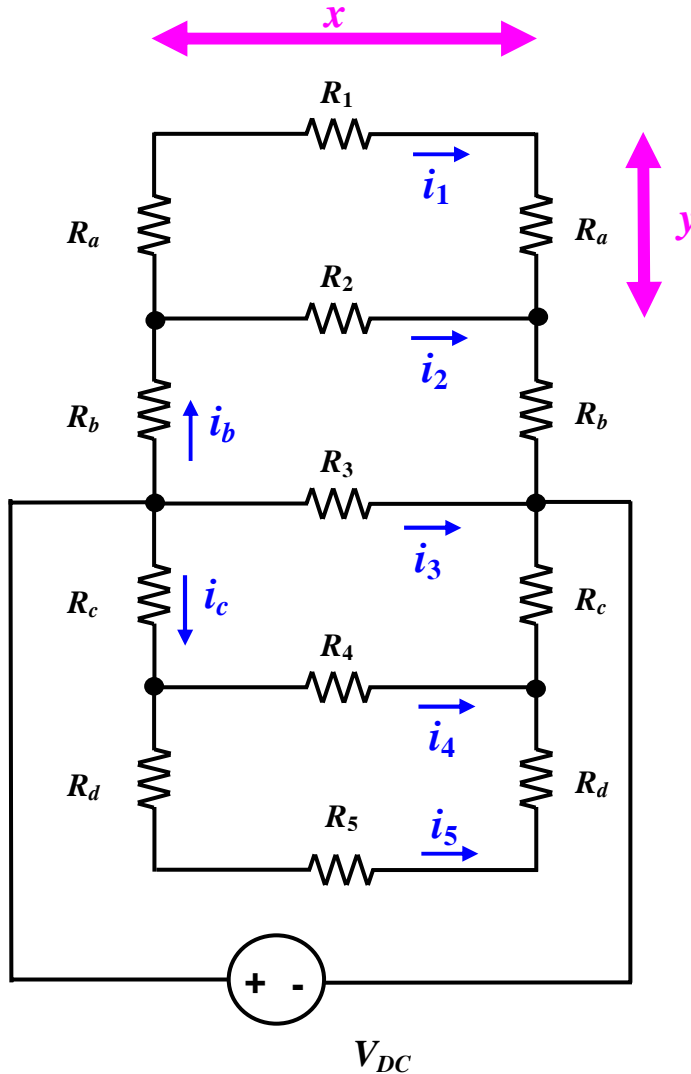


ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΥΑΛΟΠΙΝΑΚΑ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ

(από το Nilsson & Riedel, 2000)



ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στο πίσω παράθυρο των αυτοκινήτων τοποθετείται ένα πλέγμα από υλικό που παρουσιάζει αντίσταση στο ηλεκτρικό ρεύμα. Το πλέγμα θερμαίνεται όταν συνδεθεί με μια πηγή (τη μπαταρία), θερμαίνει τον υαλοπίνακα και εξαναγκάζει τους συγκεντρωμένους υδρατμούς που εμποδίζουν την ορατότητα να εξατμισθούν. Το πλέγμα του διαγράμματος αποτελείται από καταναλισκόμενους αντιστάτες με σταθερή αντίσταση ανά μονάδα μήκους κι έχει ομοιόμορφες διαστάσεις. Με δεδομένες τις διαστάσεις του πλέγματος (σε πολλαπλά «αντίγραφα» των x και y), να βρεθούν εκφράσεις για κάθε αντιστάτη του πλέγματος έτσι ώστε η καταναλισκόμενη ισχύς ανά μονάδα μήκους να είναι ίδια σε κάθε στέλεχος (με στόχο την ομοιόμορφη διασπορά θερμότητας).

ΑΝΑΛΥΣΗ

Εφόσον η ισχύς είναι καταναλισκόμενη και μάλιστα ομοιόμορφα πρέπει να ισχύει ότι

$$i_1^2 \frac{R_1}{x} = i_2^2 \frac{R_2}{x} = i_3^2 \frac{R_3}{x} = i_4^2 \frac{R_4}{x} = i_5^2 \frac{R_5}{x} \quad (1)$$

$$i_1^2 \frac{R_a}{y} = i_1^2 \frac{R_1}{x} \quad (2)$$

$$i_1^2 \frac{R_a}{y} = i_b^2 \frac{R_b}{y} = i_c^2 \frac{R_c}{y} = i_d^2 \frac{R_d}{y} \quad (3)$$

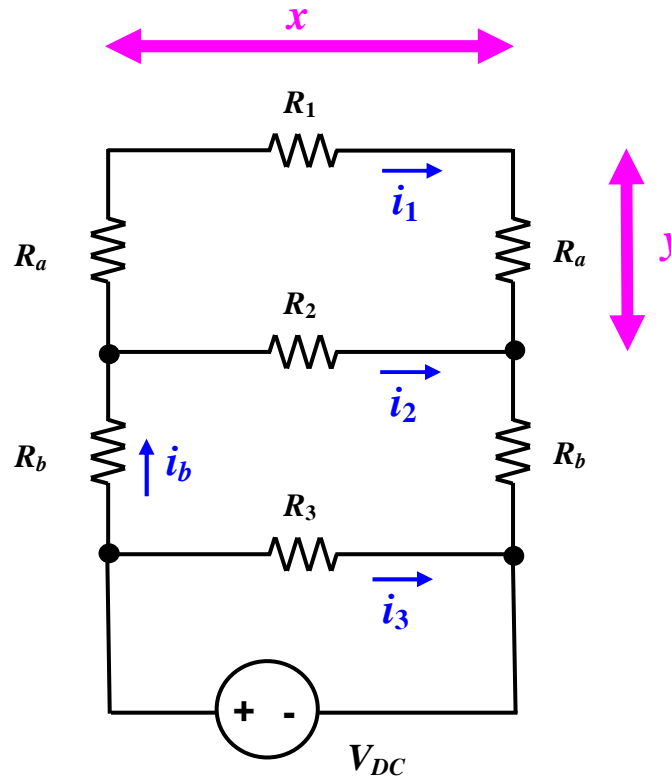
$$i_5^2 \frac{R_d}{y} = i_5^2 \frac{R_5}{x} \quad (4)$$

Στο σημείο αυτό, παρατηρώντας το κύκλωμα, μπορούμε να υποθέσουμε την ύπαρξη συμμετρίας με άξονα τον κλάδο του αντιστάτη R_3 . Επίσης, υπάρχει μια συμμετρία σε

σχέση με τον κατακόρυφο άξονα που διατρέχει τους αντιστάτες R_1 έως και R_5 . Συνεπώς,

$$R_4 = R_2, \quad R_5 = R_1, \quad R_c = R_b, \quad R_d = R_a$$

και χρειάζεται να βρούμε μόνο τις αντιστάσεις R_1 , R_2 , R_3 , R_a , και R_b . Επιπλέον, μπορούμε να επικεντρωθούμε στην ανάλυση του μισού μόνο κυκλώματος εφόσον τα ρεύματα του ενός μισού δεν επηρεάζουν τα ρεύματα του άλλου μισού (σκεφθείτε την αντικατάσταση του κυκλώματος πάνω από τον R_3 και του κυκλώματος κάτω από τον R_3 από κάποιους ισοδύναμους αντιστάτες: λόγω της παράλληλης σύνδεσης, η αφαίρεση του ενός αντιστάτη δεν επηρεάζει τους άλλους). Τελικά λοιπόν το κύκλωμα γίνεται:



Ας προσδιορίσουμε τώρα τα ρεύματα. Στον πάνω βρόχο, μια απλοποίηση δίνει τη συνολική αντίσταση:

$$R_1 \text{ σε σειρά με } R_a \text{ και } R_a \text{ και όλο αυτό παράλληλα με } R_2 \quad \ddot{\circ} \quad \frac{R_2(R_1 + 2R_a)}{R_1 + R_2 + 2R_a}$$

Συνεχίζοντας την απλοποίηση, η πιο πάνω ισοδύναμη αντίσταση συνδυάζεται με τις R_b . Έτσι

$$2R_b + \frac{R_2(R_1 + 2R_a)}{R_1 + R_2 + 2R_a} = \frac{(R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2R_b}{R_1 + R_2 + 2R_a}$$

οπότε

$$i_b = \frac{V_{DC}}{\frac{(R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2R_b}{R_1 + R_2 + 2R_a}} = \frac{V_{DC}(R_1 + R_2 + 2R_a)}{(R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2R_b} \quad (5)$$

Από τον διαιρέτη ρεύματος $i_b \rightarrow i_1 + i_2$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα i_1 και i_2 :

$$i_1 = \frac{i_b R_2}{R_1 + R_2 + 2R_a} = \frac{V_{DC} R_2}{(R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2 R_b} \quad (6)$$

$$i_2 = \frac{i_b (R_1 + 2R_a)}{R_1 + R_2 + 2R_a} = \frac{V_{DC} (R_1 + 2R_a)}{(R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2 R_b} \quad (7)$$

και τέλος για το εναπομένον άγνωστο ρεύμα

$$i_3 = \frac{V_{DC}}{R_3} \quad (8)$$

Από τους περιορισμούς που αφορούν την ισχύ, συγκεκριμένα τους (1), (2) και (3), θα εντοπίσουμε τιμές για τις αντιστάσεις.

$$i_1^2 \frac{R_a}{y} = i_1^2 \frac{R_1}{x} \Rightarrow \frac{R_a}{y} = \frac{R_1}{x} \Rightarrow R_a = \lambda R_1 \text{ όπου } \lambda = \frac{y}{x} \quad (9)$$

$$i_1^2 \frac{R_1}{x} = i_2^2 \frac{R_2}{x} \Rightarrow R_2 = \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 R_1 \quad (10)$$

Ο λόγος των ρευμάτων i_1 και i_2 είναι γνωστός από τις εκφράσεις (6) και (7) που υπολογίσαμε πιο πάνω:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{V_{DC} R_2}{V_{DC} (R_1 + 2R_a)} = \frac{R_2}{(R_1 + 2\lambda R_1)}$$

Τότε η (10) μας δίνει

$$R_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + 2\lambda R_1} \right)^2 R_1 \Rightarrow R_2 = \frac{R_2^2 R_1}{R_1^2 (1 + 2\lambda)^2} \Rightarrow R_2 = (1 + 2\lambda)^2 R_1 \quad (11)$$

Τέλος, από την (3)

$$i_1^2 \frac{R_a}{y} = i_b^2 \frac{R_b}{y} \Rightarrow R_b = \left(\frac{i_1}{i_b} \right)^2 R_a$$

και υπολογίζοντας τον λόγο i_1 προς i_b ή εναλλακτικά από την (6):

$$\frac{i_1}{i_b} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 2R_a} \Rightarrow \left(\frac{i_1}{i_b} \right)^2 = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2 + 2\lambda R_1)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_1(1 + 2\lambda)^2 + 2\lambda R_1)^2}$$

οπότε μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις

$$R_b = \frac{\lambda (1 + 2\lambda)^2}{4(1 + \lambda)^2} R_1 \quad (12)$$

Με παρόμοιο τρόπο για την R_3 θα έχουμε

$$i_1^2 \frac{R_1}{x} = i_3^2 \frac{R_3}{x} \Rightarrow R_3 = \left(\frac{i_1}{i_3} \right)^2 R_1$$

κι επειδή

$$\frac{i_1}{i_3} = \frac{R_2 R_3}{(R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2 R_b}$$

με αντικαταστάσεις και πράξεις θα πάρουμε τελικά

$$R_3 = \frac{(1 + 2\lambda)^4}{(1 + \lambda)^2} R_1 \quad (13)$$

Καταφέραμε λοιπόν να προσδιορίσουμε τις τιμές των R_2 , R_3 , R_a και R_b σαν συνάρτηση της R_1 και του λόγου $\lambda = y/x$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ας πάρουμε $x = 1 \text{ m}$ και $y = 0,025 \text{ m}$ με το πλέγμα να περιέχει 5 οριζόντια στελέχη (όπως στην πιο πάνω ανάλυση). Ας υποθέσουμε ότι η ζητούμενη ισχύς είναι 120 W/m και ότι η μπαταρία μας είναι 12 V .

Σύμφωνα με την προηγηθείσα ανάλυση, ο λόγος θα είναι
 $\lambda = y/x = 0,025/1 = 0,025$

Η ισχύς στην R_3 θα είναι 120 W , οπότε $R_3 = \frac{12^2}{120} = 1,2 \text{ Ohm}$.

Από τη σχέση R_1 και R_3 , υπολογίζουμε την $R_1 = 1,0372 \text{ Ohm}$.

Με ανάλογο τρόπο:

$$R_a = 0,0259 \text{ Ohm}$$

$$R_b = 0,0068 \text{ Ohm}$$

$$R_2 = 1,1435 \text{ Ohm}$$

Και λόγω συμμετρίας οι υπόλοιπες αντιστάσεις είναι επίσης γνωστές

$$R_d = 0,0259 \text{ Ohm}$$

$$R_c = 0,0068 \text{ Ohm}$$

$$R_4 = 1,1435 \text{ Ohm}$$

$$R_5 = 1,0372 \text{ Ohm}$$

ΕΛΕΓΧΟΣ

Υπολογίζω τα ρεύματα

$$i_b = 21 \text{ A}$$

$$i_1 = 10,7561 \text{ A}$$

$$i_2 = 10,2439 \text{ A}$$

Τότε $i_b^2 R_b = 3 \text{ W}$ οπότε πράγματι $3/0,025 = 120 \text{ W/m}$ και το ίδιο επιβεβαιώνεται και για τα άλλα δυο ρεύματα: $i_1^2 R_1 = 120 \text{ W}$ και $i_2^2 R_2 = 120 \text{ W}$ άρα η κατανεμημένη ισχύς είναι 120 W/m .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αν υπήρχαν περισσότερα ομοιόμορφα στελέχη ή/και ανομοιομορφία στη διάταξη των στελεχών η ανάλυση μπορεί να ακολουθήσει παρόμοιο δρόμο αλλά θα είναι πιο επίπονη (ιδίως στην περίπτωση της ασυμμετρίας).
- Στην πραγματικότητα η επιλογή των υλικών/μεγεθών πρέπει να γίνει πολύ προσεκτικά για να έχουμε βαθμιαία θέρμανση ώστε να αποφευχθεί ο κίνδυνος ραγίσματος του γυαλιού σε μεγάλο ψύχος.