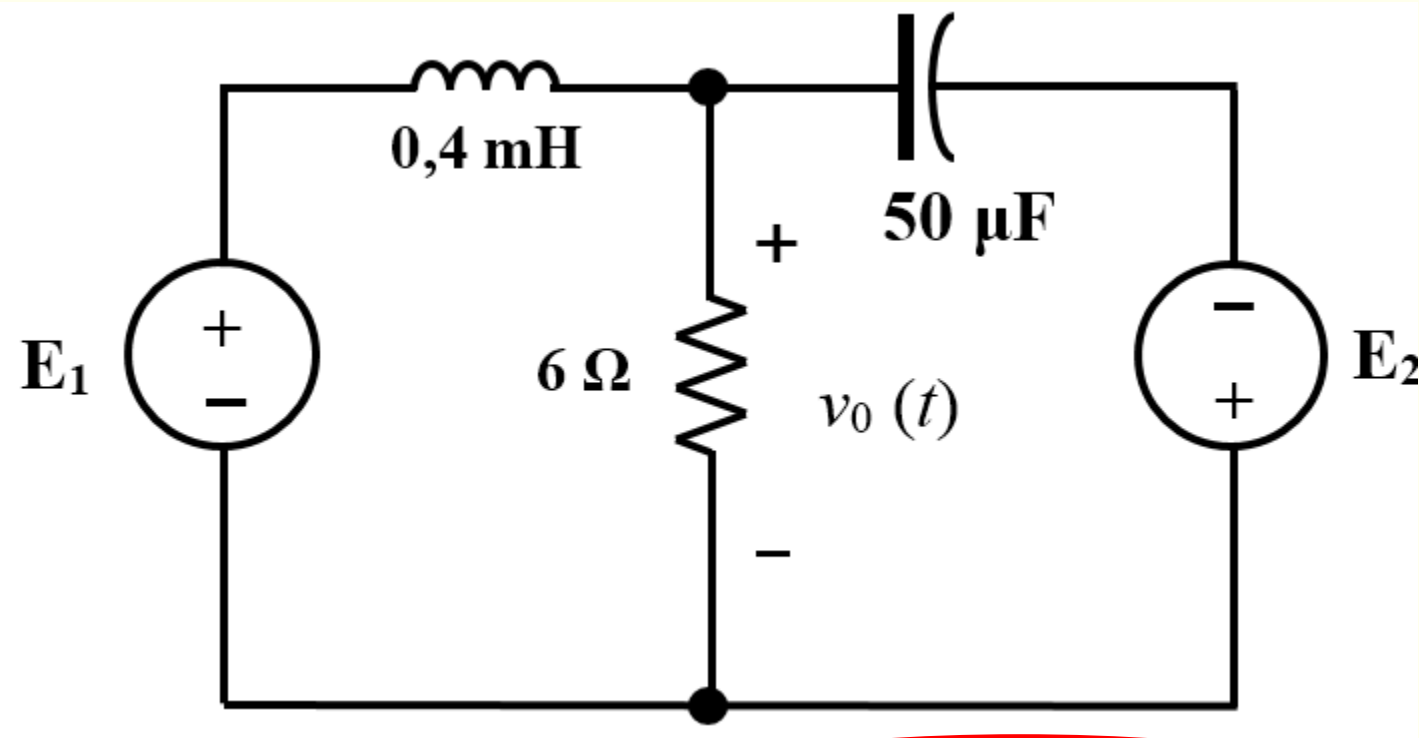
$$V_0 = j10I_{AB} + 3V_x + 10I_{AB} \Rightarrow$$

$$V_0 = j10I_{AB} + 30I_{AB} + 10I_{AB} \Rightarrow$$

$$V_0 = j10I_{AB} + 40I_{AB} \Rightarrow$$

$$Z_{Th} = \frac{V_0}{I_{AB}} = 40 + j10 \Omega$$

32

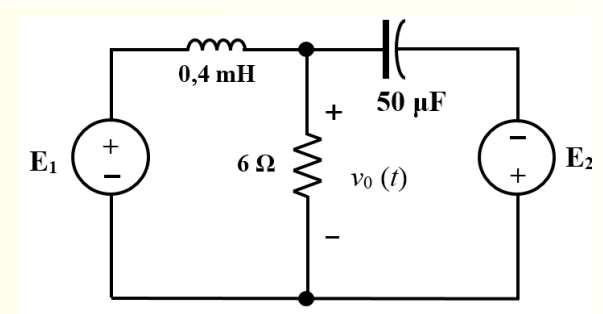


- Στο κύκλωμα, που λειτουργεί σε μόνιμη κατάσταση, να βρεθεί η τάση $v_0(t)$ αν για τις πηγές τάσης ισχύει

$$E_1(t) = 10 \cos(5000t + 53,13^\circ) \text{ V}$$

$$E_2(t) = 8 \sin(3000t) \text{ V}$$

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



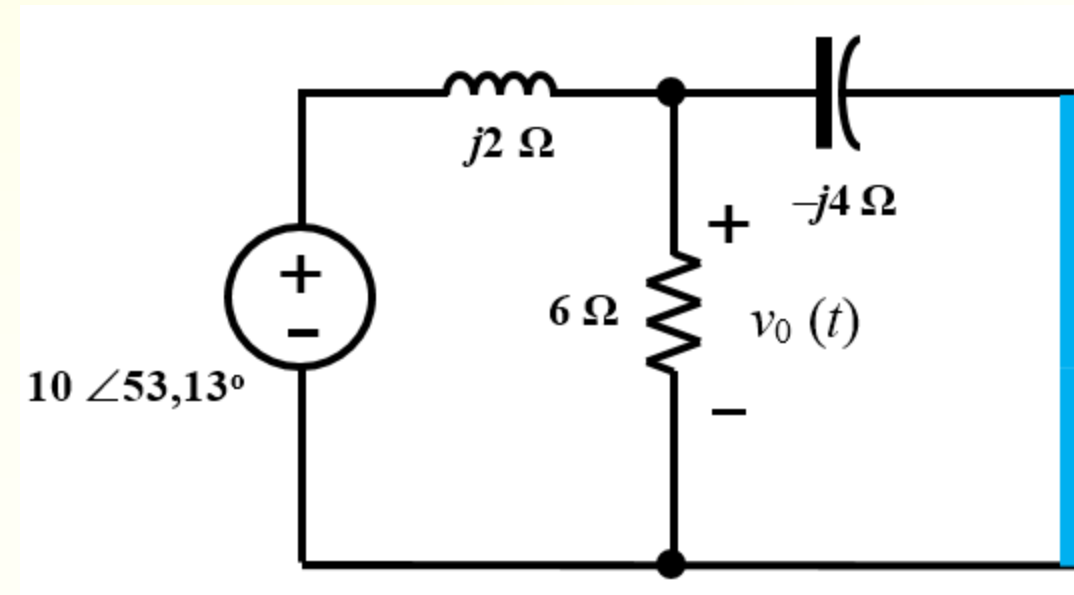
- Εξαιτίας της ύπαρξης δυο πηγών με **διαφορετική συχνότητα**, είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε επαλληλία
- Πρέπει λοιπόν να λύσουμε το κύκλωμα δυο φορές:
- **ΜΕΡΟΣ Α. Συχνότητα 5000 rad/s (E₂ εξουδετερωμένη)**

$$\frac{V_0}{6} + \frac{V_0}{-j4} + \frac{V_0 - 6 - j8}{j2} = 0$$

$$\Rightarrow 0,167V_0 + j0,25V_0 - j0,5V_0 + j3 - 4 = 0$$

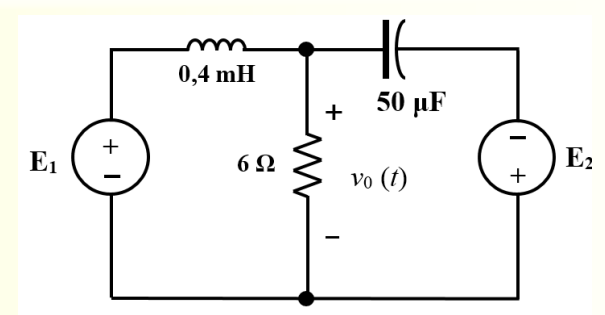
$$\Rightarrow V_0 = \frac{4 - j3}{0,167 - j0,25}$$

$$\Rightarrow V_0^{5000} = 15,691 + j5,54 = 16,64 \angle 19,44^\circ$$



ΕΜΠΕΔΗΣΗ

- ΜΕΡΟΣ Β. Συχνότητα 3000 rad/s (E_1 εξουδετερωμένη)
- Λύση με διαιρέτη τάσης:



Παράλληλος συνδυασμός πηνίου και αντίστασης:

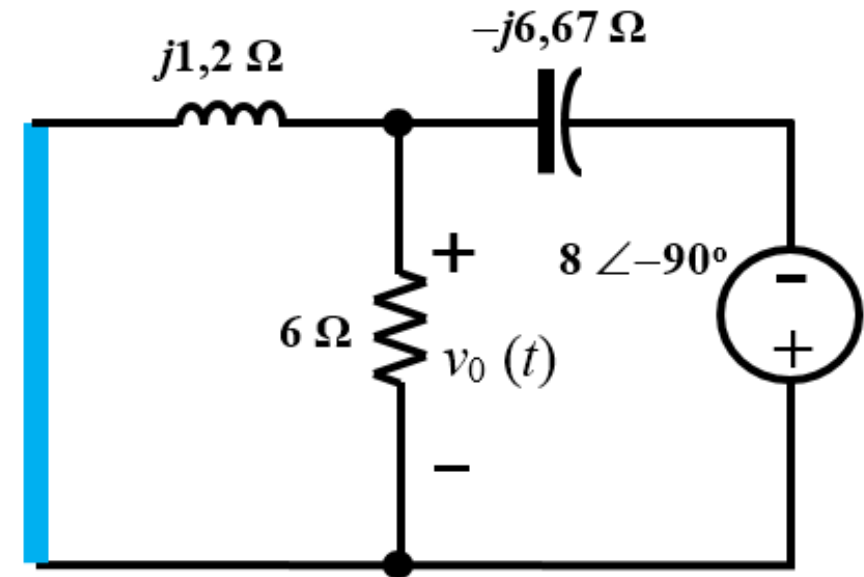
$$\mathbf{Z}_{RL} = \frac{j1,2 \times 6}{6 + j1,2} = \frac{7,2 \angle 90^\circ}{6,12 \angle 11,31^\circ} = 1,18 \angle 78,7^\circ = 0,231 + j1,16$$

Ολική σύνθετη αντίσταση:

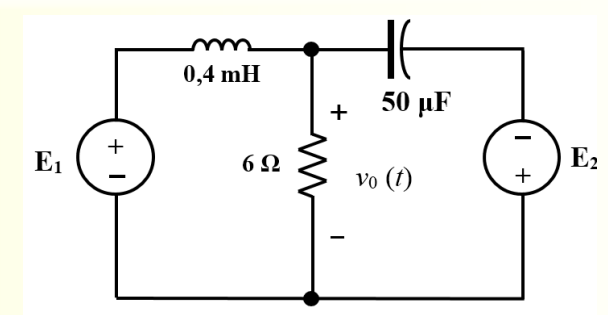
$$\mathbf{Z}_{o\lambda} = 0,231 + j1,16 - j6,67 = 0,231 - j5,51 = 5,51 \angle -87,6^\circ$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0^{3000} &= \frac{\mathbf{Z}_{RL}}{\mathbf{Z}_{o\lambda}} \times 8 \angle 90^\circ \\ &= \frac{1,18 \angle 78,7^\circ}{5,51 \angle -87,6^\circ} \times 8 \angle 90^\circ \\ &= 0,214 \angle 166,3^\circ \times 8 \angle 90^\circ \\ &= 1,712 \angle 256,3^\circ \end{aligned}$$



ΕΜΠΕΔΗΣΗ



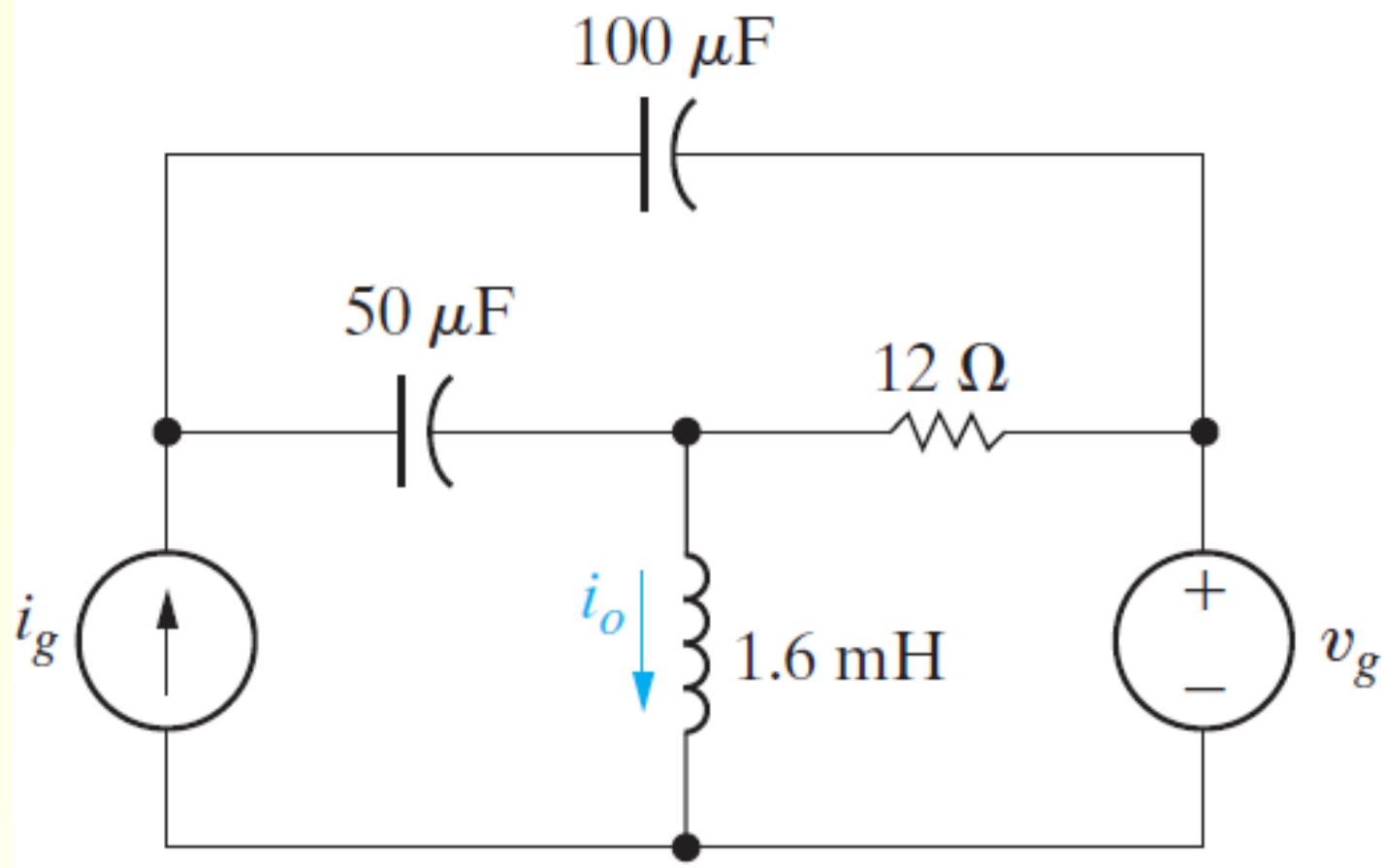
- Τελικά, από την **επαλληλία** θα έχουμε

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \text{Re} \left\{ \mathbf{V}_0^{5000} e^{j5000t} + \mathbf{V}_0^{3000} e^{j3000t} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ 16,64 \angle 19,44^\circ e^{j5000t} + 1,712 \angle 256,3^\circ e^{j3000t} \right\} \end{aligned}$$

$$v_0(t) = 16,64 \cos(5000t + 19,44^\circ) + 1,712 \cos(3000t + 256,3^\circ)$$

33

ΕΜΠΕΔΗΣΗ



- Με τη μέθοδο κομβικών τάσεων και με

$$i_g(t) = 5 \cos 2500t \text{ A}$$

$$v_g(t) = 20 \cos(2500t + 90^\circ)$$

βρείτε το ρεύμα i_o όταν το κύκλωμα λειτουργεί στη μόνιμη κατάσταση

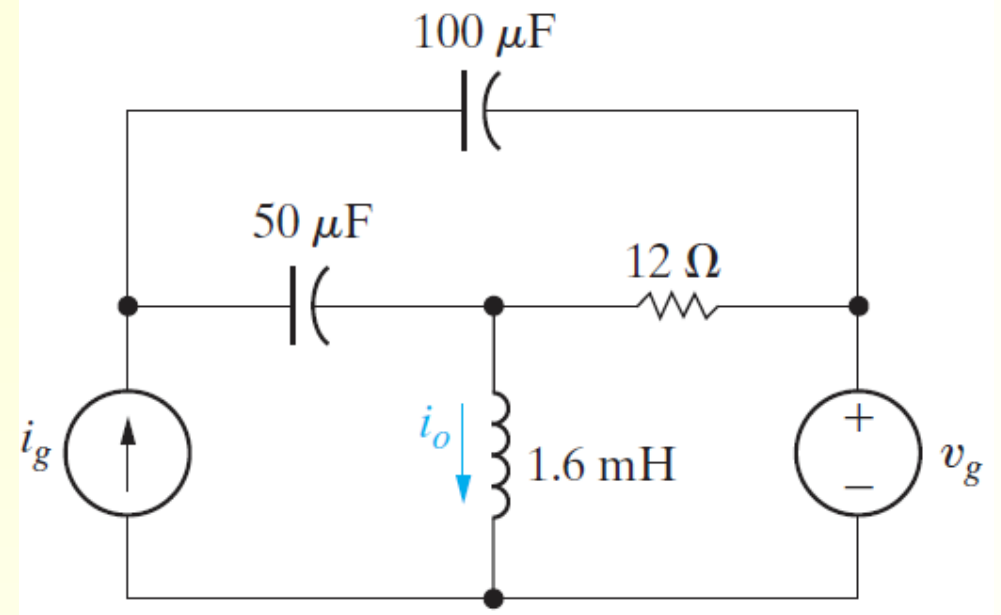
ΕΜΠΕΔΗΣΗ

- Μετασχηματίζουμε στο πεδίο συχνότητας:

$$j\omega L = j(2500)(1.6 \times 10^{-3}) = j4 \Omega$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{(2500)(100 \times 10^{-6})} = -j4 \Omega$$

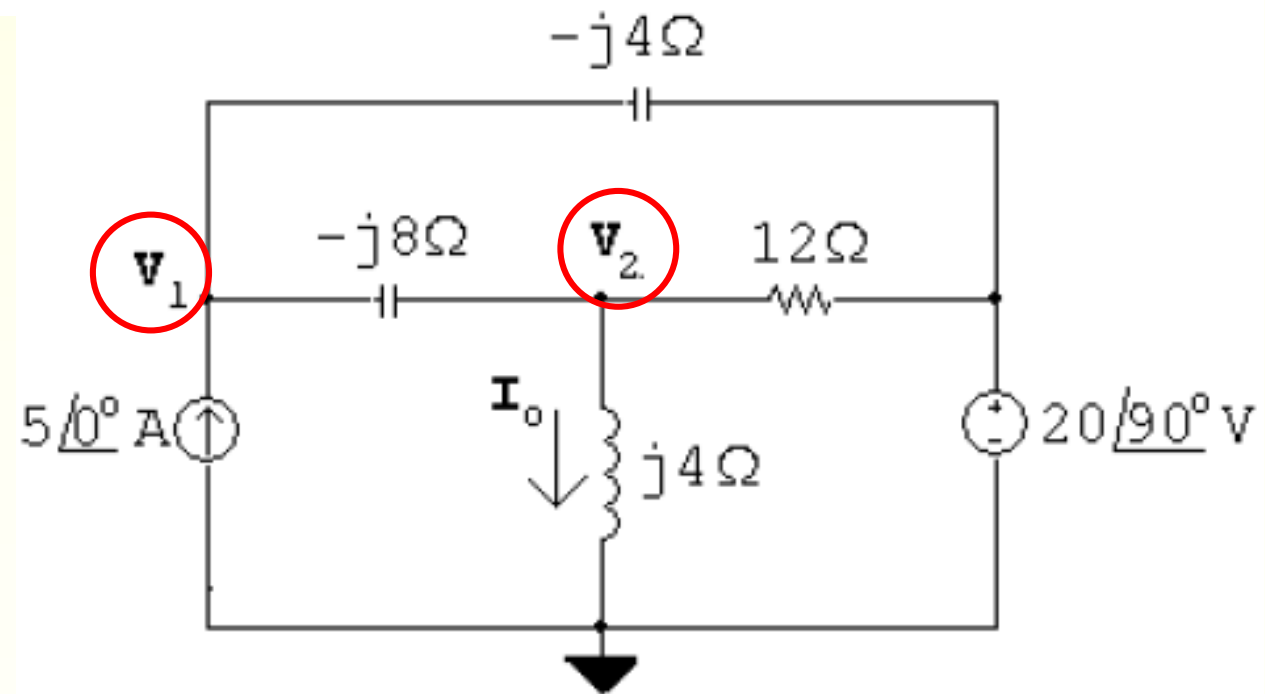
$$\mathbf{I}_g = 5/\underline{0^\circ} \text{ A} \quad \mathbf{V}_g = 20/\underline{90^\circ} \text{ V}$$



- ΚΤ:

$$-5 + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-j8} + \frac{\mathbf{V}_1 - j20}{-j4} = 0$$

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-j8} + \frac{\mathbf{V}_2}{j4} + \frac{\mathbf{V}_2 - j20}{12} = 0$$



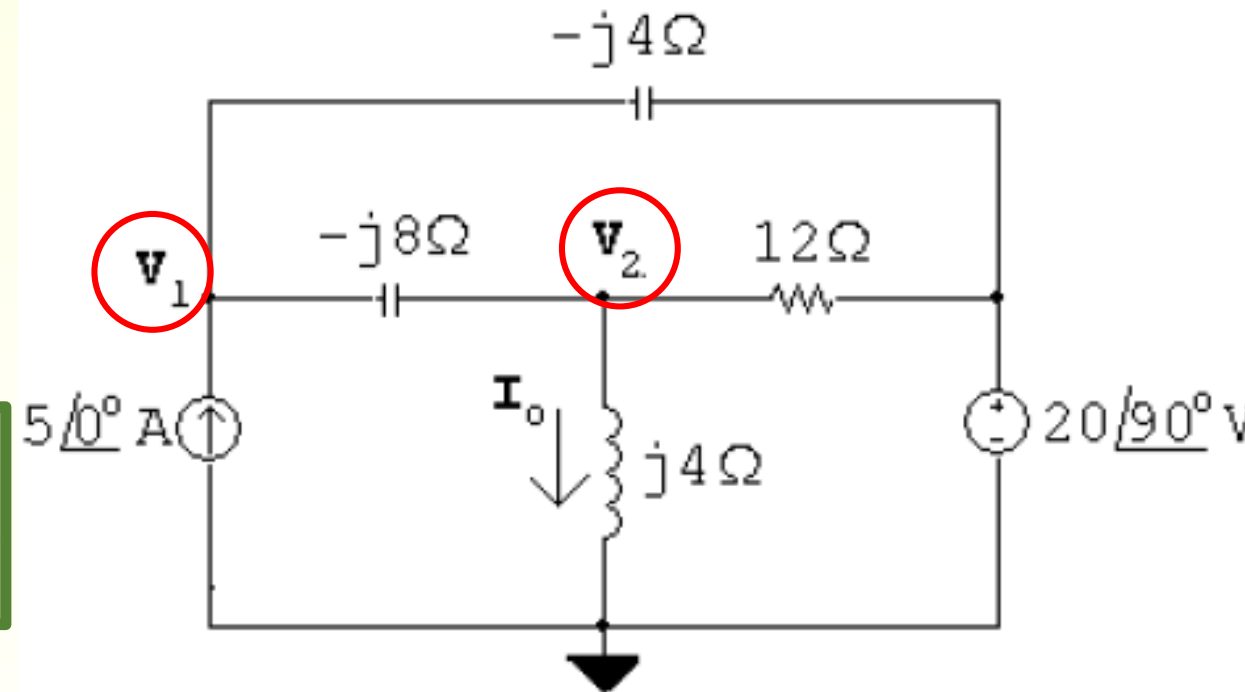
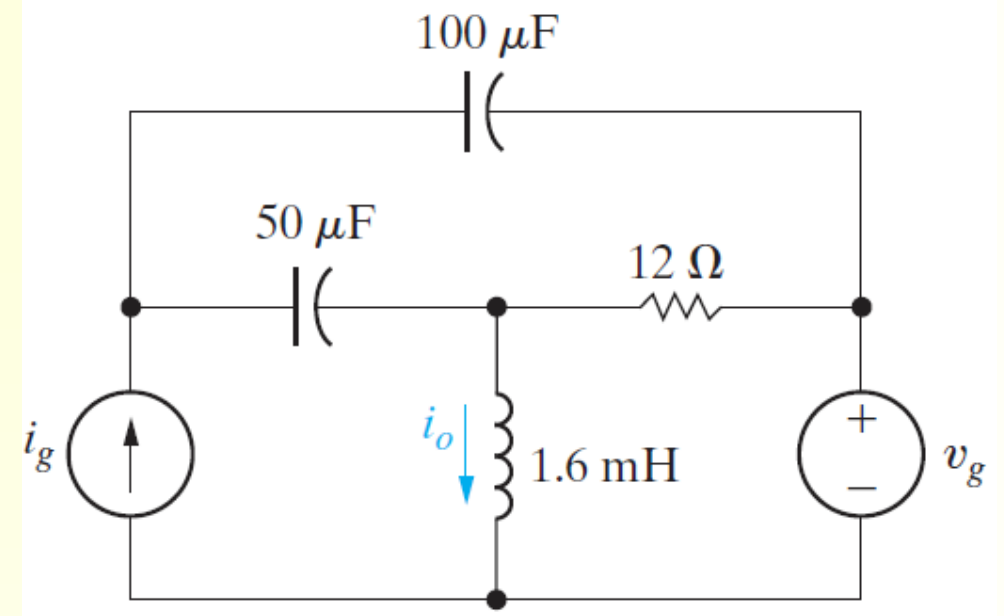
ΕΜΠΕΔΗΣΗ

- Με λύση:

$$\mathbf{V}_2 = -8 + j4 \text{ V}$$

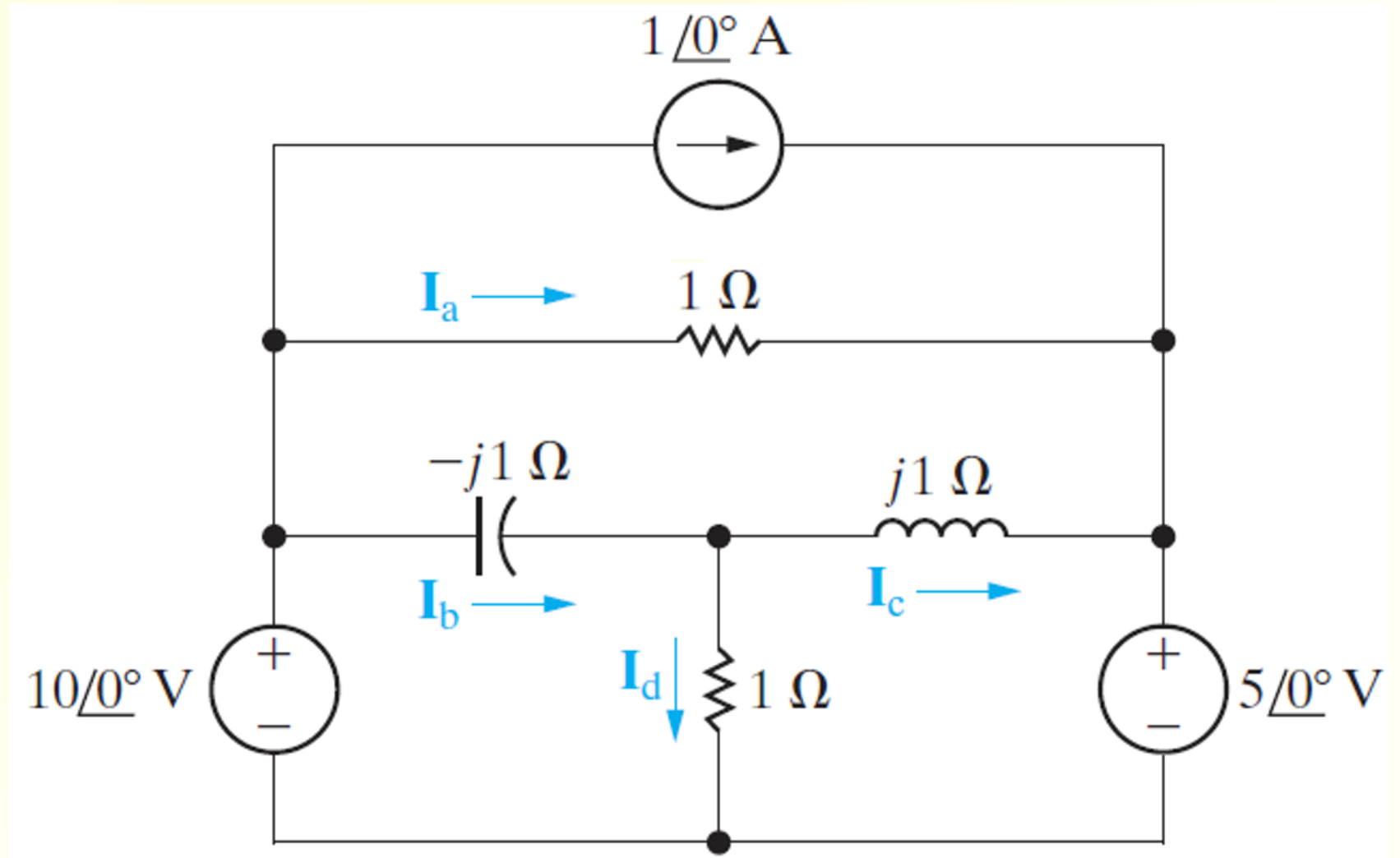
$$\mathbf{I}_o = \frac{\mathbf{V}_2}{j4} = 1 + j2 = 2.24/63.43^\circ \text{ A}$$

$$i_o = 2.24 \cos(2500t + 63.43^\circ) \text{ A}$$



34

ΕΜΠΕΔΗΣΗ

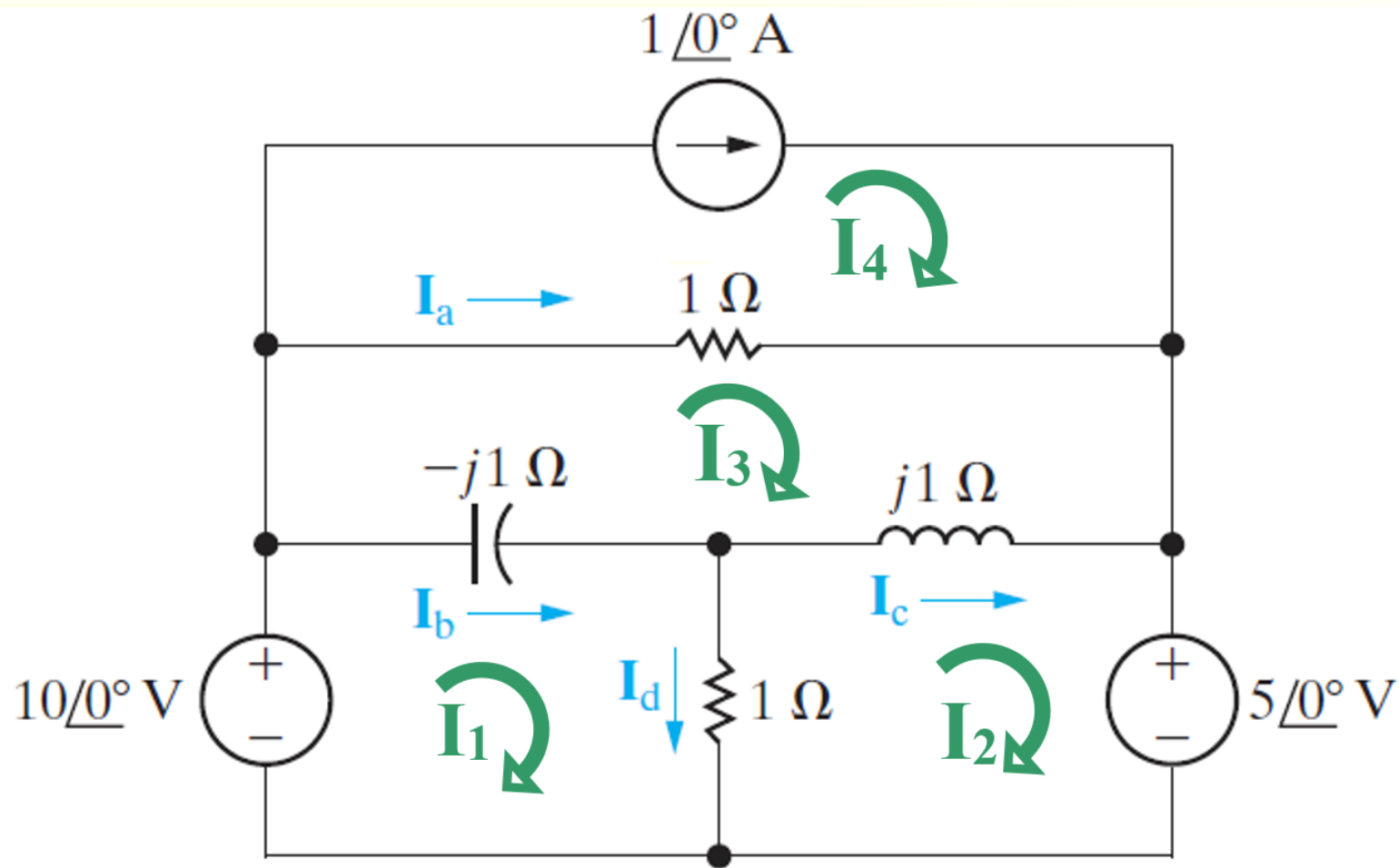


- Στο κύκλωμα, που λειτουργεί σε μόνιμη κατάσταση, να υπολογιστούν τα ρεύματα I_a , I_b , I_c και I_d

ΕΜΠΕΔΗΣΗ

$$\mathbf{I}_4 = 1\angle 0^\circ$$

(Εξωτερικός βρόχος)



$$-10\angle 0^\circ + (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3)(-j1) + (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)(1) = 0$$

$$5\angle 0^\circ + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)(1) + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)(j1) = 0$$

$$(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2)(j1) + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1)(-j1) + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4)(1) = 0$$

ΕΜΠΕΔΗΣΗ

- Σε πιο «τακτική» μορφή:

$$(1 - j1) \mathbf{I}_1 - 1 \mathbf{I}_2 + j1 \mathbf{I}_3 = 10 \angle 0^\circ$$

$$-1 \mathbf{I}_1 + (1 + j1) \mathbf{I}_2 - j1 \mathbf{I}_3 = -5 \angle 0^\circ$$

$$j1 \mathbf{I}_1 - j1 \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = 1 \angle 0^\circ$$

- Επιλύουμε:

$$\mathbf{I}_1 = 11 + j10 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = 11 + j5 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_3 = 6 \text{ A}$$

- Και:

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_3 - 1 = 5 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3 = 5 + j10 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 = 5 + j5 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_d = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = j5 \text{ A}$$

