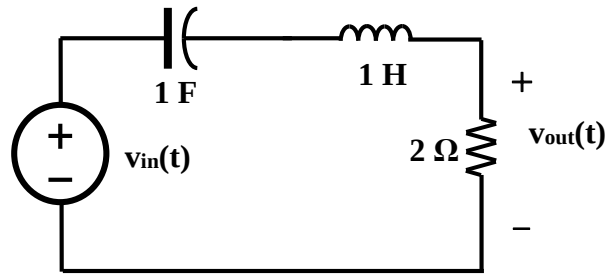
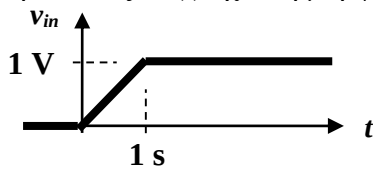


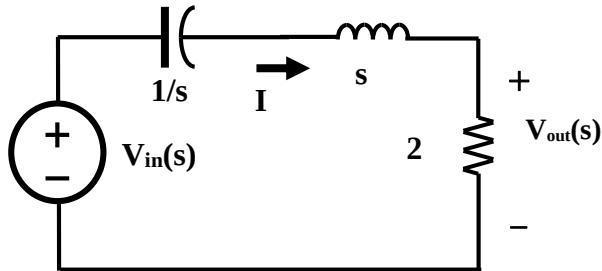
ΘΕΜΑ 1. [20 %]

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ για το κύκλωμα στα δεξιά. Στη συνέχεια υπολογίστε την έξοδο $v_{out}(t)$ όταν η είσοδος $v_{in}(t)$ έχει τη μορφή



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η αναπαράσταση του κυκλώματος στο πεδίο συχνότητας είναι



Ισχύει ότι $V_{in}(s) = I \left(\frac{1}{s} + s + 2 \right)$ και $V_{out}(s) = I \cdot 2$

οπότε

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{s} + s + 2 \right)} = \frac{2s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2s}{(s+1)^2}$$

Η είσοδος μπορεί να γραφτεί με διάφορους τρόπους. Ίσως ο πιο «ασφαλής» είναι με αποφυγή περιπτώσεων:

$$v_{in}(t) = tu(t) - tu(t-1) + u(t-1) \quad [\text{έναρξη ράμπας στα } 0s][\text{«σβήσιμο» της ράμπας και έναρξη της βηματικής στο } 1s]$$

$$v_{in}(t) = tu(t) + (1-t)u(t-1) = tu(t) - (t-1)u(t-1)$$

Στη μορφή αυτή, η κυματομορφή είναι έτοιμη για μετασχηματισμό στο πεδίο συχνότητας:

$$v_{in}(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} = V_{in}(s)$$

Με οποιοδήποτε τρόπο κι αν αναπαραστήσουμε την είσοδο αυτή, αν ακολουθήσουμε τους κανόνες του μετ/μου

Laplace, θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Π.χ. $tu(t) - tu(t-1) + u(t-1) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}(1+s)}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}$

Δοκιμάστε κι άλλες αναπαραστάσεις για να πεισθείτε!

Από τη γνωστή σχέση $V_{out}(s) = H(s)V_{in}(s)$ θα έχω:

$$V_{out}(s) = \left[\frac{2s}{(s+1)^2} \right] \left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} \right)$$

Παρατηρώ ότι στη δεξιά παρένθεση έχω τον ίδιο όρο, αλλά τη δεύτερη φορά είναι μετατοπισμένος κατά 1 δευτερόλεπτο. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε μόνο με τον πρώτο όρο και να αντιγράψουμε το αποτέλεσμα μετατοπίζοντάς το κατά ένα δευτερόλεπτο.

Τελικά λοιπόν θα πάρουμε

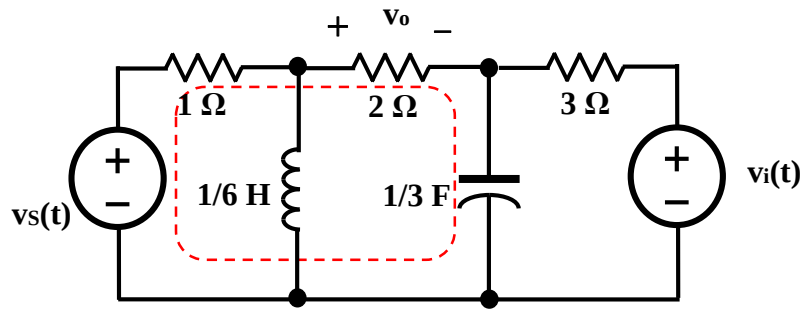
$$(2 - 2e^{-t} - 2te^{-t})u(t) - [2 - 2e^{-(t-1)} - 2(t-1)e^{-(t-1)}]u(t-1)$$

που απλοποιείται σε

$$v_{out}(t) = (2 - 2e^{-t} - 2te^{-t})u(t) + (-2 + 2ete^{-t})u(t-1)$$

ΘΕΜΑ 2. [20 %]

Για το κύκλωμα στα δεξιά
βρείτε μια αναπαράσταση με
μεταβλητές κατάστασης.
Η έξοδος είναι η τάση v_0 .

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Το κύκλωμα είναι δεύτερης τάξης, οπότε ο χειρισμός με Kirchhoff είναι μάλλον προτιμότερος.

ΣΤΟΧΟΣ: Μεταβλητές κατάστασης: $x = \{v_C, i_L\}$

Απόκριση: $\{v_0\}$

Μοντέλο: $\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$

ΕΚΤΕΛΕΣΗ:

ΝΡΚ στους δυο κόμβους που αφορούν την αντίσταση των 2Ω , ΝΤΚ στον αριστερό βρόχο και ΝΤΚ στον κόκκινο βρόχο όπως φαίνεται στο σχήμα. [Πολλοί άλλοι συνδυασμοί είναι δυνατοί]

ΤΕΛΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ:

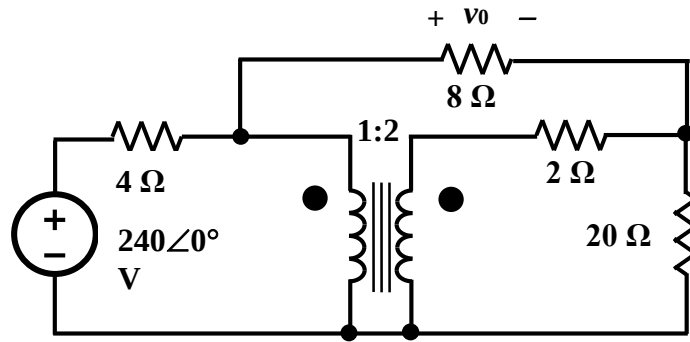
$$\begin{pmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_s \\ v_i \end{pmatrix}$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_s \\ v_i \end{pmatrix}$$

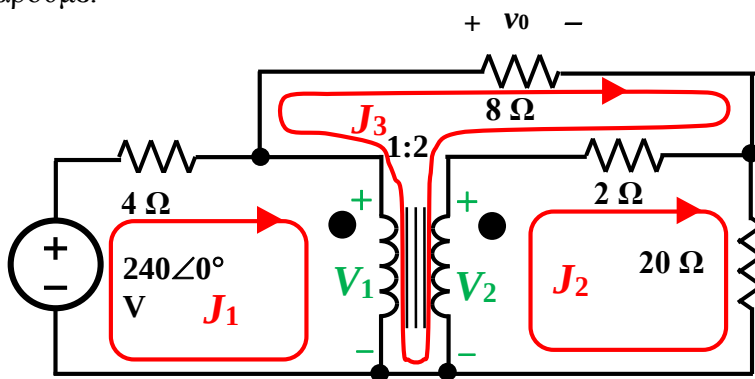
ΘΕΜΑ 3. [20 %]

Α. Στο κύκλωμα στα δεξιά, βρείτε την τάση v_0 . Το κύκλωμα είναι στη μόνιμη κατάσταση. [15 %]

Β. Τώρα η δεξιά τελεία μετακινείται στο κάτω άκρο τού μετασχηματιστή. Γράψτε τις απαραίτητες εξισώσεις για την επίλυση του νέου κυκλώματος αλλά μην τις λύσετε. [5 %]

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Α. Ένας απλός τρόπος να αναλυθεί το κύκλωμα αυτό, είναι με βροχικές εντάσεις. Για τους ενδεικνυόμενους βρόχους θα πάρουμε:



Οι εξισώσεις βροχικών εντάσεων είναι

$$-240 + 4J_1 + V_1 = 0$$

$$20J_2 - V_2 + 2(J_2 - J_3) = 0$$

$$8J_3 + 2(J_3 - J_2) + V_2 - V_1 = 0$$

Για να επιλυθεί το σύστημα αυτό, απαιτούνται δυο ακόμα εξισώσεις που θα προέλθουν από τη λειτουργία τού ιδανικού μετασχηματιστή:

$$V_2 = 2V_1$$

$$J_2 - J_3 = \frac{1}{2}(J_1 - J_3)$$

Προφανώς, η τελευταία σχέση καταγράφει τη σχέση μεταξύ των ρευμάτων που διαρρέουν τα τυλίγματα (πηνία) του μετασχηματιστή. Πολλοί έκαναν το λάθος να θεωρήσουν ότι η σχέση αυτή αφορούσε τα βροχικά ρεύματα.

Τυπικά το σύστημα είναι 5^{ης} τάξης. Όμως, με λίγη άλγεβρα, πολύ γρήγορα μετατρέπεται σε 2^{ης} τάξης. Τελικά η απάντηση στο ερώτημα Α είναι $V_0 = -80\angle 0^\circ \text{ V}$.

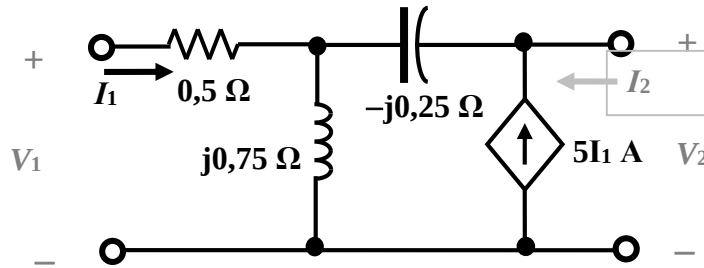
Β. Οι εξισώσεις βροχικών εντάσεων θα είναι ίδιες, αλλά θα αλλάξουν οι σχέσεις τάσεων-ρευμάτων τού μετασχηματιστή (διατηρώντας τις ίδιες πολικότητες και φορές ρευμάτων):

$$V_2 = -2V_1$$

$$J_2 - J_3 = -\frac{1}{2}(J_1 - J_3)$$

ΘΕΜΑ 4. [20 %]

Για το δίθυρο στα δεξιά
βρείτε τις παραμέτρους y .

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

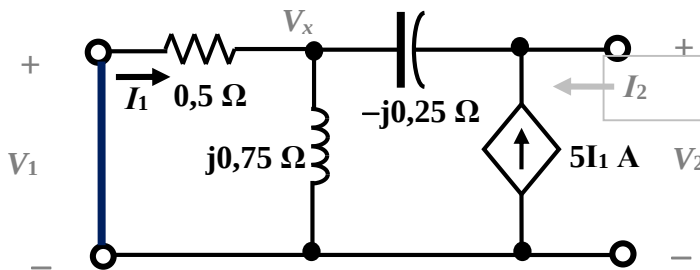
Για την εύρεση των παραμέτρων υπάρχουν δυο τρόποι: (1) ο κλασικός μέσω των ορισμών και (2) ο ευρηματικός τρόπος που ικανοποιεί και τον «πειρασμό» να χρησιμοποιήσουμε το «εύκολο» κύκλωμα αστέρα στα αριστερά της πηγής.

(1) Ο κλασικός τρόπος συμπεριλαμβάνει και την εύρεση άλλων παραμέτρων, π.χ. των z , και τη μετατροπή τους στη συνέχεια. Ας παραμείνουμε στις παραμέτρους y , πιο πολύ για να φανεί η διαδικασία παρά για το ότι είναι ευκολότερη (δεν είναι!).

Αρχίζουμε γράφοντας τους ορισμούς

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned} \quad y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

Για $V_1 = 0$



Έχουμε ότι

$$\frac{V_x}{0,5} + \frac{V_x}{j0,75} + \frac{V_x - V_2}{-j0,25} = 0 \quad (E1)$$

$$\frac{V_2 - V_x}{-j0,25} - 5I_1 - I_2 = 0 \quad (E2)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$I_1 = -2V_x \Leftrightarrow V_x = -0,5I_1 \quad (E3)$$

και ότι

$$\frac{V_2}{-j0,25} + \frac{0,5 \cdot j0,75}{0,5 + j0,75} - 5I_1 - I_2 = 0 \Leftrightarrow (2,88 + j0,16)V_2 - 5I_1 - I_2 = 0 \quad (E4)$$

Αντικαθιστώντας την E3 στην E2 και μετά προσθέτοντας την τελευταία στην E4 βρίσκουμε ότι

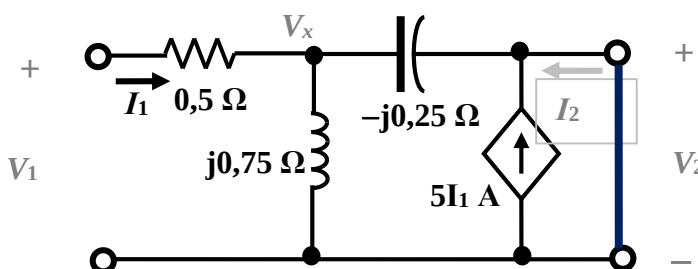
$$y_{12} = -1,92 - j1,44$$

Μετά, με βάση την E2, θα πάρουμε ότι

$$\frac{V_2 - V_x}{-j0,25} - 5I_1 - I_2 = 0 \Leftrightarrow 4jV_2 - 4jV_x - 5I_1 = I_2 \Leftrightarrow 4jV_2 + 2jI_1 - 5I_1 = I_2 \Leftrightarrow$$

$$4jV_2 + (-5 + 2j)y_{12}V_2 = I_2 \Leftrightarrow y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = 4j + (-5 + 2j)(-1,92 - j1,44) = 12,48 + j7,36$$

Για $V_2 = 0$:



έχουμε ότι

$$\frac{V_1}{I_1} = 0,5 + \frac{j0,75 \cdot (-j0,25)}{j0,75 - j0,25} \Leftrightarrow \frac{V_1}{I_1} = 0,5 - j0,375 \Leftrightarrow \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{0,5 - j0,375} \Leftrightarrow y_{11} = 1,28 + j0,96$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε τα εξής:

- $\frac{V_x - V_1}{0,5} + \frac{V_x}{j0,75} + \frac{V_x}{-j0,25} = 0$ (κόμβος x)
- $\frac{V_x}{-j0,25} + 5I_1 + I_2 = 0$ (από NPK στο πάνω άκρο της εξαρτημένης πηγής)
- $I_1 = \frac{V_1 - V_x}{0,5}$

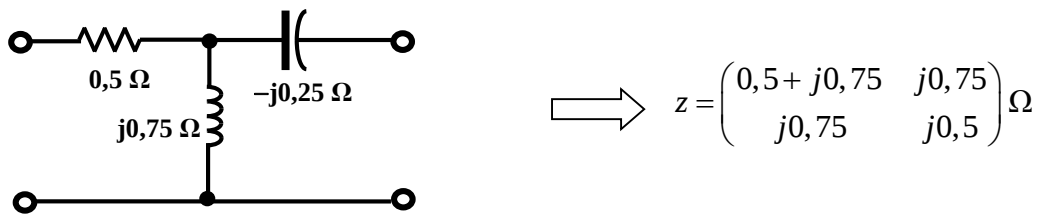
Οι τρεις τελευταίες σχέσεις μάς επιτρέπουν να υπολογίσουμε

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -8,32 - j6,24$$

Τελικά λοιπόν,

$$y = \begin{pmatrix} 1,28 + j0,96 & -1,92 - j1,44 \\ -8,32 - j6,24 & 12,48 + j7,36 \end{pmatrix} \text{ S}$$

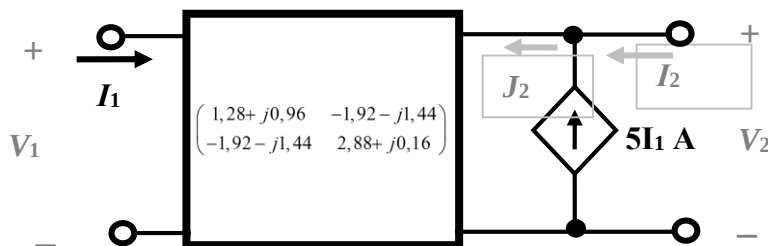
(2) Αν δεν σκεφθούμε «κλασικά» ή καλύτερα, αν σκεφθούμε πώς να εκμεταλλευτούμε τον εύκολο αστέρα, παρατηρούμε ότι το δίθυρο αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν δυο τμήματα (όχι όμως με κάποια από τις δομές της «σύνδεσης διθύρων»). Έτσι



Αυτό σημαίνει ότι (π.χ. από τον πίνακα του τυπολογίου) ότι

$$y_* = \begin{pmatrix} 1,28 + j0,96 & -1,92 - j1,44 \\ -1,92 - j1,44 & 2,88 + j0,16 \end{pmatrix} \text{ S}$$

Τώρα,



και βλέπουμε ότι $I_2 = J_2 - 5I_1 = y_{*21}V_1 + y_{*22}V_2 - 5I_1$ που συνδυάζοντάς την με την $I_1 = y_{*11}V_1 + y_{*12}V_2$ παίρνουμε

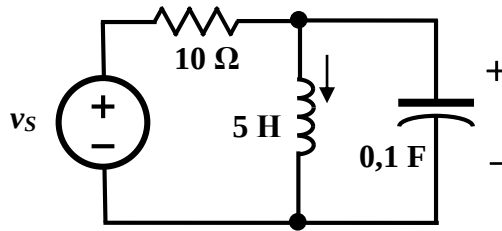
$$I_1 = y_{*11}V_1 + y_{*12}V_2$$

$$I_2 = (y_{*21} - 5y_{*11})V_1 + (y_{*22} - 5y_{*12})V_2$$

που καταλήγει φυσικά στο ίδιο αποτέλεσμα με παραπάνω.

ΘΕΜΑ 5. [10 %]

Στο κύκλωμα στα δεξιά, η αρχική τάση του πυκνωτή είναι 4 V και το αρχικό ρεύμα τού πηνίου είναι -1 A. Βρείτε την αναπαράσταση του κυκλώματος στο πεδίο συχνότητας. Μην υπολογίσετε τίποτε.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οποιοδήποτε από τα πιο κάτω κυκλώματα αποτελεί μια σωστή αναπαράσταση.

