

ΚΥΚΛΩΜΑ RC: ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Οι διάφορες αποκρίσεις ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου κυκλώματος RC έχουν ορισμένες ενδιαφέρουσες θεμελιώδεις ιδιότητες, που μπορούμε να εκμεταλλευθούμε για να βγάλουμε συμπεράσματα σχετικά με τη συμπεριφορά του σε πιο σύνθετες ή ασυνήθιστες διεγέρσεις. Οι ιδιότητες αυτές είναι φυσικά απόρροια των παραδοχών που κάναμε σχετικά με το ότι θεωρούμε το κύκλωμα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο.

Πριν παρουσιάσουμε τις ιδιότητες αυτές θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι γραμμική όταν έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι γραμμικοί χώροι
2. ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $\forall x_1, x_2$ στο πεδίο ορισμού
3. ΟΜΟΓΕΝΕΙΑ: $f(kx) = kf(x)$, $\forall k \in \mathbb{R}, \forall x$ στο πεδίο ορισμού

Η προσθετικότητα και η ομογένεια είναι ισοδύναμες με την ιδιότητα της υπέρθεσης (επαλληλίας):

$$\text{ΥΠΕΡΘΕΣΗ: } f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2), \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \text{ στο πεδίο ορισμού}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 1: Η ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ

Η απόκριση μηδενικής διέγερσης ενός παράλληλου RC δίνεται από τη σχέση

$$v(t) = V_0 e^{-t/T}, T = RC, t \geq 0$$

όπου V_0 είναι η αρχική φόρτιση του πυκνωτή. Για μια διαφορετική αρχική φόρτιση V_1 θα έχω

$$v'(t) = V_1 e^{-t/T}, T = RC, t \geq 0$$

Τότε

$$\begin{aligned} v(t) + v'(t) &= V_0 e^{-t/T} + V_1 e^{-t/T} \\ &= (V_0 + V_1) e^{-t/T} \end{aligned}$$

και αν η αρχική φόρτιση πολλαπλασιαστεί με ένα σταθερό αριθμό k η απόκριση θα είναι

$$\bar{v}(t) = (kV_0) e^{-t/T} = k(V_0 e^{-t/T}) = kv(t)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η απόκριση μηδενικής διέγερσης (ΑΜΔ) ενός κυκλώματος RC είναι γραμμική ως προς την αρχική κατάσταση.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 2: Η ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Θεωρούμε παράλληλο RC με είσοδο $i_1(t)$ και απόκριση $v_1(t)$. Τότε, η απόκριση δίνεται από τη διαφορική εξίσωση (όλες οι διεγέρσεις εφαρμόζονται σε χρόνο $t = 0$)

$$C \frac{dv_1}{dt} + Gv_1 = i_1(t), \quad v_1(0) = 0 \quad (1)$$

Το ίδιο κύκλωμα με είσοδο $i_2(t)$ θα έχει απόκριση $v_2(t)$ που θα καθορίζεται από τη

$$C \frac{dv_2}{dt} + Gv_2 = i_2(t), \quad v_2(0) = 0 \quad (1a)$$

Προσθέτοντας και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της διαφορίσης παίρνουμε

$$\begin{aligned} C \frac{dv_1}{dt} + Gv_1 + C \frac{dv_2}{dt} + Gv_2 &= i_1(t) + i_2(t), \quad v_1(0) + v_2(0) = 0 \\ \Rightarrow \\ C \left(\frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} \right) + G(v_1 + v_2) &= i_1(t) + i_2(t), \quad v_1(0) + v_2(0) = 0 \\ \Rightarrow \\ C \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + G(v_1 + v_2) &= i_1(t) + i_2(t), \quad v_1(0) + v_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, η απόκριση $y(t)$ σε μια είσοδο $i_1(t) + i_2(t)$ θα δοθεί από την

$$C \frac{dy}{dt} + Gy = i_1(t) + i_2(t), \quad y(0) = 0$$

και από το θεώρημα για τη μοναδικότητα της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η κυματομορφή $v_1(\cdot) + v_2(\cdot)$ είναι η απόκριση μηδενικής κατάστασης στη διέγερση $i_1(\cdot) + i_2(\cdot)$, δηλαδή υπάρχει η ιδιότητα της προσθετικότητας.

Όσον αφορά την ομογένεια, θα έχουμε ότι η απόκριση σε διέγερση $ki_1(t)$ θα δίνεται από την

$$C \frac{dy}{dt} + Gy = ki_1(t), \quad y(0) = 0 \quad (2)$$

Από την εξίσωση (1) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} kC \frac{dv_1}{dt} + kGv_1 &= ki_1(t), \quad kv_1(0) = 0 \\ \Rightarrow \\ C \frac{d(kv_1)}{dt} + G(kv_1) &= ki_1(t), \quad kv_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Πάλι χρησιμοποιώντας το θεώρημα μοναδικότητας για τη λύση διαφορικής εξίσωσης κι εφαρμόζοντάς το στις εξισώσεις (2) και (3), θεμελιώνουμε την ιδιότητα της ομογένειας για την απόκριση σε ότι αφορά τη διέγερση.

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω αποτελέσματα:

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η απόκριση μηδενικής κατάστασης (ΑΜΚ) ενός κυκλώματος RC είναι γραμμική ως προς τη διέγερση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

1. Τα παραπάνω μπορούν να αποδειχθούν με το ίδιο σκεπτικό και για οποιοδήποτε άλλο κύκλωμα πρώτης τάξης.
2. Τα παραπάνω μπορούν να αποδειχθούν με το ίδιο σκεπτικό και για οποιοδήποτε γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα μεγαλύτερης τάξης.
3. Τα παραπάνω ισχύουν και όταν τα στοιχεία του κυκλώματος είναι χρονικά μεταβαλλόμενα.
4. Η πλήρης απόκριση (δηλ. μη μηδενική διέγερση και μη μηδενική αρχική κατάσταση) ΔΕΝ είναι γραμμική συνάρτηση της διέγερσης. Αυτό φαίνεται εύκολα αν στις εξισώσεις (1) και (1α) αντί για 0 θέσουμε μια μη μηδενική τιμή στην αρχική συνθήκη. Τότε, αθροίζοντας θα βρεθούμε με μια διαφορετική αρχική συνθήκη.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3: ΤΟ ΧΡΟΝΙΚΟ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Θεωρούμε παράλληλο RC με είσοδο $i_0(t)$, που εφαρμόζεται στον χρόνο $t = 0$, και έχει απόκριση $v_0(t)$ που δίνεται από τη μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$C \frac{dv_0(t)}{dt} + Gv_0(t) = i_0(t), \quad v_0(0) = 0 \quad (4)$$

Θεωρούμε τώρα ότι το ίδιο κύκλωμα υποβάλλεται σε μια διέγερση $i_\tau(t)$, που εφαρμόζεται στον χρόνο $t = \tau > 0$, και είναι πανομοιότυπη με την $i_0(t)$, απλά αρχίζει να εφαρμόζεται σε μεταγενέστερο χρόνο έτσι ώστε $i_\tau(\tau + t_1) = i_0(t_1)$, $\forall t_1$.

Αν ορίσουμε νέα κλίμακα χρόνου $z = \tau + t_1$, τότε η διέγερση θα είναι

$$i_{\tau}(z) = \begin{cases} i_0(z - \tau) & z \geq \tau \\ 0 & z \leq \tau \end{cases}$$

Το κύκλωμα θα έχει απόκριση $v_{\tau}(\cdot)$ που δίνεται από τη μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$C \frac{dv_{\tau}(t)}{dt} + Gv_{\tau}(t) = i_{\tau}(t), \quad v_{\tau}(0) = 0, \quad t \geq 0 \quad (5)$$

και το ερώτημα είναι ποια θα είναι η μορφή αυτής της απόκρισης σε σχέση με τη $v_0(t)$.

Καταρχήν, στο χρονικό διάστημα $(0, \tau)$ η κυματομορφή $v_{\tau}(\cdot)$ είναι εκ ταυτότητας ίση με 0 και ικανοποιεί την Εξ. (5) επειδή η διέγερση $i_{\tau}(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, είναι κι αυτή εκ ταυτότητας ίση με 0.

Μπορούμε να συμπεράνουμε λοιπόν ότι $v_{\tau}(\tau) = 0$ και απομένει να προσδιορίσουμε την $v_{\tau}(\cdot)$ για $t \geq \tau$.

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $y(t) = v_0(t - \tau)$ και θα προσπαθήσουμε να επιβεβαιώσουμε ότι επαληθεύει την Εξ. (5). Ξεκινώντας από την Εξ. (4) μπορούμε να γράψουμε

$$C \frac{dv_0(t - \tau)}{dt} + Gv_0(t - \tau) = i_0(t - \tau) = i_{\tau}(t), \quad t \geq \tau$$

και σύμφωνα με τον τρόπο που ορίσαμε την $y(t)$

$$C \frac{dy(t)}{dt} + Gy(t) = i_{\tau}(t), \quad t \geq \tau$$

δηλαδή καταλήξαμε στην εξίσωση (5) ενώ επιπλέον ισχύει και η αρχική συνθήκη

$$y(\tau) = v_0(t - \tau)|_{t=\tau} = v_0(0) = 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η $y(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $C \frac{dv_{\tau}(t)}{dt} + Gv_{\tau}(t) = i_{\tau}(t)$ για $t \geq \tau$

με αρχική συνθήκη $v_{\tau}(0) = 0$. Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με το ότι $v_{\tau}(t) \equiv 0$, $0 \leq t \leq \tau$,

συμπεραίνουμε ότι η απόκριση είναι όντως η $v_0(\cdot)$ μετατοπισμένη κατά τ .

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Όταν η διέγερση σε ένα κύκλωμα RC μετατοπιστεί χρονικά τότε και η απόκριση μηδενικής κατάστασης (ΑΜΚ) του κυκλώματος θα μετατοπιστεί χρονικά κατά το ίδιο χρονικό διάστημα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- (1) Το γεγονός αυτό ίσως μπορεί να θεωρηθεί προφανές, όμως η απόδειξή του πρέπει να γίνει με τον πιο πάνω μαθηματικά θεμελιωμένο τρόπο.
- (2) Κάτι παρόμοιο δεν μπορεί να ισχύσει για την πλήρη απόκριση καθώς η φυσική απόκριση δεν μπορεί να «ετεροχρονιστεί».