

ΚΥΚΛΩΜΑ RC ΜΕ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Εννοούμε την απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου κυκλώματος RC σε μια μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ εφαρμοζόμενη στον χρόνο $t = 0$ (απόκριση μηδενικής κατάστασης). Η απόκριση αυτή συμβολίζεται συνήθως με $h(t)$ ενώ με $s(t)$ συμβολίζεται η απόκριση σε βηματική διέγερση $u(t)$. Θα υπολογίσουμε την απόκριση σε κρουστική με τρεις μεθόδους. Από την κάθε μέθοδο θα βγάλουμε πολύτιμα γενικότερα συμπεράσματα.

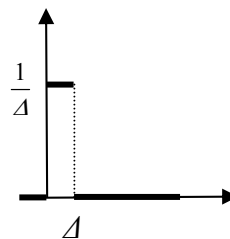
ΜΕΘΟΔΟΣ 1 (Η προσέγγιση του μηχανικού)

Θεωρούμε παράλληλο RC με είσοδο i_s και απόκριση v (δεν σημειώνουμε την εξάρτηση από τον χρόνο). Τότε, με είσοδο την κρουστική, η απόκριση δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$C \frac{dv}{dt} + Gv = \delta(t), \quad v(0^-) = 0$$

Στον χρόνο $t = 0$ ένα απείρως μεγάλο ρεύμα διαρρέει το κύκλωμα για ένα απείρως μικρό διάστημα χρόνου (ο αθλητισμός μπορεί να χρησιμεύσει σαν προσεγγιστική παρομοίωση: το μπαστούνι του γκόλφ ή η ρακέτα του τένις στο σέρβις που χτυπάει το μπαλάκι, είναι αντίστοιχες καταστάσεις μεταφοράς μεγάλης ποσότητας ενέργειας σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα). Για να καταγράψουμε τι συμβαίνει θα προσεγγίσουμε την κρουστική είσοδο με ένα παλμό p_Δ :

$$p_\Delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & t > \Delta \end{cases}$$



Θα διαλέξουμε το Δ έτσι ώστε να είναι πολύ μικρότερο από τη σταθερά χρόνου RC . Η λύση της διαφορικής είναι μια κυματομορφή, έστω $h_\Delta(t)$, που ικανοποιεί τις

$$C \frac{dh_\Delta}{dt} + Gh_\Delta = \frac{1}{\Delta}, \quad 0 < t < \Delta, \quad h_\Delta(0) = 0 \quad (1)$$

$$C \frac{dh_\Delta}{dt} + Gh_\Delta = 0, \quad t > \Delta \quad (\text{και φυσικά αρχική συνθήκη } h_\Delta(\Delta)) \quad (2)$$

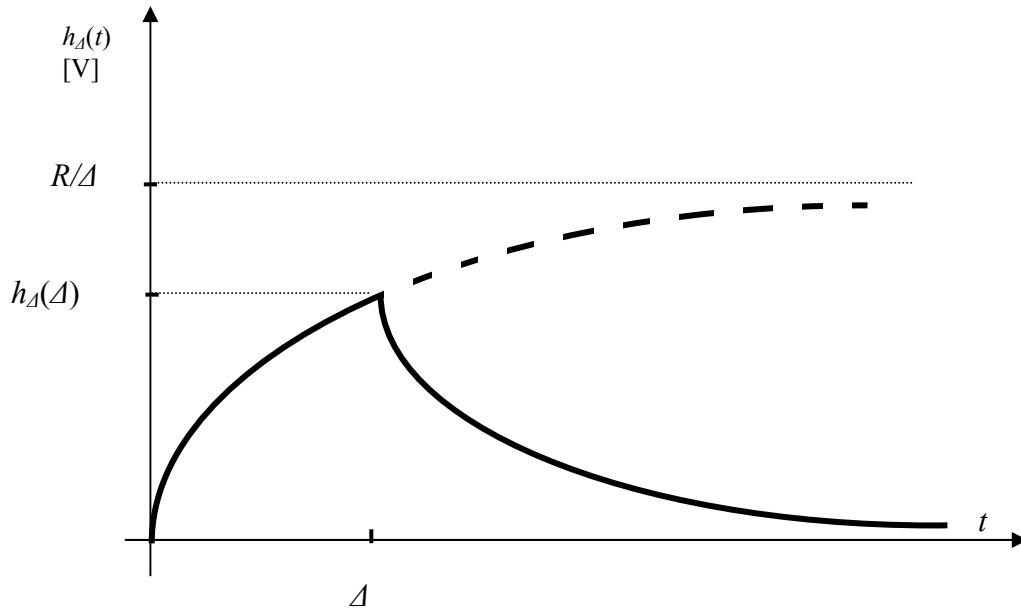
Ας τις επιλύσουμε. Κατά τα ήδη γνωστά (ας προσέξουμε ότι εδώ η είσοδος έχει τιμή ίση με $1/\Delta$ στο διάστημα που μας αφορά), για την (1) έχουμε μια απόκριση μηδενικής κατάστασης:

$$h_{\Delta}(t) = \frac{R}{\Delta} (1 - e^{-t/RC}), \quad 0 < t < \Delta \quad (3)$$

ενώ για τη (2) έχουμε μια απόκριση μηδενικής διέγερσης με αρχική συνθήκη που παρέχει η (3):

$$h_{\Delta}(t) = h_{\Delta}(\Delta) e^{-(t-\Delta)/RC}, \quad t > \Delta \quad (3\alpha)$$

Σχηματικά, θα παίρναμε κάτι τέτοιο:



Τώρα, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \dots$$

μπορούμε να πάρουμε

$$\begin{aligned} h_{\Delta}(\Delta) &= \frac{R}{\Delta} \left[\frac{\Delta}{RC} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta}{RC} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta}{RC} \right)^3 \pm \dots \right] \\ &= \frac{1}{C} \left[1 - \frac{1}{2!} \frac{\Delta}{RC} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta}{RC} \right)^2 \pm \dots \right] \end{aligned}$$

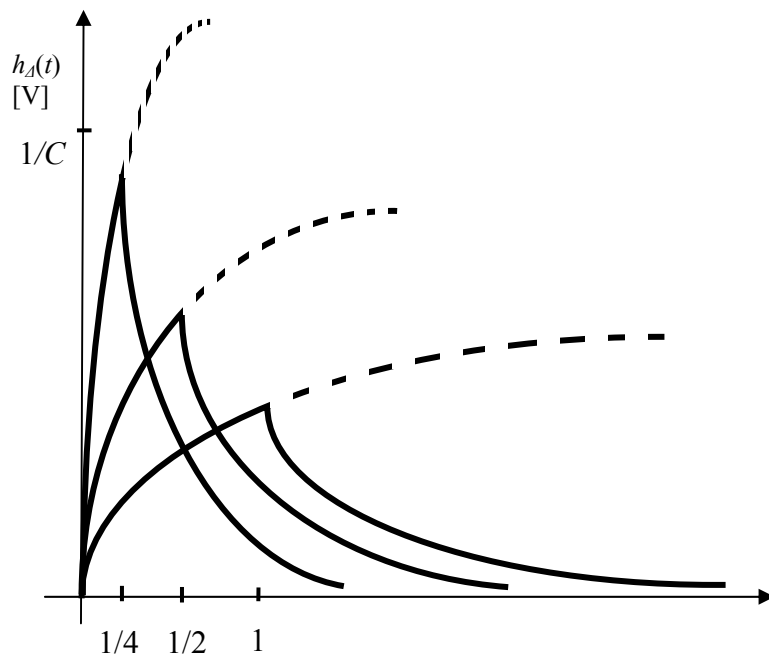
Χρησιμοποιούμε το ίδιο ανάπτυγμα και για την Εξ. (3) βρίσκουμε ότι

$$h_{\Delta}(t) = \frac{1}{C} \frac{t}{\Delta} + \left(-\frac{t^2}{2! RC^2 \Delta} \right) + \dots$$

και μπορούμε έτσι να διαπιστώσουμε ότι η κλίση της $h_{\Delta}(\cdot)$ στο διάστημα $(0, \Delta)$ είναι $\frac{1}{C\Delta}$. Η

κλίση αυτή είναι πολύ μεγάλη αφού το Δ είναι πολύ μικρό και γίνεται μεγαλύτερη καθώς $\Delta \rightarrow 0$.

Στο όριο η h_{Δ} πηδά από το 0 στο $1/C$ όταν $t = 0$ όπως δείχνει το πιο κάτω σχήμα (όπου κανονικοποιήσαμε το Δ).



Τελικά λοιπόν

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta}(\Delta) = \frac{1}{C}$$

και από την Εξ. (3α)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta}(t) = \frac{1}{C} e^{-t/RC}$$

και καθώς έχουμε θέσει $h(t) = 0$ για $t < 0$, τελικά έχουμε

$$h(t) = u(t) \frac{1}{C} e^{-t/RC}, \quad \forall t \quad (4)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν είχαμε χρησιμοποιήσει κάποια άλλη προσέγγιση του παλμού, π.χ. τριγωνική ή εκθετική.

Χρησιμοποιώντας τη διαφορική εξίσωση $C \frac{dv}{dt} + Gv = \delta(t)$, $v(0^-) = 0$ θα δείξουμε ότι η

$h(t) = u(t) \frac{1}{C} e^{-t/RC}$ είναι μια λύση της. Η λέξη μέθοδος μπήκε σε εισαγωγικά γιατί η λύση μας δίνεται και απλά μας ζητείται να αποδείξουμε ότι ισχύει. Θα βγάλουμε όμως ένα πολύ χρήσιμο συμπέρασμα στην πορεία.

Ας καλέσουμε $y(\cdot)$ τη λύση της διαφορικής εξίσωσης. Πρέπει να δείξουμε ότι $y = h$. Εφόσον $\delta(t) = 0$ για $t > 0$ και $y(t)$ είναι λύση της διαφορικής θα ισχύει (απόκριση μηδενικής διέγερσης)

$$y(t) = y(0)e^{-t/RC}, \quad t > 0$$

Απ' την άλλη μεριά (...κυριολεκτικά) $\delta(t) = 0$ για $t < 0$ και το κύκλωμα είναι στη μηδενική κατάσταση για $t = 0^-$, άρα

$$y(t) = 0, \quad t < 0$$

Συνδυάζοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις

$$y(t) = u(t)y(0^+)e^{-t/RC}, \quad \forall t \quad (5)$$

και απομένει να προσδιορίσουμε το $y(0^+)$, το άλμα στη χρονική στιγμή 0. Για να το επιτύχουμε αυτό, διαφορίζουμε την Εξ. (5):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \delta(t)y(0^+)e^{-t/RC} + u(t)y(0^+)\left(\frac{-1}{RC}\right)e^{-t/RC} \\ &= \delta(t)y(0^+)e^{-0/RC} - u(t)y(0^+)\left(\frac{1}{RC}\right)e^{-t/RC} \end{aligned}$$

όπου ο πρώτος όρος δικαιολογείται από το ότι η παρουσία της δ επιτρέπει την ενεργοποίηση του εκθετικού μόνο για $t = 0$. Αντικαθιστώντας το εύρημα στη διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$C\delta(t)y(0^+) - Cu(t)y(0^+)\left(\frac{1}{RC}\right)e^{-t/RC} + Gu(t)y(0^+)e^{-t/RC} = \delta(t)$$

οπότε

$$C\delta(t)y(0^+) = \delta(t) \Rightarrow y(0^+) = \frac{1}{C}$$

και πράγματι ξαναπαίρνουμε την (5).

Έτσι έχουμε:

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης $C \frac{dv}{dt} + Gv = \delta(t)$, $v(0^-) = 0$, $t > 0$ είναι ίδια με τη λύση της $C \frac{dv}{dt} + Gv = 0$, $v(0^-) = \frac{1}{C}$, $t > 0$, δηλαδή η κρουστική διέγερση «εισάγει» μια αρχική συνθήκη σε μια ομογενή διαφορική εξίσωση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ: Ολοκληρώνουμε τη διαφορική από 0^- έως 0^+

$$Cv(0^+) - Cv(0^-) + G \int_{0^-}^{0^+} v(t) dt = 1$$

κι επειδή η $v(\cdot)$ είναι πεπερασμένη, το ολοκλήρωμά της σε ένα σημείο είναι 0, οπότε $v(0^+) = \frac{1}{C}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται σε ένα γεγονός που πρέπει να αποδείξουμε. Το γεγονός αυτό είναι ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου κυκλώματος σε κρουστική διέγερση είναι η παράγωγος ως προς τον χρόνο της απόκρισής του σε βηματική διέγερση. Ποιοτικά, λόγω της γραμμικότητας όλων των οντοτήτων που εμπλέκονται, μπορούμε ίσως να μαντέψουμε ότι αφού η κρουστική είναι η παράγωγος της βηματικής, τότε και οι αντίστοιχες αποκρίσεις τους θα συνδέονται με μια παρόμοια σχέση. Αν προς στιγμή δεχθούμε την παραπάνω πρόταση σαν αληθινή (θα την αποδείξουμε αμέσως μετά) τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{ή} \quad s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

Είναι όμως γνωστό ότι

$$s(t) = u(t)R(1 - e^{-t/RC})$$

οπότε διαφορίζοντας,

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{du(t)}{dt} R(1 - e^{-t/RC}) + u(t) \frac{d}{dt} [R(1 - e^{-t/RC})] \\ &= \delta(t)R(1 - e^{-t/RC}) + u(t) \frac{1}{C} e^{-t/RC} \\ &= 0 + \frac{1}{C} u(t) e^{-t/RC} = \frac{1}{C} u(t) e^{-t/RC} \end{aligned}$$

καταλήγουμε πάλι στην ίδια έκφραση για την απόκριση.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η απόκριση μηδενικής κατάστασης ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου κυκλώματος σε κρουστική διέγερση είναι η παράγωγος ως προς τον χρόνο της απόκρισής του σε βηματική διέγερση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για την απόδειξη της πρότασης θα στηριχθούμε σε τρεις πολύ σημαντικές βασικές ιδιότητες των γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων κυκλωμάτων που αφορούν την απόκρισή τους σε μηδενική κατάσταση και που αναφέρουμε εδώ συνοπτικά:

1. **Γραμμικότητα ως προς την είσοδο.** Δηλαδή, η απόκριση έχει την ιδιότητα της προσθετικότητας και της ομογένειας ως προς την είσοδο. Μια συνάρτηση $f(\cdot)$ είναι γραμμική αν είναι προσθετική, δηλ. ισχύει ότι

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ και ομογενής, δηλ. ισχύει ότι

$$f(ax) = af(x), \forall a \in \mathbb{R}.$$

2. **Επαλληλία (ή υπέρθεση).** Η απόκριση σε διεγέρσεις που εφαρμόζονται ταυτόχρονα είναι το άθροισμα των επιμέρους αποκρίσεων σε κάθε διέγερση αν αυτή ενεργούσε μόνη της ξεχωριστά από τις υπόλοιπες. Αυτό μπορεί να εκφραστεί με βάση τη γραμμικότητα σαν

$$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2), \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

3. **Αναλλοίωτο σε χρονική μετατόπιση.** Ας υποθέσουμε ότι το κύκλωμά μας έχει μια συγκεκριμένη απόκριση μηδενικής κατάστασης σε μια διέγερση. Αν τώρα εφαρμόσουμε στο κύκλωμά μας αυτή τη διέγερση όχι σε χρόνο $t = 0$ αλλά με μια χρονική καθυστέρηση T , τότε η απόκριση θα είναι ταυτόσημη με την αρχική αλλά η απόκριση αυτή θα εμφανισθεί ακριβώς μετά από χρόνο T , δηλαδή όταν $t = T$.

Συνεχίζοντας τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την προσέγγιση της κρουστικής με παλμό, οπότε η είσοδος θα είναι

$$p_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} [u(t) - u(t - \Delta)]$$

Ας συμβολίσουμε με $Z(x(\cdot))$ την απόκριση του κυκλώματος σε είσοδο $x(\cdot)$. Τότε,

$$\begin{aligned} h_{\Delta} &= Z(p_{\Delta}) = Z\left(\frac{1}{\Delta}u(t) - \frac{1}{\Delta}u(t - \Delta)\right) && \text{από τον ορισμό του παλμού} \\ &= Z\left(\frac{1}{\Delta}u(t)\right) - Z\left(\frac{1}{\Delta}u(t - \Delta)\right) && \text{επαλληλία} \\ &= \frac{1}{\Delta}Z(u(t)) - \frac{1}{\Delta}Z(u(t - \Delta)) && \text{γραμμικότητα} \\ &= \frac{1}{\Delta}s(t) - \frac{1}{\Delta}s(t - \Delta) = \frac{s(t) - s(t - \Delta)}{\Delta} && \text{αναλλοίωτο χρονικής μετατόπισης} \end{aligned}$$

και αφήνοντας το Δ να πάει προς το 0, έχουμε ότι

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t - \Delta)}{\Delta} = \frac{ds(t)}{dt}$$