

ΒΗΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΡΟΥΣΤΙΚΕΣ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ ΑΠΛΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ RC

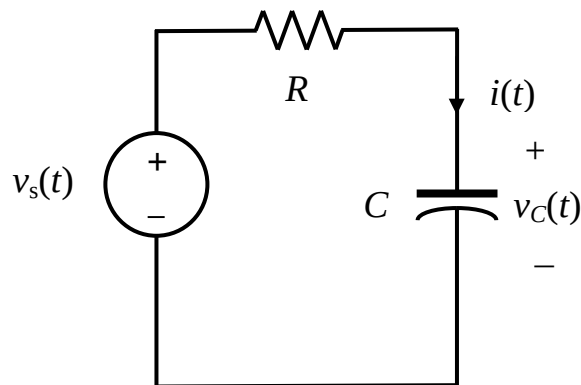
Στη βασική θεωρία είδαμε την απόκριση του παράλληλου κυκλώματος RC σε πηγή ρεύματος που εφαρμόζει στην είσοδό του βηματική, κρουστική ή ημιτονοειδή διέγερση. Συγκεκριμένα, είχαμε βρει ότι

$$s(t) = R \left(1 - e^{-t/RC} \right) u(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{C} e^{-t/RC} u(t)$$

(Υπενθυμίζουμε ότι $s(\cdot)$ είναι ο συνήθης συμβολισμός για τη βηματική απόκριση και $h(\cdot)$ για την κρουστική απόκριση. Επίσης το $u(t)$ πιο πάνω δεν έχει σχέση με τη διέγερση αλλά είναι απλά συντομογραφία του $t \geq 0$.)

Ας δούμε τώρα την απόκριση μηδενικής κατάστασης του σειριακού κυκλώματος RC σε πηγή τάσης. Θα περιοριστούμε στη βηματική διέγερση, αφού γνωρίζουμε ότι η απόκριση σε κρουστική μπορεί να προσδιοριστεί από τη βηματική απόκριση με απλή διαφορίση. Το κύκλωμα είναι



Ο νόμος τάσεων του Kirchhoff δίνει αμέσως δυο εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης

$$\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + Ri(t) = v_s(t)$$

ή

$$v_C(t) + RC \frac{dv_C(t)}{dt} = v_s(t)$$

Αν επιλέξουμε να ακολουθήσουμε τον πρώτο δρόμο, είναι πολύ βολικό να αλλάξουμε μεταβλητή και αντί για το ρεύμα του κλάδου να θεωρήσουμε το φορτίο του πυκνωτή (θυμόμαστε ότι $i = dq/dt$). Τότε παίρνουμε

$$\frac{q(t)}{C} + R \frac{dq(t)}{dt} = v_s(t), \quad q(0) = 0$$

της οποίας η λύση για βηματική είσοδο είναι $q(t) = C (1 - e^{-t/RC}) u(t)$, οπότε με διαφόριση

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

Με τη δεύτερη εναλλακτική, λύνουμε κατά τα γνωστά τη διαφορική εξίσωση και παίρνουμε

$$v_C(t) = (1 - e^{-t/RC}) u(t)$$

οπότε και πάλι

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

Δηλαδή, τελικά η βηματική απόκριση του σειριακού RC με πηγή τάσης είναι

$$s(t) = \frac{1}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

Με διαφόριση υπολογίζουμε τώρα την κρουστική απόκριση (το ρεύμα κλάδου και πάλι)

$$h(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} u(t)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι το ρεύμα κλάδου (και του πυκνωτή, φυσικά) στη βηματική διέγερση δεν είναι συνεχής συνάρτηση: είναι αρχικά 0 (αφού δεν υπάρχει φορτίο στον πυκνωτή) και παρουσιάζει ένα άλμα στο $t = 0^+$ καθώς ο πυκνωτής έχει αρχίσει να εκφορτίζει το φορτίο που του προσδόθηκε στον αντιστάτη. Αντίστοιχα, στην κρουστική απόκριση, η στιγμιαία διέγερση εκφράζεται πάλι με την ύπαρξη της $\delta(t)$ στο $t = 0$ και το προσδοθέν φορτίο στον πυκνωτή «διαχέεται» στον αντιστάτη.

Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι ακόμα και το πιο απλό κύκλωμα RC παρουσιάζει συμπεριφορές που μπορούν να χαρακτηριστούν πολύπλοκες. Οι αντίστοιχες συμπεριφορές για το κύκλωμα RL μπορούν να προσδιοριστούν αυτόματα με τη βοήθεια της δυαδικότητας. Θα ήταν όμως πολύ πιο εποικοδομητικό να εξαχθούν με αναλυτικό τρόπο με βάση τα όσα εκτέθηκαν παραπάνω. Από το βιβλίο Basic Circuit Theory των Desoer & Kuh (McGraw-Hill, 1969) παραθέτουμε τον πλήρη κατάλογο αυτών των αποκρίσεων:

Table 4.1 Step and Impulse Responses for Simple Linear Time-invariant Circuits

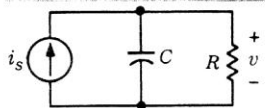
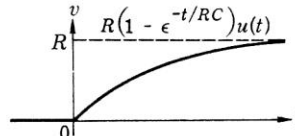
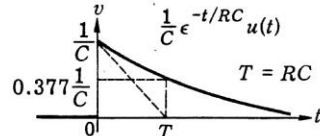
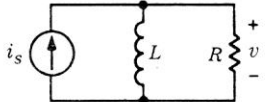
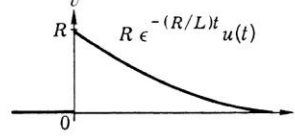
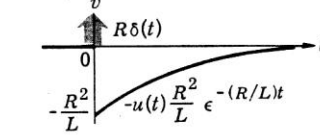
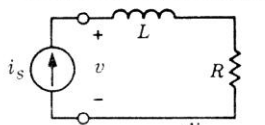
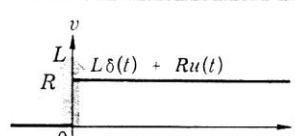
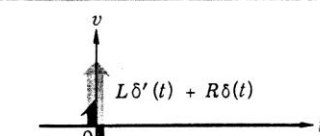
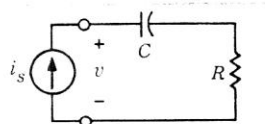
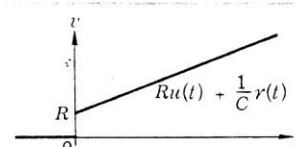
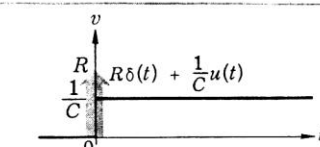
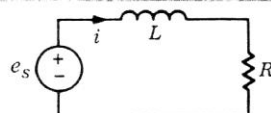
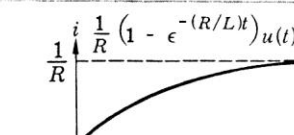
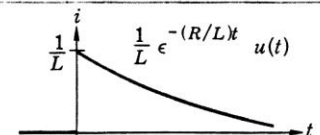
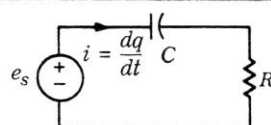
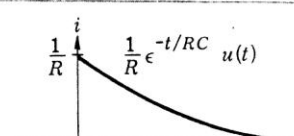
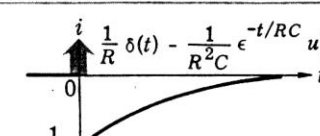
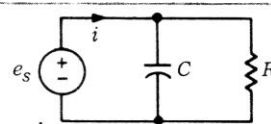
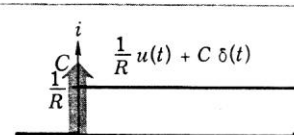
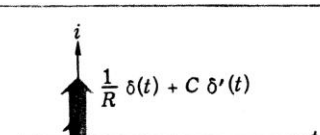
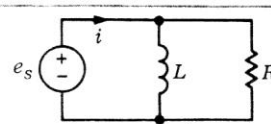
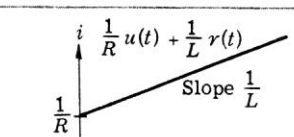
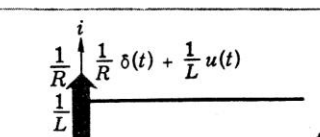
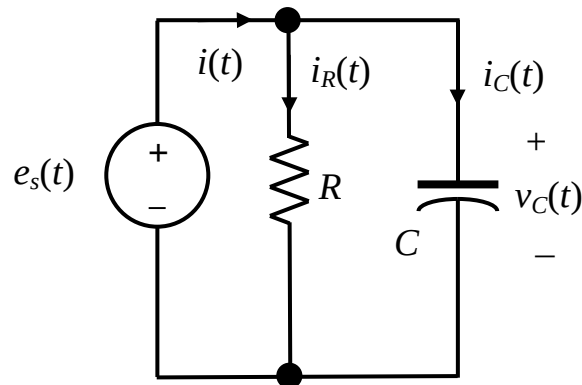
$i_s(\text{input})$	$v(\text{response})$	$\Delta(t)$	$h(t)$
 $C \frac{d}{dt} v + \frac{1}{R} v = i_s$	 $v = R(1 - e^{-t/RC})u(t)$	 $v = \frac{1}{C} e^{-t/RC} u(t)$ $T = RC$	
 $\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \phi + \frac{1}{L} \phi = i_s$	 $v = R e^{-(R/L)t} u(t)$	 $v = R \delta(t) - \frac{R^2}{L} \int u(t) e^{-(R/L)t} dt$	
 $v = R i_s + L \frac{di_s}{dt}$	 $v = L \delta(t) + R u(t)$	 $v = L \delta'(t) + R \delta(t)$	
 $v = R i_s + \frac{1}{C} \int_0^t i_s(t') dt'$	 $v = R u(t) + \frac{1}{C} \int r(t) dt$	 $v = R \delta(t) + \frac{1}{C} u(t)$	

Table 4.1 Step and Impulse Responses for Simple Linear Time-invariant Circuits (Continued)

$e_s(\text{input})$	$i(\text{response})$	$\Delta(t)$	$h(t)$
 $L \frac{di}{dt} + Ri = e_s$	 $\frac{1}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) u(t)$	 $\frac{1}{L} e^{-(R/L)t} u(t)$	
 $R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e_s$	 $\frac{1}{R} e^{-t/RC} u(t)$	 $\frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} \int u(t) e^{-t/RC} dt$	
 $i = C \frac{de_s}{dt} + \frac{1}{R} e_s$	 $\frac{1}{R} u(t) + C \delta(t)$	 $\frac{1}{R} \delta(t) + C \delta'(t)$	
 $i = \frac{1}{R} e_s + \frac{1}{L} \int_0^t e_s(t') dt'$	 $\frac{1}{R} u(t) + \frac{1}{L} \int r(t) dt$ Slope $\frac{1}{L}$	 $\frac{1}{R} \delta(t) + \frac{1}{L} u(t)$	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ας δούμε λίγο περισσότερο την περίπτωση του παράλληλου RC με διέγερση από πηγή τάσης.



Ισχύει

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) = \frac{1}{R} e_s(t) + C \frac{de_s(t)}{dt}$$

Αν $e_s(t) = \delta(t)$, τότε η κρουστική απόκριση είναι

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) = \frac{1}{R} \delta(t) + C \dot{\delta}(t)$$

Η απεικόνιση του ρεύματος αυτού φαίνεται στην προτελευταία κάτω δεξιά θέση στον πίνακα της προηγούμενης σελίδας (η παράγωγος της δ είναι μια διπλή δ «πλάτη με πλάτη», εδώ με επιφάνεια ίση με C).

Αντίστοιχα η τάση στα άκρα του πυκνωτή (και φυσικά στα μοναδικά άκρα του κυκλώματος) θα είναι

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t C \dot{\delta}(\tau) d\tau = \delta(t)$$

Δηλαδή, ο πυκνωτής ξεκινάει από ηρεμία, υφίσταται ένα στιγμιαίο άλμα τάσης και ξαναγυρίζει στην ηρεμία αφού η τάση στα άκρα του δεν μπορεί παρά να «υπακούσει» σε ότι επιβάλλει η πηγή τάσης.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στην περίπτωση αυτή, η τάση του πυκνωτή μπορεί να κάνει άλμα αφού το ρεύμα που τον διαρρέει **δεν** είναι φραγμένο.