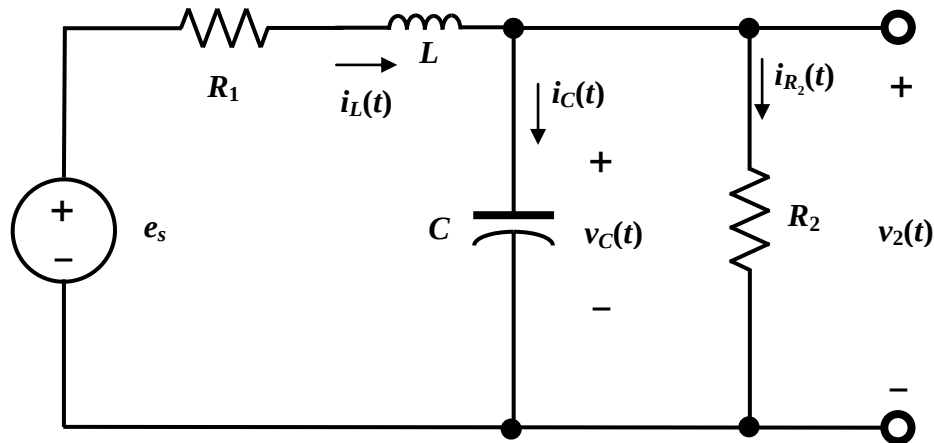


ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος με διεγέρσεις $e_s(t) = \delta(t)$ [V] (κρουστική) και $e_s(t) = u(t)$ [V] (βηματική), και **απόκριση** $v_2(t)$.

Η αρχική κατάσταση είναι $v_C(0^-) = 2$ [V] και $i_L(0^-) = 1$ [A].

Οι τιμές είναι: $R_1 = 4$ [Ω], $R_2 = 2$ [Ω], $L = 1$ [H], $C = 1$ [F].



A) Προσδιορίστε τη διαφορική εξίσωση για την απόκριση $v_2(t)$.

B) Υπολογίστε την πλήρη απόκριση για τις δοθείσες διεγέρσεις και αρχική κατάσταση.

ΜΕΡΟΣ 1^ο

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

Με τον «κλασσικό» τρόπο, παρατηρούμε ότι

$$v_C = v_{R_2} = v_2$$

(δηλαδή συνέδεσα την απόκριση με ένα «σημαντικό» μέγεθος του κυκλώματος, κάτι που αναφέρεται σε στοιχείο που αποθηκεύει ενέργεια) και από τους νόμους του Kirchhoff έχω:

$$\text{KVL: } v_{R_1} + v_L + v_C = e_s \quad (1)$$

$$\text{KCL: } i_L = i_C + i_{R_2} \Rightarrow i_L = C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_2} \quad (2)$$

Στην (1) πρέπει να εκφράσω τους όρους της σαν συναρτήσεις του v_C . Αυτό γίνεται μέσω του ρεύματος i_L και της (2). Έχω ότι

$$R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + v_C = e_s$$

και αντικαθιστώντας για το i_L από την (2) παίρνω

$$R_1 \left(C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_2} \right) + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_2} \right) + v_C = e_s$$

Αναπτύσσοντας και με λίγες απλές πράξεις έχω

$$\begin{aligned} CR_1 \frac{dv_C}{dt} + \frac{R_1}{R_2} v_C + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{L}{R_2} \frac{dv_C}{dt} + v_C &= e_s \Rightarrow \\ LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(CR_1 + \frac{L}{R_2} \right) \frac{dv_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) v_C &= e_s \end{aligned} \quad (3)$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές για τα στοιχεία

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{dv_C}{dt} + 3v_C = e_s$$

Εναλλακτικά, με μέθοδο κομβικών τάσεων (λόγω του μοναδικού βασικού κόμβου) και χρησιμοποιώντας τελεστές δεκτικότητας θα πάρουμε:

$$\frac{v_C - e_s}{R_1 + LD} + \frac{v_C}{R_2} + CDv_C = 0$$

και μετά από λίγη άλγεβρα

$$\begin{aligned} \frac{v_C}{R_1 + LD} + \frac{v_C}{R_2} + CDv_C &= \frac{e_s}{R_1 + LD} \Rightarrow \\ v_C + \frac{R_1 + LD}{R_2} v_C + CD \frac{R_1 + LD}{R_2} v_C &= e_s \Rightarrow \\ LCD^2 v_C + \left(CR_1 + \frac{L}{R_2} \right) Dv_C + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) v_C &= e_s \end{aligned}$$

δηλαδή φτάσαμε ξανά στην (3).

ΜΕΡΟΣ 2ο

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ (Φυσικά μπορούμε να βρούμε πρώτα την απόκριση μηδενικής κατάστασης σε βηματική και να διαφορίσουμε αλλά ξεκινάμε ανάποδα για να γίνει κατανοητή και αυτή η μέθοδος. Βλ. παρατήρηση στο τέλος του κειμένου)

Το πρόβλημα για την απόκριση σε κρουστική, όπως έχει δοθεί εδώ, είναι ιδιαίτερα δύσκολο λόγω της ύπαρξης μη μηδενικών αρχικών συνθηκών. Υπάρχει λύση, αλλά το θέμα αυτό είναι μάλλον μεταπτυχιακού επιπέδου και ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος ουσιαστικά.

Θεωρούμε λοιπόν ότι οι δοθείσες αρχικές συνθήκες ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ καθόσον για την κρουστική απόκριση μπορούμε να υποθέτουμε εκ προοιμίου ότι το κύκλωμα βρίσκεται σε ηρεμία και η πλήρης απόκριση αντικαθίσταται από απόκριση μηδενικής κατάστασης. Έτσι, πρέπει να βρούμε τη λύση της

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{dv_C}{dt} + 3v_C = \delta(t), \quad v_C(0^-) = 0, \quad \frac{dv_C(0^-)}{dt} = 0 \quad (4)$$

Ας επιλέξουμε από τις διαθέσιμες προσεγγίσεις την ολοκλήρωση από 0^- σε 0^+ .

$$\int_{0^-}^{0^+} \left(\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{dv_C}{dt} + 3v_C \right) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

Οπότε, διασπώντας το ολοκλήρωμα,

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} \Big|_{0^-}^{0^+} + \frac{9}{2} v_C \Big|_{0^-}^{0^+} + 3 \int_{0^-}^{0^+} v_C(t) dt &= 1 \Rightarrow \\ \frac{dv_C(0^+)}{dt} - \frac{dv_C(0^-)}{dt} + \frac{9}{2} v_C(0^+) - \frac{9}{2} v_C(0^-) + 3 \int_{0^-}^{0^+} v_C(t) dt &= 1 \end{aligned}$$

Από τις αρχικές συνθήκες όλοι οι ενδιάμεσοι όροι είναι μηδέν ενώ και το ολοκλήρωμα είναι μηδέν γιατί η τάση του πυκνωτή δεν μπορεί να κάνει άλματα οπότε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης για ένα σημείο δεν μπορεί παρά να είναι μηδέν. Τελικά θα έχουμε

$$\frac{dv_C(0^+)}{dt} = 1$$

Μετά από τα παραπάνω, η (4) μετατρέπεται στο πρόβλημα απόκρισης μηδενικής διέγερσης (ΑΜΔ)

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{dv_C}{dt} + 3v_C = 0, \quad v_C(0^+) = 0, \quad \frac{dv_C(0^+)}{dt} = 1 \quad (5)$$

Κατά τα γνωστά, από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$s^2 + \frac{9}{2}s + 3 = 0 \Rightarrow s_1 = -0,81 \quad \text{και} \quad s_2 = -3,69$$

οπότε

$$h(t) = A_1 e^{-0,81t} + A_2 e^{-3,69t} u(t)$$

και από τις αρχικές συνθήκες

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ -0,81A_1 - 3,69A_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= 0,3472 \\ A_2 &= -0,3472 \end{aligned}$$

και τελικά

$$h(t) = 0,3472e^{-0,81t} - 0,3472e^{-3,69t} u(t) \quad [\text{V}] \quad (\text{το } u(t) \text{ είναι συντομογραφία του } t \geq 0)$$

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο ερώτημα, για λόγους πάλι επίδειξης των μεθόδων και του τρόπου εργασίας, ας κοιτάξουμε τις αποκρίσεις μηδενικής διέγερσης και την απόκριση μηδενικής κατάστασης (που θα διαφορίσουμε για να επιβεβαιώσουμε την κρουστική απόκριση).

Απόκριση μηδενικής διέγερσης (AMΔ): δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{dv_C}{dt} + 3v_C = 0, \quad v_C(0^+) = 2, \quad \frac{dv_C(0^+)}{dt} = ???$$

και πρέπει να προσδιορίσουμε τον όρο $dv_C(0^+)/dt$ συνδέοντας τον με τις αρχικές συνθήκες. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας τον βασικό κόμβο του κυκλώματος και γράφοντας τον νόμο ρευμάτων του Kirchhoff [αν έχουμε επιλέξει την «κλασσική» προσέγγιση, απλά χρησιμοποιούμε την εξίσωση (2)]. Έτσι παίρνουμε

$$i_L = C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_2} \Rightarrow \frac{dv_C(0^+)}{dt} = \frac{i_L(0^+)}{C} - \frac{v_C(0^+)}{CR_2} = \frac{1}{1} - \frac{2}{2} = 0$$

Οπότε έχουμε να λύσουμε την

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{dv_C}{dt} + 3v_C = 0, \quad v_C(0^+) = 2, \quad \frac{dv_C(0^+)}{dt} = 0$$

Κατά τα γνωστά, από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$s^2 + \frac{9}{2}s + 3 = 0 \Rightarrow s_1 = -0,81 \quad \text{και} \quad s_2 = -3,69$$

οπότε

$$v_2^{AM\Delta}(t) = B_1 e^{-0,81t} + B_2 e^{-3,69t} u(t)$$

και από τις αρχικές συνθήκες

$$\left. \begin{aligned} B_1 + B_2 &= 2 \\ -0,81B_1 - 3,69B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} B_1 &= 2,5625 \\ B_2 &= -0,5625 \end{aligned}$$

και τελικά

$$v_2^{AM\Delta}(t) = 2,5625e^{-0,81t} - 0,5625e^{-3,69t} u(t) \quad [\text{V}]$$

Απόκριση μηδενικής κατάστασης (AMΚ): δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{dv_C}{dt} + 3v_C = u(t), \quad v_C(0) = 0, \quad \frac{dv_C(0)}{dt} = 0$$

της οποίας η λύση λόγω της διέγερσης πρέπει να περιέχει και μερική λύση. Η μερική αυτή λύση δίνεται από τη μόνιμη κατάσταση τού κυκλώματος που θα συνίσταται από ένα διαιρέτη τάσης από τους R_1 και R_2 . Έτσι, η v_2 θα είναι ίση με $\frac{2}{2+4} \cdot 1[\text{V}] = \frac{1}{3}[\text{V}]$ ή με διαφορετικό τρόπο,

$$\frac{1}{2+4}[\text{A}] \cdot 2[\Omega] = \frac{1}{3}[\text{V}]. \text{ Η λύση λοιπόν θα δοθεί (ακριβώς όπως και πριν για την ομογενή—δεν}$$

ξαναλύνουμε τη χαρακτηριστική!!) από την

$$v_2^{AMK}(t) = \left(G_1 e^{-0,81t} + G_2 e^{-3,69t} + \frac{1}{3} \right) u(t)$$

και από τις αρχικές συνθήκες θα πάρουμε ότι πρέπει να ισχύει

$$\left. \begin{aligned} G_1 + G_2 &= -\frac{1}{3} \\ -0,81G_1 - 3,69G_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} G_1 &= -0,4271 \\ G_2 &= 0,0938 \end{aligned}$$

και τελικά

$$v_2^{AMK}(t) = -0,4271e^{-0,81t} + 0,0938e^{-3,69t} + 0,3333 u(t) \quad [V]$$

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_2^{AMK}(t) &= 0,81 \times 0,4271 e^{-0,81t} - 3,69 \times 0,0938 e^{-3,69t} \\ &= 0,345951 e^{-0,81t} - 0,346122 e^{-3,69t} \end{aligned}$$

που επιβεβαιώνει το προηγούμενο αποτέλεσμα με ορθότητα δυο δεκαδικών ψηφίων.

...Και βέβαια καλά θα κάνει η πλήρης απόκριση να είναι ίση με AMΔ+AMK, δηλαδή

$$v_2^{IIA}(t) = \left[2,5625 - 0,4271 e^{-0,81t} + -0,5625 + 0,0938 e^{-3,69t} + 0,3333 \right] u(t) \quad [V]$$

ΜΕΡΟΣ 3ο

ΠΛΗΡΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΒΗΜΑΤΙΚΗ

Η διέγερση είναι βηματική και υπάρχουν αρχικές συνθήκες στο κύκλωμα. Συνεπώς, πρόκειται για πλήρη απόκριση. Η διαφορική εξίσωση δεν αλλάζει, απλά το πρόβλημα γίνεται τώρα:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{dv_C}{dt} + 3v_C = u(t), \quad v_C(0^-) = 2, \quad \frac{dv_C(0^-)}{dt} = ???$$

και πρέπει να προσδιορίσουμε τον όρο $dv_C(0^+)/dt$. Η τιμή του όρου αυτού θα προκύψει συνδέοντάς τον με τις αρχικές συνθήκες. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον βασικό κόμβο του κυκλώματος και γράφοντας τον νόμο ρευμάτων του Kirchhoff [αν είχαμε επιλέξει την «κλασσική» προσέγγιση, απλά θα χρησιμοποιούσαμε την εξίσωση (2)]. Έτσι παίρνουμε

$$i_L = C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_2} \Rightarrow \frac{dv_C(0^-)}{dt} = \frac{i_L(0^-)}{C} - \frac{v_C(0^-)}{CR_2} = \frac{1}{1} - \frac{2}{2} = 0$$

Οπότε έχουμε να λύσουμε την

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{dv_C}{dt} + 3v_C = u(t), \quad v_C(0) = 2, \quad \frac{dv_C(0)}{dt} = 0$$

Κατά τα γνωστά, από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$s^2 + \frac{9}{2}s + 3 = 0 \Rightarrow s_1 = -0,81 \quad \text{και} \quad s_2 = -3,69$$

Η λύση της διαφορικής λόγω του μη μηδενικού δεξιού μέρους (διέγερση) πρέπει να περιέχει και μερική λύση. Η μερική αυτή λύση δίνεται από την μόνιμη κατάσταση του κυκλώματος που θα συνίσταται από ένα διαιρέτη τάσης ανάμεσα στους R_1 και R_2 . Έτσι, η v_2 θα είναι ίση

$$\text{με } \frac{2}{2+4} \cdot 1[\text{V}] = \frac{1}{3}[\text{V}] \quad \text{ή με διαφορετικό τρόπο, } \frac{1}{2+4}[\text{A}] \cdot 2[\Omega] = \frac{1}{3}[\text{V}]. \quad \text{Η λύση λοιπόν θα}$$

πάρει τη μορφή (βλ. και Μάργαρη, Τόμο Β, 19.3-1, σελ. 110-113)

$$v_2^{IIA}(t) = \left(J_1 e^{-0,81t} + J_2 e^{-3,69t} + \frac{1}{3} \right) u(t)$$

και από τις αρχικές συνθήκες

$$\left. \begin{aligned} J_1 + J_2 + 0,3333 &= 2 \\ -0,81J_1 - 3,69J_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} J_1 &= 2,1354 \\ J_2 &= -0,4688 \end{aligned}$$

και τελικά

$$v_2^{IIA}(t) = 2,1354e^{-0,81t} - 0,4688e^{-3,69t} + 0,3333 u(t) \quad [\text{V}]$$

Ίδια με την ΑΜΔ+ΑΜΚ...!

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η διαφορίση της $v_2^{IIA}(t)$ ΔΕΝ θα μας δώσει την κρουστική απόκριση. Ο λόγος είναι ότι η κρουστική απόκριση αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες, άρα προκύπτει ΜΟΝΟ από την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Αυτό σημαίνει ότι από άποψη στρατηγικής για τη λύση τού παρόντος προβλήματος, η πιο σωστή «διαδρομή» θα ήταν

1. Εύρεση απόκρισης μηδενικής κατάστασης σε βηματική
2. Διαφορίση ΑΜΚ → Απόκριση σε κρουστική
3. Εύρεση απόκρισης μηδενικής διέγερσης σε βηματική
4. Πρόσθεση απόκρισης μηδενικής διέγερσης από το (3) και απόκρισης μηδενικής κατάστασης από το (1) → Πλήρης απόκριση σε βηματική

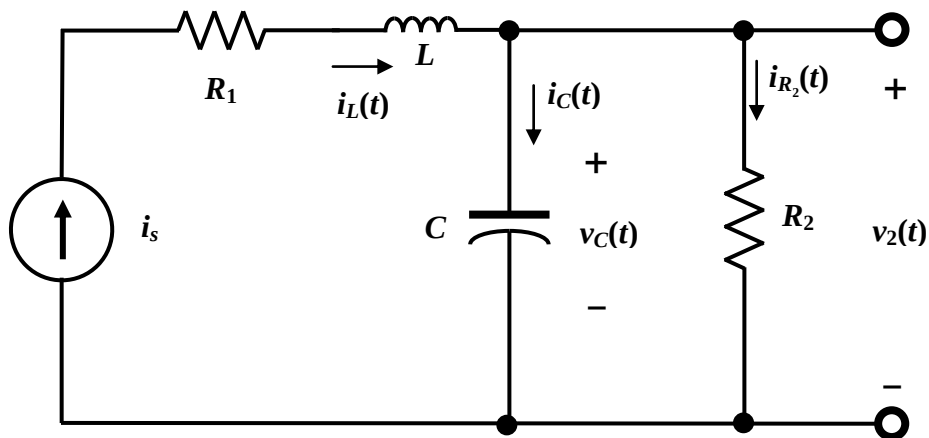
ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΑ ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Λύστε το παρακάτω πολύ παρόμοιο αλλά πολύ πιο εύκολο πρόβλημα:

Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος με **διέγερση** $i_s(t) = u(t)$ [V] (βηματική), και **απόκριση** $v_2(t)$.

Η αρχική κατάσταση είναι $v_C(0^-) = 1$ [V] και $i_L(0^-) = 2$ [A].

Οι τιμές είναι: $R_1 = 4$ [Ω], $R_2 = 2$ [Ω], $L = 1$ [H], $C = 1$ [F].



A) Προσδιορίστε τη διαφορική εξίσωση για την απόκριση $v_2(t)$.

B) Υπολογίστε την πλήρη απόκριση.

ΛΥΣΗ: $v_2^{AMd}(t) = e^{-0,5t} u(t)$ [V], $v_2^{AMK}(t) = -2e^{-0,5t} + 2 u(t)$ [V]

$v_2^{PIA}(t) = 2 - e^{-0,5t} u(t)$ [V]