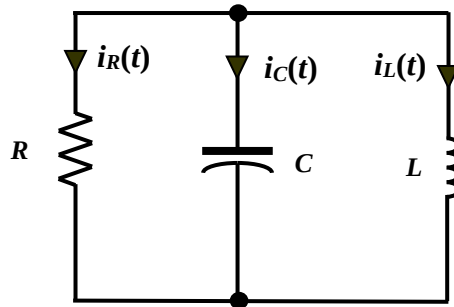


ΚΥΚΛΩΜΑ RLC: ΦΥΣΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ (ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ)

Το παράλληλο κύκλωμα RLC χωρίς διέγερση αλλά με αρχικές συνθήκες ρεύμα I_0 στον επαγωγό και τάση V_0 στον πυκνωτή είναι:



Από τον νόμο ρευμάτων του Kirchhoff, σε συνδυασμό με τον νόμο τάσεων του Kirchhoff και τις σχέσεις ρεύματος-τάσης για τα τρία στοιχεία, παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση για το ρεύμα $i_L(t)$:

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = 0, \quad i_L(0) = I_0, \quad \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V_0}{L}$$

ή με απλοποίηση

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0, \quad i_L(0) = I_0, \quad \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V_0}{L}$$

ή, εισάγοντας τον **συντελεστή απόσβεσης** $\alpha = G/(2C)$ και τη **συχνότητα συντονισμού** $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$,

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0, \quad i_L(0) = I_0, \quad \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V_0}{L}$$

με λύση που δίνεται από τη σχέση

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

όπου s_1 και s_2 οι λύσεις τού χαρακτηριστικού πολυωνύμου $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

I. ΥΠΕΡΚΡΙΣΙΜΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\alpha > \omega_0$

Οι ρίζες είναι πραγματικές και αρνητικές $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, η λύση δίνεται σαν

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

οπότε σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= I_0 \\ k_1 s_1 + k_2 s_2 &= \frac{V_0}{L} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{V_0}{L} - s_2 I_0 \right) \\ k_2 &= \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\frac{V_0}{L} - s_1 I_0 \right) \end{aligned}$$

και υπολογίζουμε

$$i_L(t) = \frac{V_0}{L(s_1 - s_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{L(s_1 - s_2)} (s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t})$$

II. ΚΡΙΣΙΜΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\alpha = \omega_0$

Υπάρχει μια διπλή ρίζα που είναι πραγματική και αρνητική $s_{1,2} = -\alpha$, η λύση δίνεται σαν

$$i_L(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-\alpha t}$$

οπότε προκύπτει $K_1 = I_0$ και $K_2 = \frac{V_0}{L} + I_0 \alpha$ και τελικά

$$i_L(t) = \left[I_0 + \left(\frac{V_0}{L} + I_0 \alpha \right) t \right] e^{-\alpha t}$$

III. ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\alpha < \omega_0$

Οι ρίζες είναι μιγαδικές συζυγείς $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega_d$, όπου ω_d είναι η **αποσβεσμένη**

συχνότητα ($\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, ή αν προτιμάει κανείς $\omega_d = \sqrt{|\alpha^2 - \omega_0^2|}$). Η λύση δίνεται πάλι σαν

$$i_L(t) = M_1 e^{s_1 t} + M_2 e^{s_2 t}$$

αλλά τώρα οι ρίζες είναι μιγαδικές και

$$\begin{aligned} i_L(t) &= M_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + M_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \\ &= e^{-\alpha t} (M_1 e^{j\omega_d t} + M_2 e^{-j\omega_d t}) \\ &= e^{-\alpha t} [M_1 \cos(\omega_d t) + jM_1 \sin(\omega_d t) + M_2 \cos(\omega_d t) - jM_2 \sin(\omega_d t)] \\ &= e^{-\alpha t} [(M_1 + M_2) \cos(\omega_d t) + j(M_1 - M_2) \sin(\omega_d t)] \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει περαιτέρω επεξεργασία ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι πραγματικό:

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} [(M_1 + M_2) \cos(\omega_d t) + j(M_1 - M_2) \sin(\omega_d t)] = e^{-\alpha t} N \cos(\omega_d t - \varphi)$$

Επιλέγουμε

$$M_1 = \frac{1}{2} (N_{\text{Re}} - jN_{\text{Im}})$$

$$M_2 = \frac{1}{2} (N_{\text{Re}} + jN_{\text{Im}})$$

Τότε

$$M_1 + M_2 = N_{\text{Re}}$$

$$M_1 - M_2 = -jN_{\text{Im}}$$

και

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} [N_{\text{Re}} \cos(\omega_d t) + N_{\text{Im}} \sin(\omega_d t)] = e^{-\alpha t} N \cos(\omega_d t - \varphi)$$

Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα ότι

$$A \cos(x) + B \sin(x) = C \cos(x + \xi) \Rightarrow$$

$$A \cos(x) + B \sin(x) = C \cos(x) \cos(\xi) - C \sin(x) \sin(\xi) \Rightarrow$$

$$A \cos(x) + B \sin(x) = [C \cos(\xi)] \cos(x) - [C \sin(\xi)] \sin(x) \Rightarrow$$

$$\cdots \rightarrow \left. \begin{aligned} A^2 + B^2 &= C^2 \\ \tan(\xi) &= -\frac{B}{A} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} C &= \pm \sqrt{A^2 + B^2} \\ \xi &= \tan^{-1}\left(\frac{-B}{A}\right) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$A \cos(x) + B \sin(x) = \text{Sign}(A) \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x + \tan^{-1}\left(\frac{-B}{A}\right)\right)$$

οπότε θα έχουμε ότι τελικά

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} \sqrt{N_{\text{Re}}^2 + N_{\text{Im}}^2} \cos\left(\omega_d t - \tan^{-1}\left(\frac{N_{\text{Im}}}{N_{\text{Re}}}\right)\right)$$

Από τις αρχικές συνθήκες θα έχουμε ότι

$$N_{\text{Re}} [e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t)]|_{t=0} + N_{\text{Im}} [e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)]|_{t=0} = I_0 \Rightarrow N_{\text{Re}} = I_0$$

$$e^{-\alpha t} [-N_{\text{Re}} \omega_d \sin(\omega_d t) + N_{\text{Im}} \omega_d \cos(\omega_d t)]|_{t=0}$$

$$- \alpha e^{-\alpha t} [N_{\text{Re}} \cos(\omega_d t) + N_{\text{Im}} \sin(\omega_d t)]|_{t=0} = \frac{V_0}{L} \Rightarrow N_{\text{Im}} = \frac{V_0}{L\omega_d} + \frac{\alpha I_0}{\omega_d}$$

έτσι ώστε υπολογίζουμε

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{\omega_d^2} \left(\frac{V_0}{L} + \alpha I_0\right)^2} \cos\left(\omega_d t - \tan^{-1}\left[\frac{1}{\omega_d} \left(\frac{V_0}{LI_0} + \alpha\right)\right]\right)$$

Εναλλακτικά:

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} \left[I_0 \cos(\omega_d t) + \left(\frac{V_0}{L\omega_d} + \frac{\alpha I_0}{\omega_d}\right) \sin(\omega_d t) \right]$$

IV. ΕΙΔΙΚΗ (ΜΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΙΜΗ) ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΗΛΕΝΙΚΗΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ: $\alpha = 0$

Με μηδενική απόσβεση το κύκλωμα γίνεται ένας καθαρός ταλαντωτής ($\omega_d = \omega_0$)

$$i_L(t) = I_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t)$$