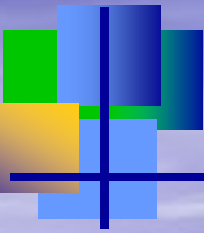




ΠΡΟΣΟΧΗ

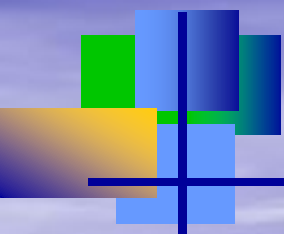
**Οι διαφάνειες είναι ακατάλληλες
για εκμάθηση και αφομοίωση**

**Δημιουργούν μόνο μια
ψευδαίσθηση κατανόησης**



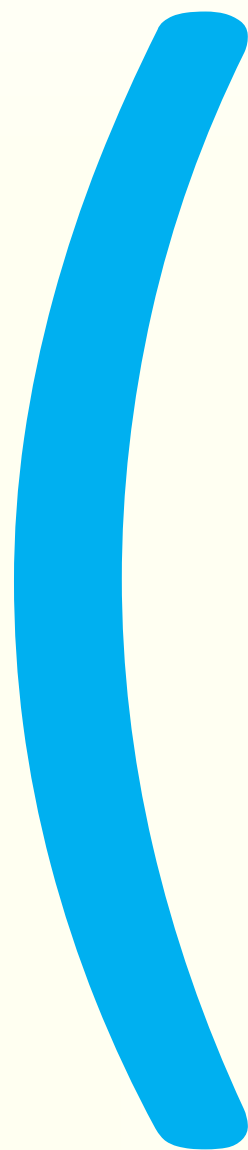
ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Ηλεκτρικά Κυκλώματα I [εισαγωγή]
- Ηλεκτρικά Κυκλώματα II [γενική θεωρία]
- Ανάλυση Κυκλωμάτων Ισχύος [εξειδίκευση]



ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΙΙ

- Ηλεκτρικά Κυκλώματα ΙΙ
- ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ
- Εγγραφές:



ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι: ΤΙ ΘΑ ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΜΑΘΕΙ

- Βασική παραδοχή – Νόμοι Kirchhoff
- Κυματομορφές/Σήματα
- Απλά κυκλώματα με αντιστάσεις (απλοποιήσεις, δαιρέτες, Thevenin)
- Μέθοδοι γενικής ανάλυσης ΚΤ / ΒΕ
- Ανάλυση κυκλωμάτων πρώτης τάξης (RC/RL)
- Ανάλυση κυκλωμάτων δεύτερης τάξης (κυρίως RLC)
- **Δυναμική ανάλυση σύνθετων κυκλωμάτων**
- Φάσορες – μόνιμη ημιτονοειδής κατάσταση

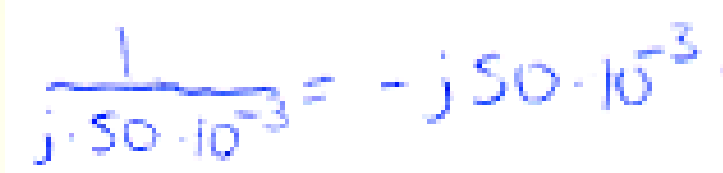
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι: ΤΙ ΘΑ ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΜΑΘΕΙ

- Νόμοι Kirchhoff
- Μέθοδοι γενικής ανάλυσης ΚΤ / ΒΕ
- Η τοπολογία του κυκλώματος μπορεί να αναπαρασταθεί εύκολα με ένα πίνακα που έχει την ίδια δομή (σχεδόν) **ανεξάρτητα** από το αν λύνουμε το κύκλωμα στο πεδίο του χρόνου ή της συχνότητας (φάσορες, προς το παρόν, σύντομα και με Laplace)
- Πολλή προσοχή στην εφαρμογή «ευκολιών» όπως διαιρέτες και μετατροπή πηγών

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι: ΤΙ ΘΑ ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΜΑΘΕΙ

- Σύνδεση σε σειρά και παράλληλα
- Δεν πρέπει να χρησιμοποιείται τάση χωρίς πολικότητα ούτε ρεύμα χωρίς κατεύθυνση
- Διαιρέτης τάσης
- Γωνία τού φάσορα (**atan2**)
- Το ημίτονο ($\sin$) δεν έχει θέση σε υπολογισμούς με φάσορες

ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ Ι: ΤΙ ΘΑ ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΜΑΘΕΙ

- Σκεφτόμαστε στρατηγικά το πρόβλημα για να διαλέξουμε την καλύτερη προσέγγιση
- **ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΝΟΜΑΣΤΕ** για να αποφύγουμε αβίαστα λάθη όπως $5 = 2 \times 3$ και $1/5 = 5$, λάθος δεδομένα, τάσεις χωρίς πολικότητες, κλπ.

- Ερμηνεύουμε τα αποτελέσματα (και τα ενδιάμεσα)
 - Π.χ. δικαιολογείται τυχόν θετικό εκθετικό, είναι ο πίνακας συμμετρικός όπως περιμέναμε από τη θεωρία, κλπ.;
- Επιβεβαιώνουμε τη λύση



ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ II

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

- **Μαγνητική σύζευξη**

- Μετασχηματιστές

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Ιδιότητες & Θεωρήματα
- Εφαρμογή στα κυκλώματα
- ΚΤ/ΒΕ για οποιαδήποτε είσοδο (ή εισόδους)
- Συναρτήσεις κυκλώματος και απόκριση συχνότητας

- **ΔΙΘΥΡΑ**

- Διασυνδέσεις

- **ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ**

- **Γράφοι**

- **Μεταβλητές κατάστασης**

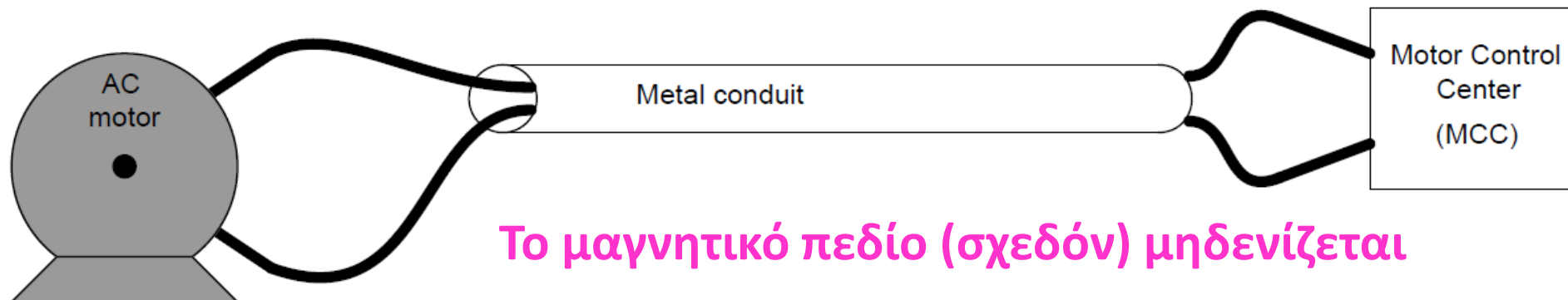
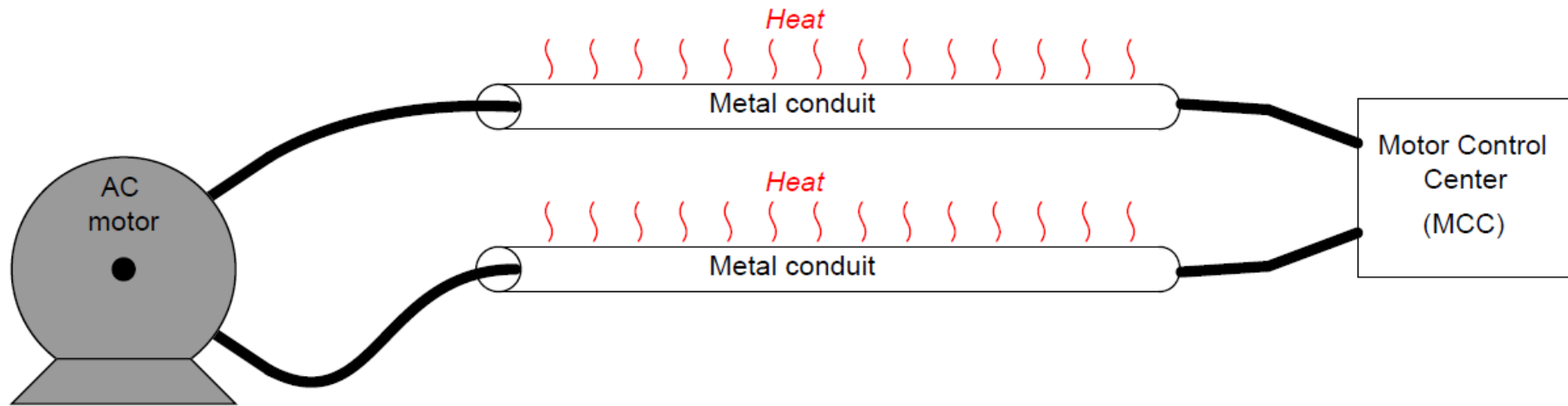
ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΣΥΖΕΥΞΗ

ΑΠΟ ΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι

- ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ—ΤΙ ΚΑΤΑΦΕΡΑΜΕ;
- Καταφέραμε λοιπόν να κάνουμε το κύκλωμά μας **σημειακό**:
 1. Το συνολικό φορτίο σε κάθε στοιχείο παραμένει πάντα 0
 - 2. Δεν υπάρχει μαγνητική σύζευξη μεταξύ των στοιχείων του κυκλώματος**
 3. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καλύπτουν στιγμιαία όλο το κύκλωμα
- Αν ισχύουν τα παραπάνω, τότε αποκαλούμε το κύκλωμα **συγκεντρωμένο (lumped)**
- Αν δεν ισχύουν, το κύκλωμα είναι **κατανεμημένο (distributed)**, π.χ. γραμμές μεταφοράς

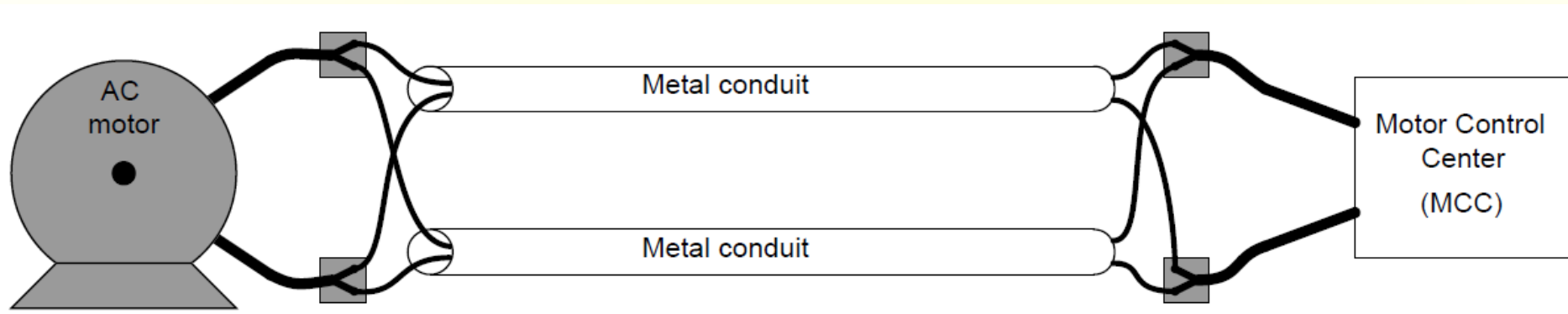
ΤΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΑΝΤΑ!

- Ηλεκτρικό ρεύμα → Μαγνητικό πεδίο
- Ταλαντωνόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί «παρασιτικά» ρεύματα σε αγωγίμα αντικείμενα



ΤΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΑΝΤΑ!

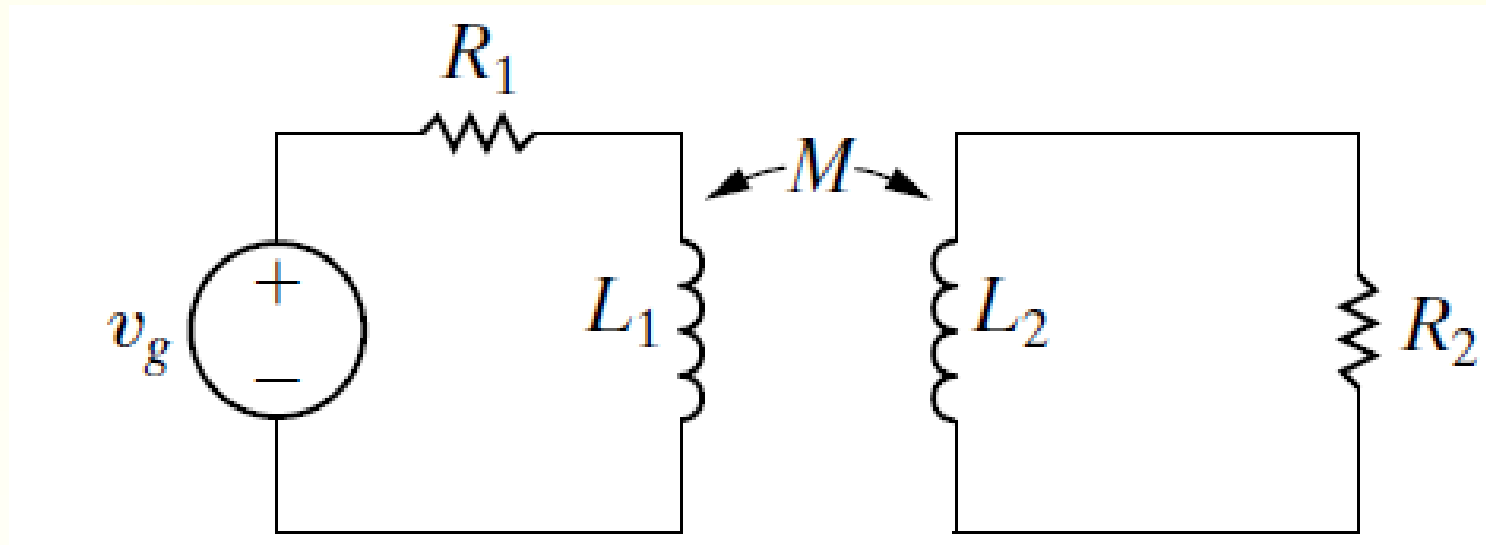
- Η ανεπιθύμητη μαγνητική επαγωγή μάς αναγκάζει να παίρνουμε μέτρα όπως:



- Επίσης όμως μάς επιτρέπει να την εκμεταλλευτούμε για τη μεταφορά ενέργειας μεταξύ τμημάτων τού κυκλώματος
- Αυτό το καταφέρνουμε «συλλαμβάνοντας» τη μαγνητική ροή και οδηγώντας τη μέσα από ένα δρόμο με τις ελάχιστες δυνατές απώλειες (και παρενέργειες)

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ (MUTUAL INDUCTANCE)

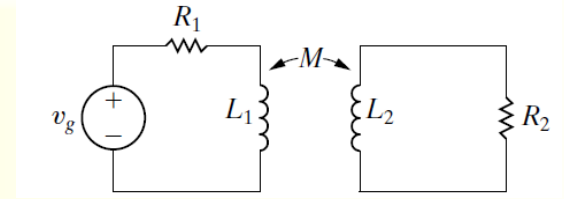
- **Επαγωγή:** η σύνδεση μιας τάσης με ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα
- Η σύνδεση μιας τάσης με ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα στο **ίδιο** στοιχείο καλείται **αυτεπαγωγή** (ο γνωστός μας επαγωγός/πηνίο)
- Αν η τάση εμφανίζεται σε **άλλο** στοιχείο ή κύκλωμα τότε υπάρχει **αμοιβαία επαγωγή** (και σημειώνεται με ένα βέλος που συνδέει τα εμπλεκόμενα στοιχεία/πηνία γιατί στο κύκλωμα μπορεί να υπάρχουν και αυτεπαγωγές)



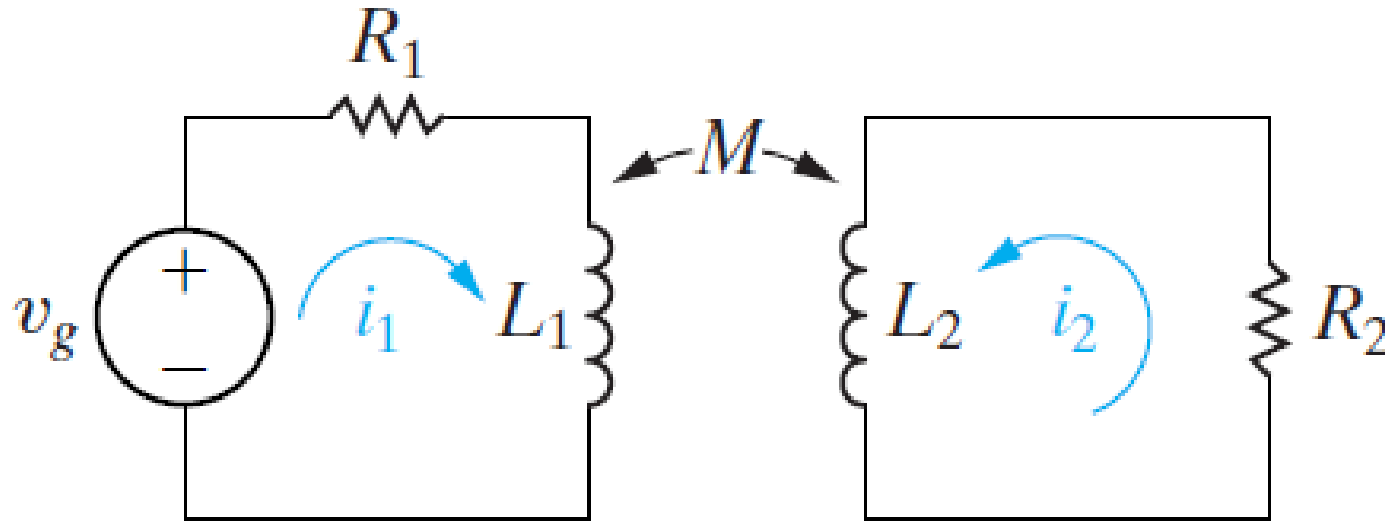
Έμμεσα υποθέσαμε
συμμετρία
στην αμοιβαιότητα

M : συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ (MUTUAL INDUCTANCE)



- Σε κάθε επαγωγό/πηνίο που εμπλέκεται σε αμοιβαία επαγωγή, θα αναπτυχθεί μια επιπλέον τάση (εξ αιτίας τής λειτουργίας του άλλου εμπλεκόμενου πηνίου):



Στο αριστερό πηνίο:

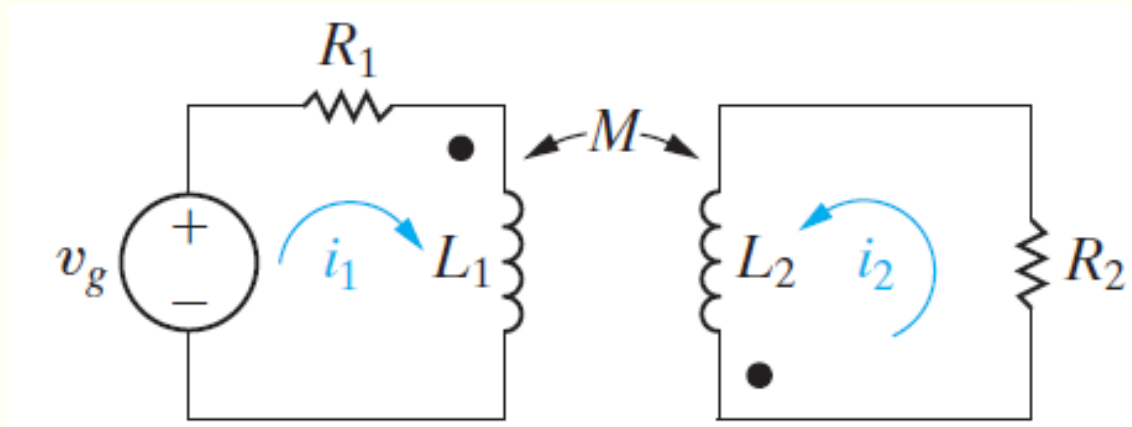
$$L_1 \frac{di_1}{dt} \quad M \frac{di_2}{dt}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} \quad M \frac{di_1}{dt}$$

Πολικότητες;;;

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ (MUTUAL INDUCTANCE)

- Η πολικότητα της **αυτεπαγόμενης τάσης** ακολουθεί τον γνωστό κανόνα πολικότητας και φοράς ρεύματος
- Η πολικότητα της **αμοιβαία επαγόμενης τάσης** εξαρτάται από τον τρόπο **κατασκευής** των δυο πηνίων που πρέπει να είναι γνωστός και σημειωμένος
- Για να συμπεραίνουμε πάντα σωστά την πολικότητα της τάσης που επάγεται, χρειαζόμαστε ακόμα μια σύμβαση, τη **σύμβαση της τελείας** (dot notation)

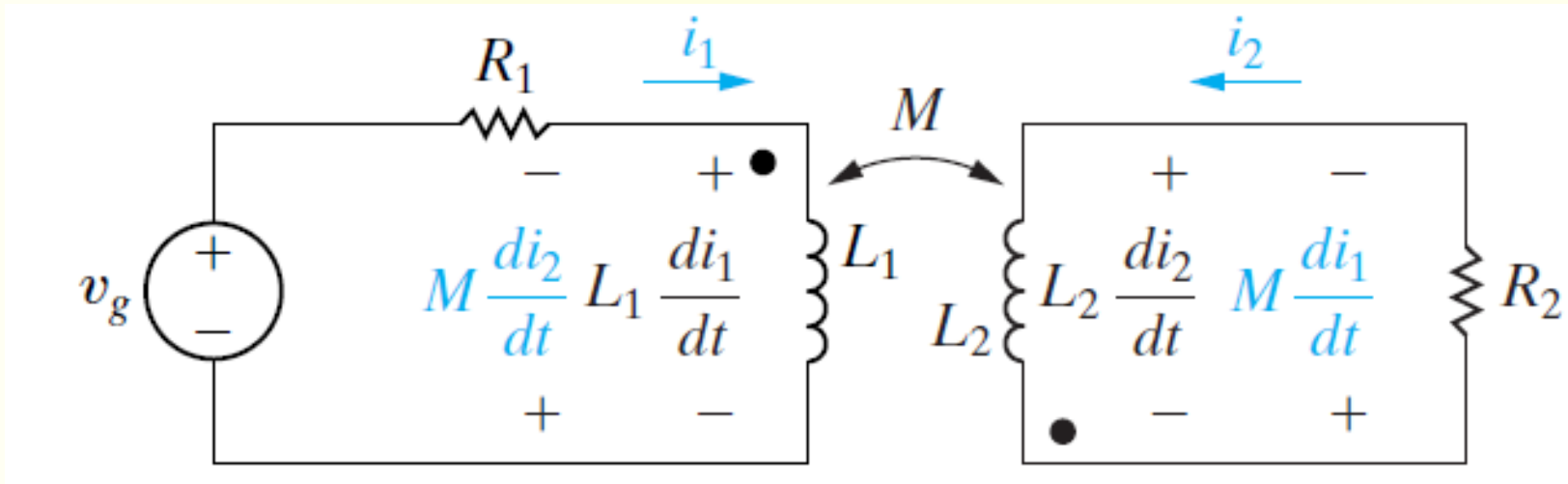


Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ

- Όταν το ρεύμα αναφοράς i_1 εισέρχεται από τον ακροδέκτη με την τελεία, τότε η πολικότητα της τάσης που δημιουργεί είναι θετική στον ακροδέκτη με την τελεία

Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ

- Όταν το ρεύμα αναφοράς i_1 εισέρχεται από τον ακροδέκτη με την τελεία, τότε η πολικότητα της τάσης που δημιουργεί είναι θετική στον ακροδέκτη με την τελεία



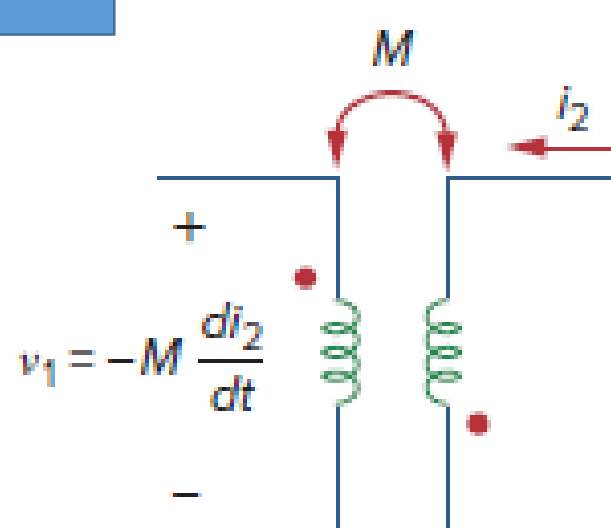
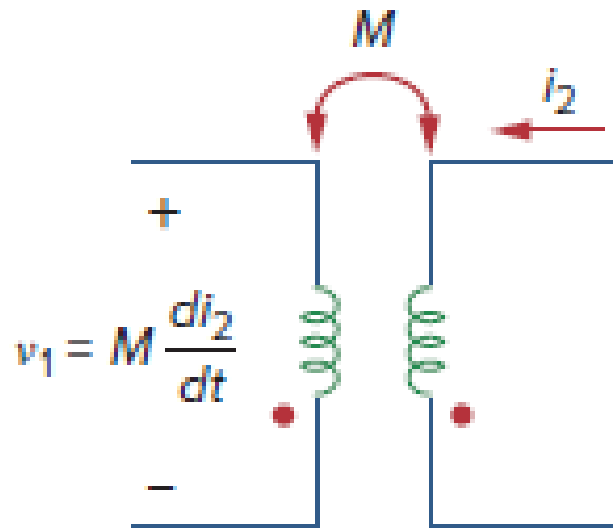
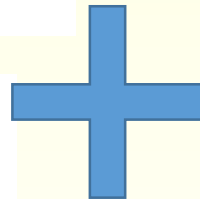
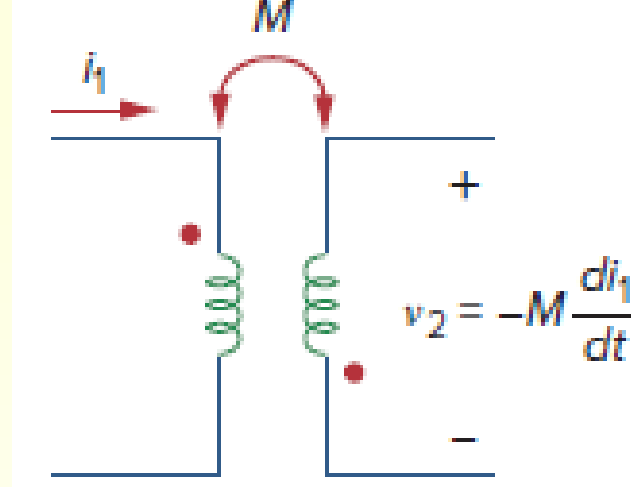
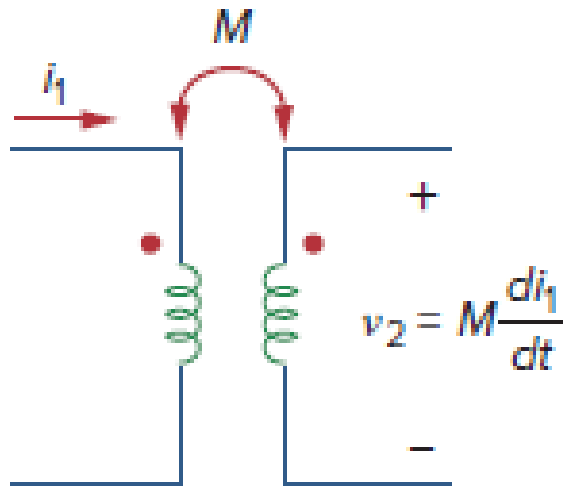
Στον αριστερό βρόχο:

$$-v_g + i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

Στον δεξιό βρόχο:

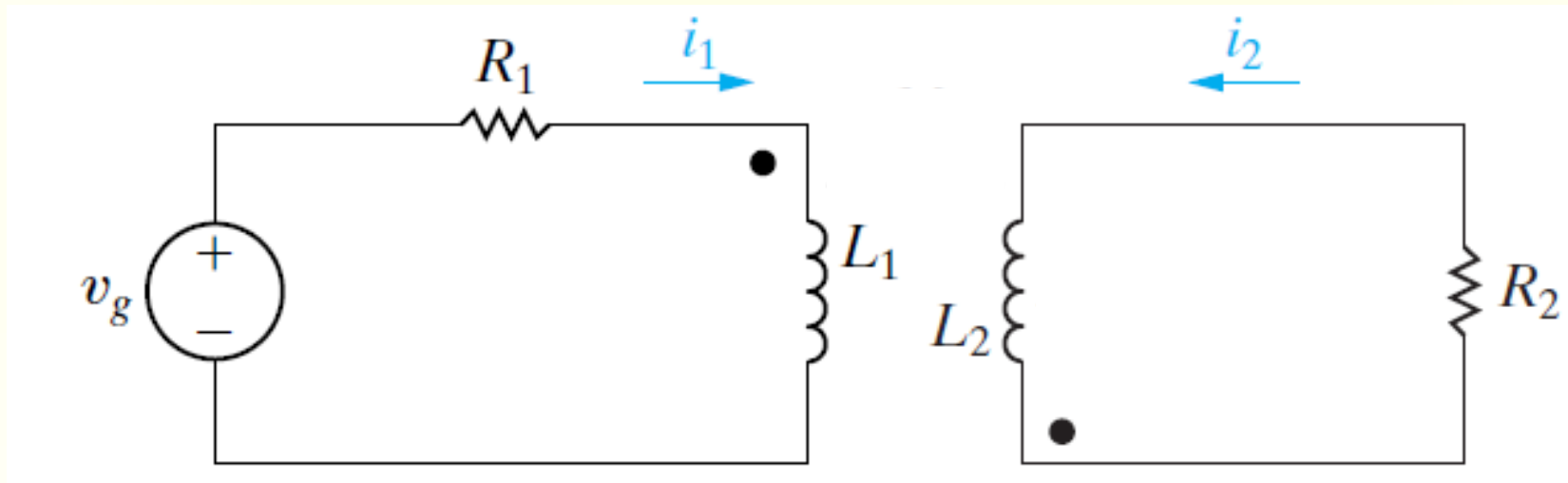
$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0$$

Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ



Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ

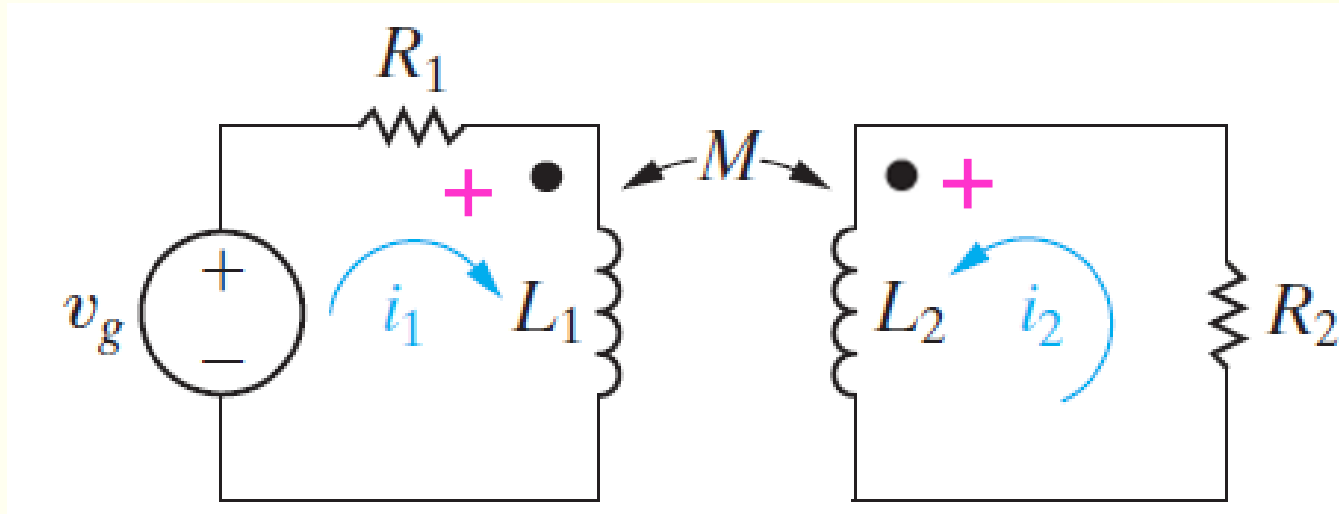
- Το πρόσημο της αμοιβαίας επαγωγής M μπορεί να προκύψει από έναν απλό κανόνα:
 - Όταν και τα δυο ρεύματα μπαίνουν ή και τα δυο βγαίνουν από την τελεία, τότε $M > 0$
 - Αν το ένα ρεύμα μπαίνει και το άλλο βγαίνει, τότε $M < 0$



$$-v_g + i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

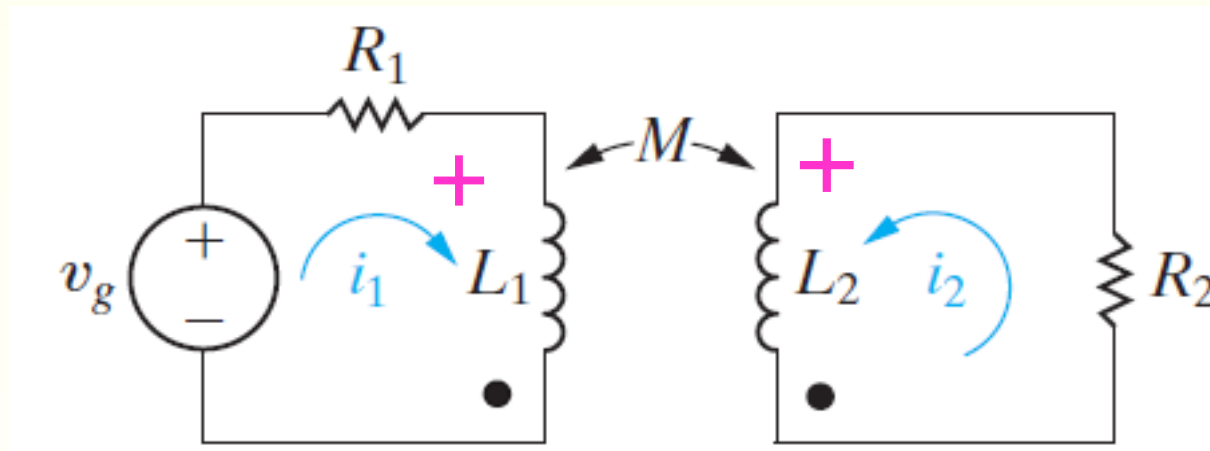
$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0$$

Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ

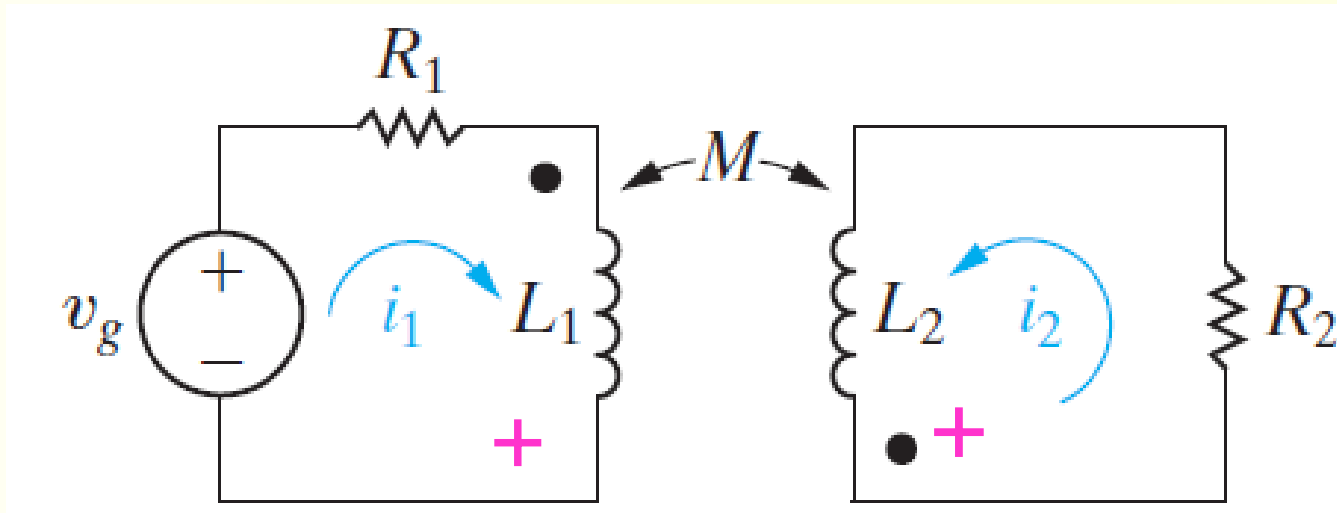


$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

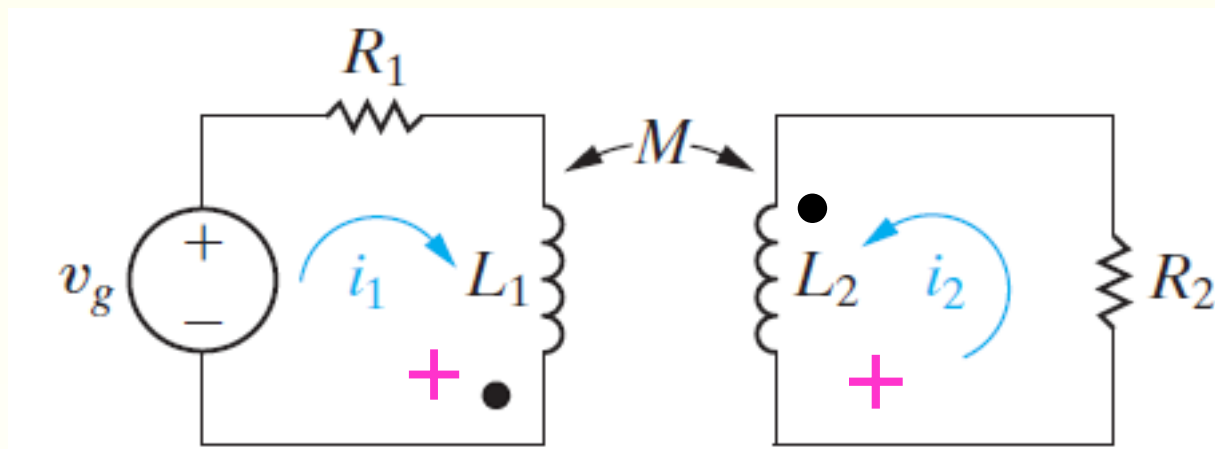


Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ

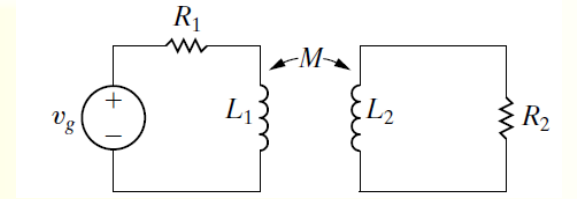


$$L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

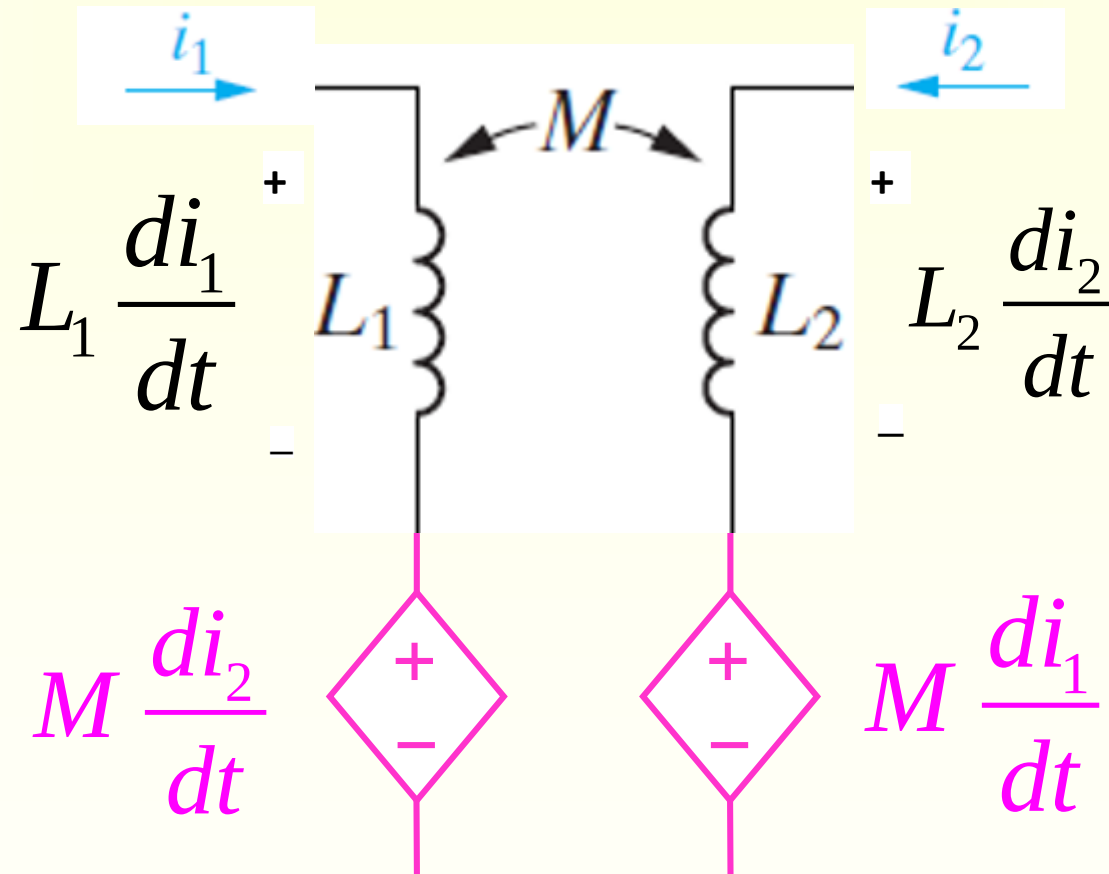
$$L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ-ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ



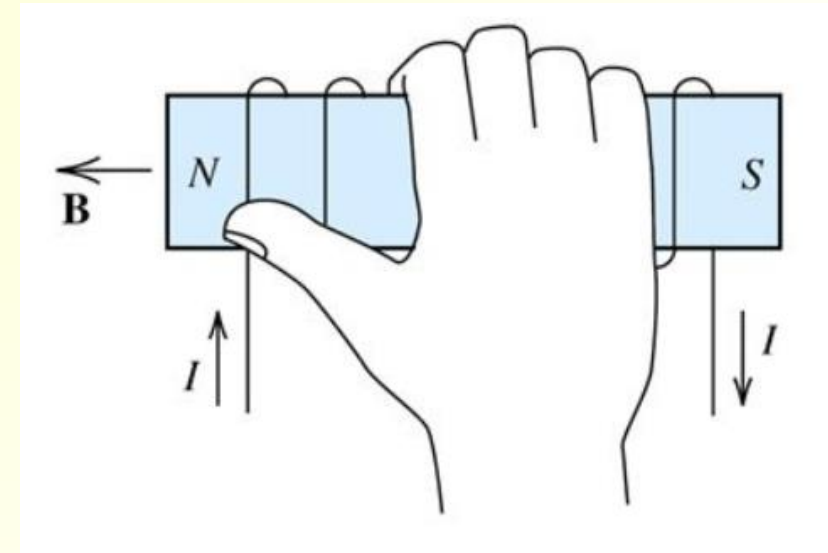
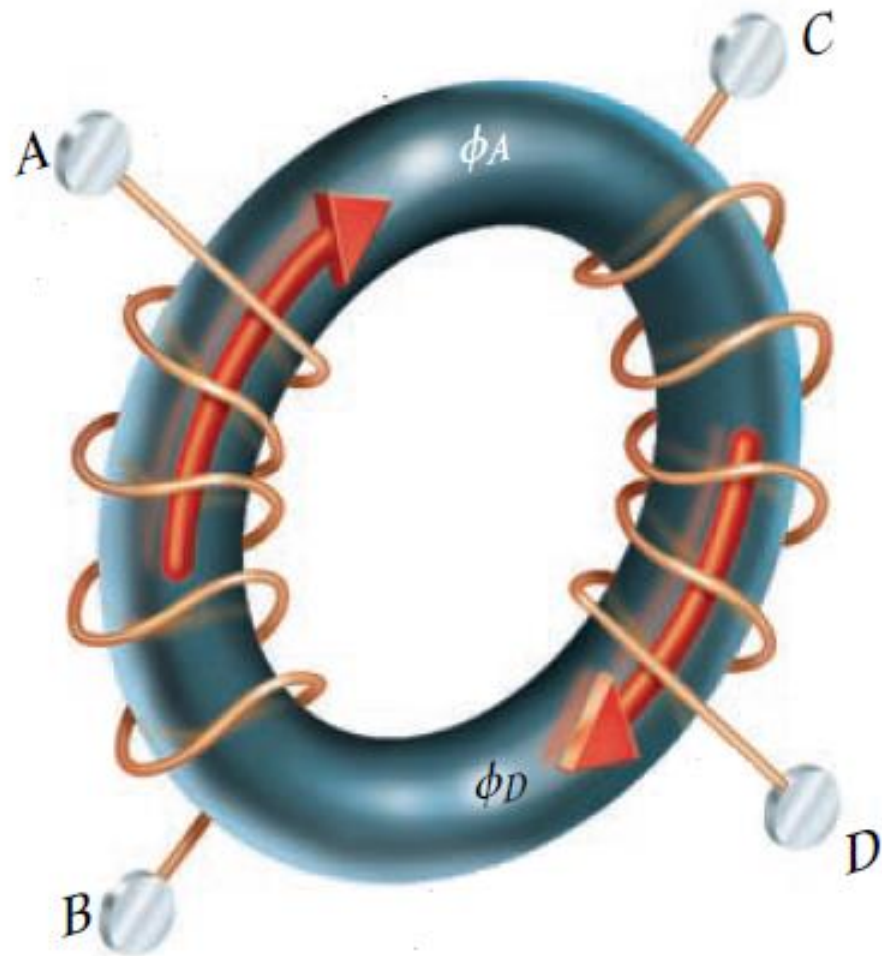
- Σε κάθε επαγωγό/πηνίο που εμπλέκεται σε αμοιβαία επαγωγή, θα αναπτυχθεί **μια επιπλέον τάση**



Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ

- Είναι **ΑΔΥΝΑΤΟ** να αναλύσουμε ένα σύστημα αμοιβαίας επαγωγής αν δεν γνωρίζουμε **ΚΑΙ** τις φορές των ρευμάτων **ΚΑΙ** τις τελείες στα εμπλεκόμενα πηνία

Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ



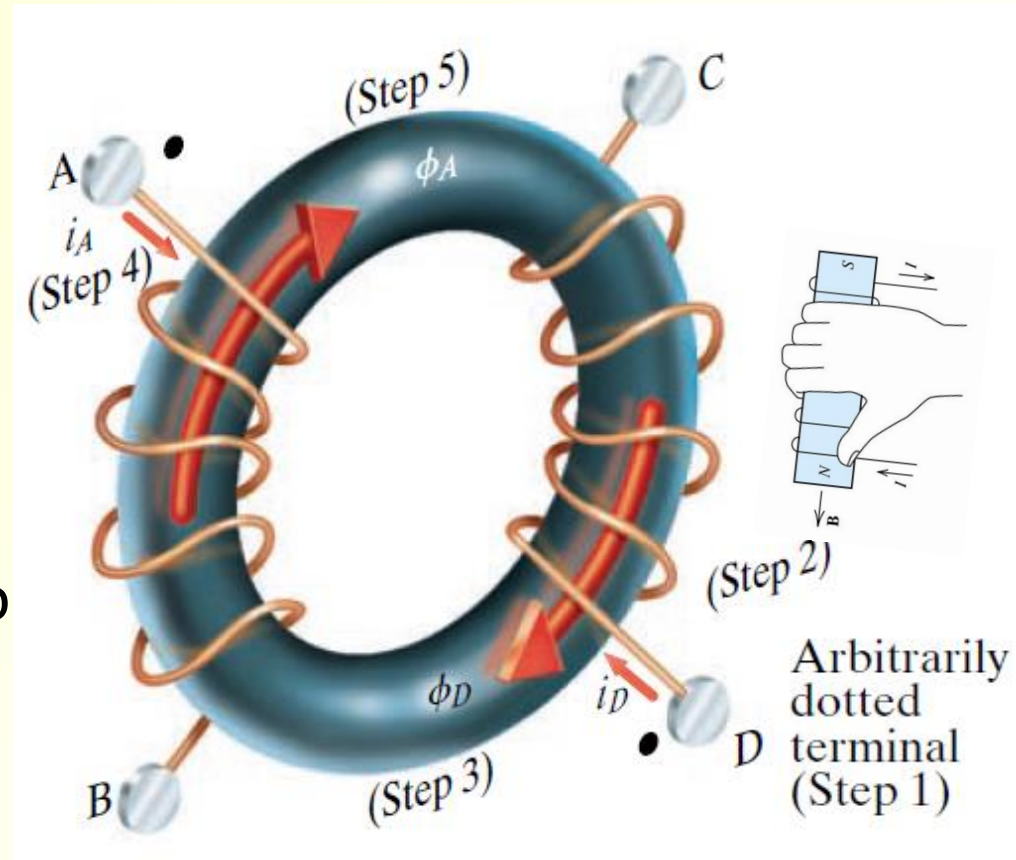
ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Κανόνας τού δεξιού χεριού

- Η θέση τής τελείας μπορεί να προσδιοριστεί με μια διαδικασία:

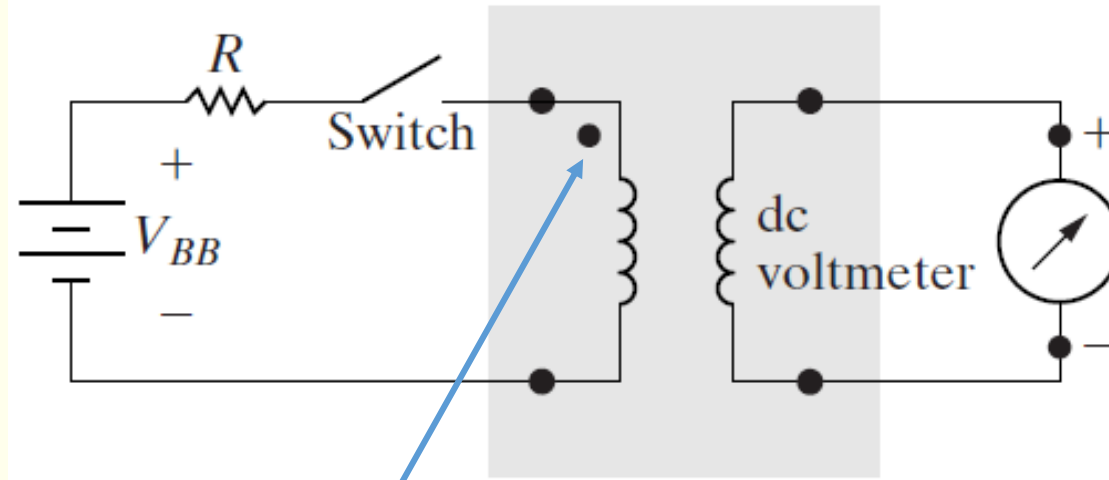
Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ

- Η διαδικασία:
 1. Αυθαίρετα επιλέγουμε έναν ακροδέκτη ενός πηνίου και βάζουμε την τελεία, εδώ το D
 2. Θέτουμε αυθαίρετα ένα ρεύμα i_D
 3. Βρίσκουμε την κατεύθυνση της μαγνητικής ροής ϕ_D που δημιουργεί το i_D εντός τού πυρήνα
 4. Αυθαίρετα επιλέγουμε έναν ακροδέκτη στο άλλο πηνίο και βάζουμε την τελεία και θέτουμε ένα ρεύμα να εισέρχεται, εδώ το i_A
 5. Βρίσκουμε την κατεύθυνση της μαγνητικής ροής ϕ_A που δημιουργεί το i_A εντός τού πυρήνα
- Συγκρίνουμε τις κατευθύνσεις των ροών και αν έχουν την ίδια κατεύθυνση βάζουμε την τελεία εκεί που εισέρχεται το ρεύμα στο δεύτερο πηνίο (i_A)
- Αν έχουν αντίθετες κατευθύνσεις βάζουμε την τελεία στον ακροδέκτη όπου εξέρχεται το ρεύμα



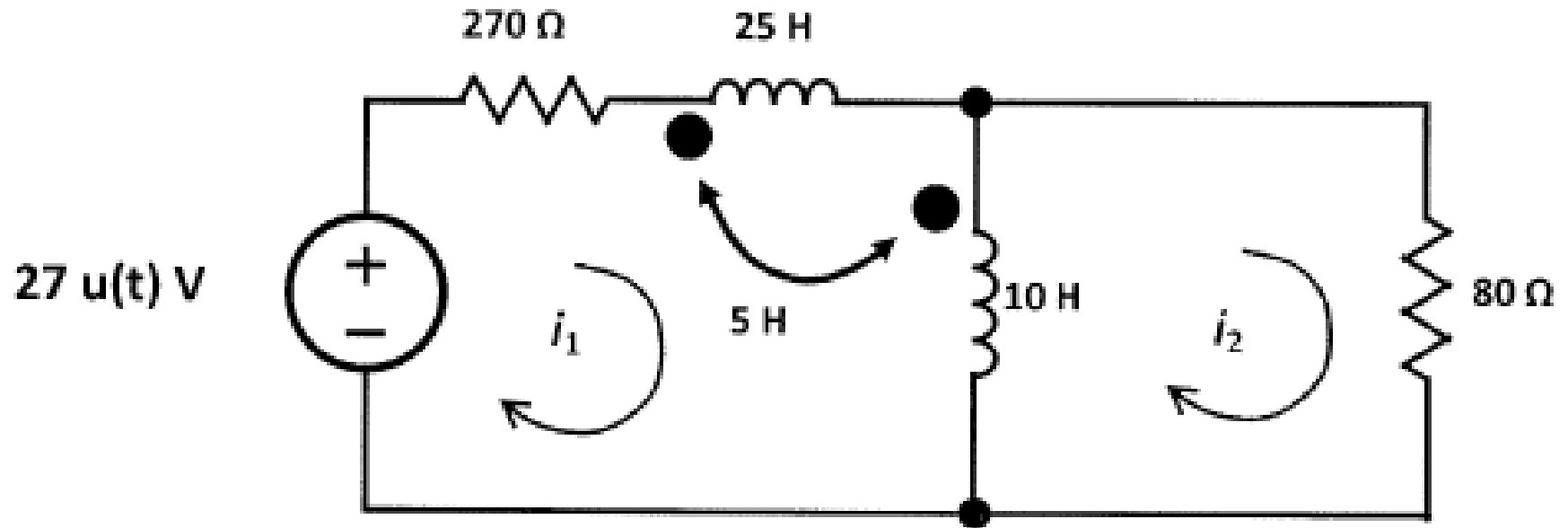
Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ-ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ

- Οι τελείες μπορούν να προσδιοριστούν «ηλεκτρολογικά» με τη διάταξη:



- Τοποθετούμε τη μια τελεία στο σημείο που το αριστερό πηνίο συνδέεται με τον θετικό πόλο της πηγής
- Κλείνουμε τον διακόπτη
- Αν το βολτόμετρο δείξει θετικές τιμές, η δεύτερη τελεία μπαίνει στον ακροδέκτη του δεξιού πηνίου που συνδέεται με το θετικό ηλεκτρόδιο του βολτομέτρου
- Αν το βολτόμετρο δείξει αρνητικές τιμές, η δεύτερη τελεία μπαίνει στον ακροδέκτη του δεξιού πηνίου που συνδέεται με το αρνητικό ηλεκτρόδιο του βολτομέτρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$$270i_1 + 25 \frac{di_1}{dt} + 5 \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + 10 \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + 5 \frac{di_1}{dt} = 27u(t)$$

$$80i_2 + 10 \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} - 5 \frac{di_1}{dt} = 0$$

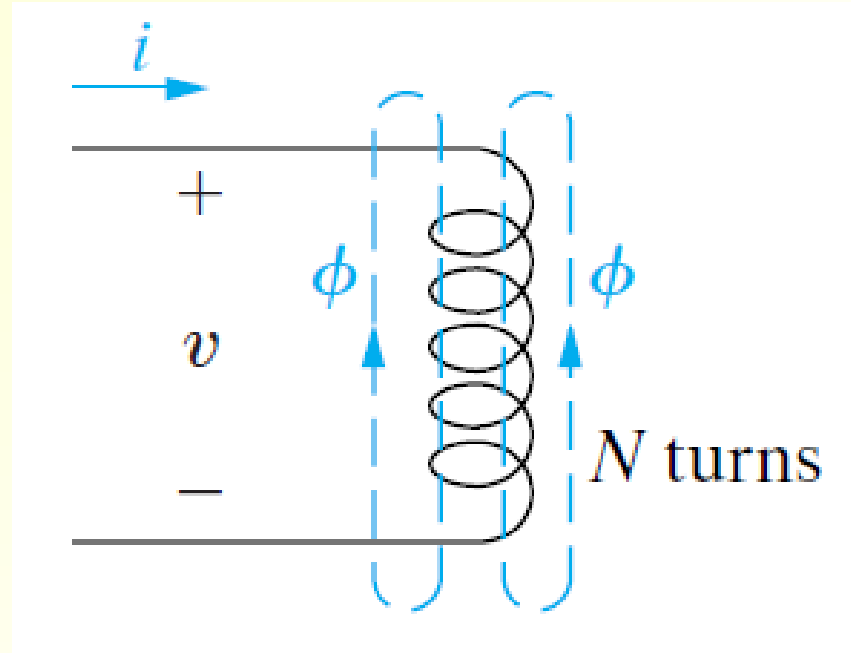
ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Επαγωγός με N σπείρες
- Νόμος Faraday

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

λ : πεπλεγμένη ροή [weber-turns]

$$\lambda = N\phi$$



ϕ : μαγνητική ροή [Wb], N : αριθμός σπειρών

$$\phi = \mathcal{P}Ni$$

$\mathcal{P}$: (μαγνητική) διαπερατότητα (permeance), i : ρεύμα

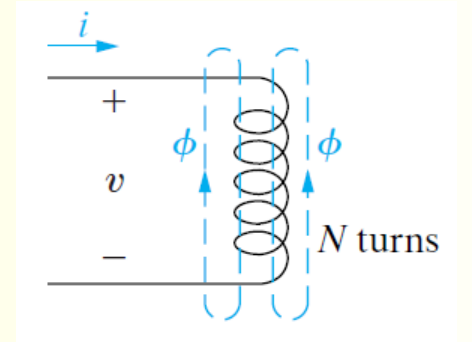
ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Υποθέτοντας μη μαγνητικό περιβάλλον (ώστε η διαπερατότητα να είναι σταθερή):

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(N\phi)}{dt}$$

$$= N \frac{d\phi}{dt} = N \frac{d}{dt}(\mathcal{P}Ni)$$

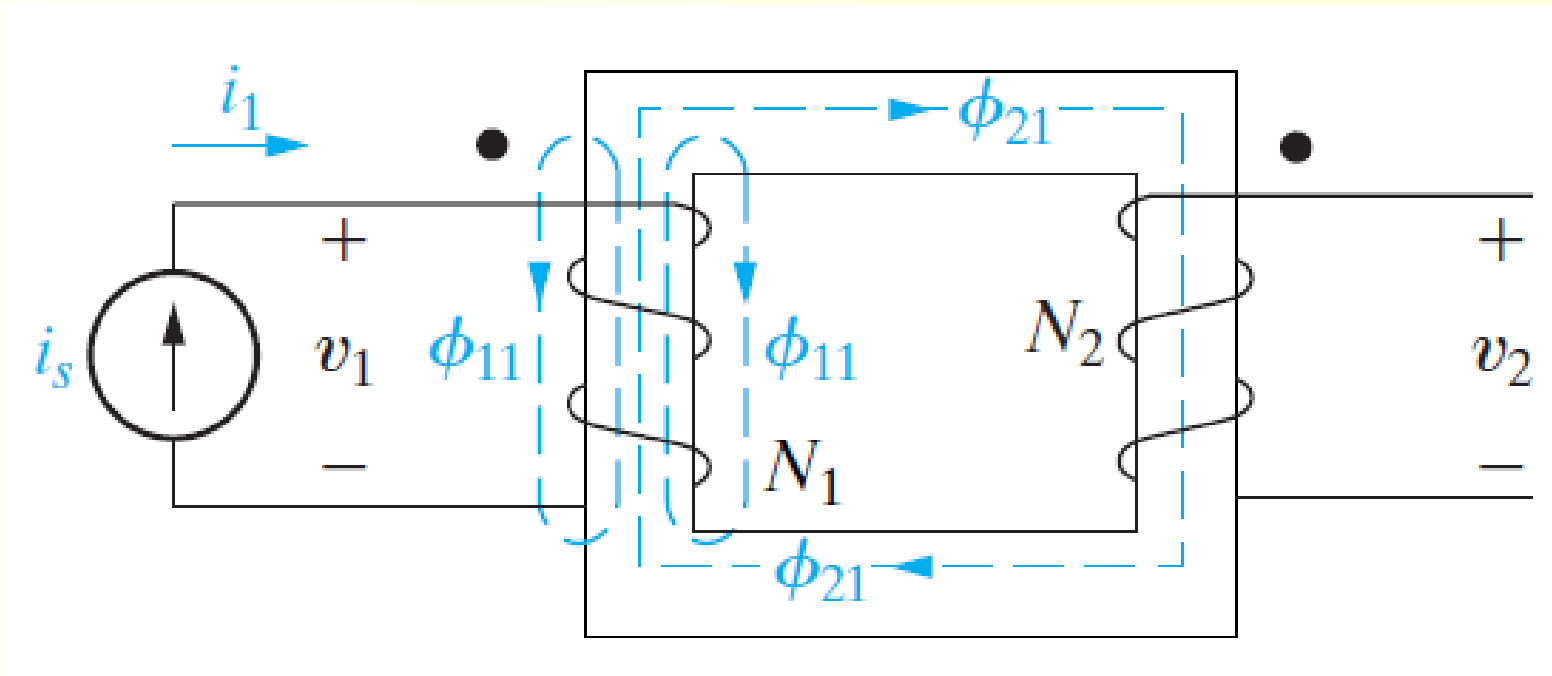
$$= N^2 \mathcal{P} \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



Η (αυτ)επαγωγή είναι
ανάλογη του
τετραγώνου του
αριθμού των σπειρών

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Το πηνίο 1 διεγείρεται από ρεύμα που δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο οποίο αποθηκεύεται ενέργεια (με ρυθμό $v_1 \cdot i_1$)



Η ροή ϕ_{21} (που παράγεται από το ρεύμα i_1) εμπλέκει τις N_2 σπείρες τού πηνίου 2 με τις N_1 σπείρες τού πηνίου 1

- Η συνολική ροή ϕ_1 για το πηνίο 1 μπορεί να διαχωριστεί σαν

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Σύμφωνα με τα προηγούμενα

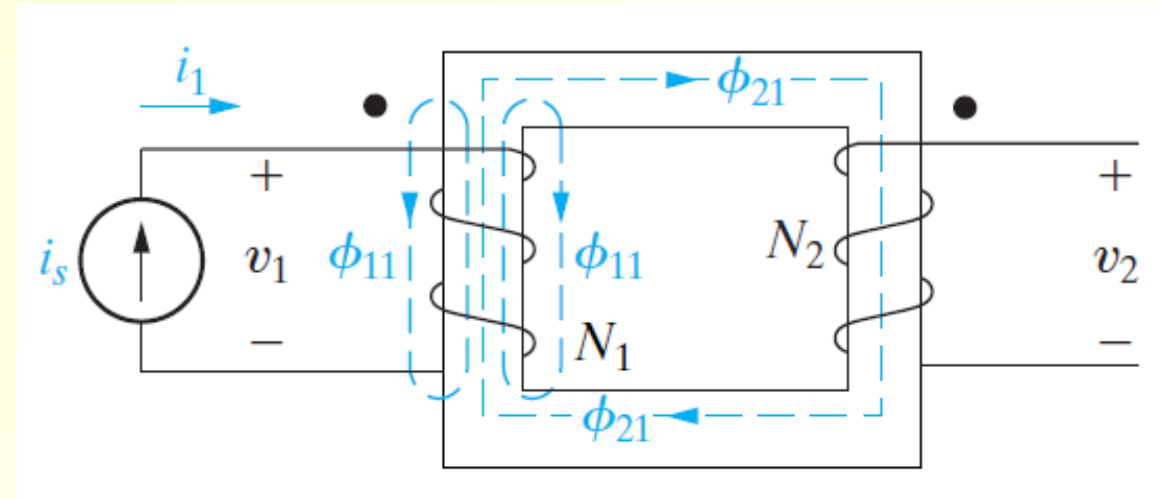
$$\phi_1 = \mathcal{P}_1 N_1 i_1$$

$$\phi_{11} = \mathcal{P}_{11} N_1 i_1$$

$$\phi_{21} = \mathcal{P}_{21} N_1 i_1$$

- Συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21}$$



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

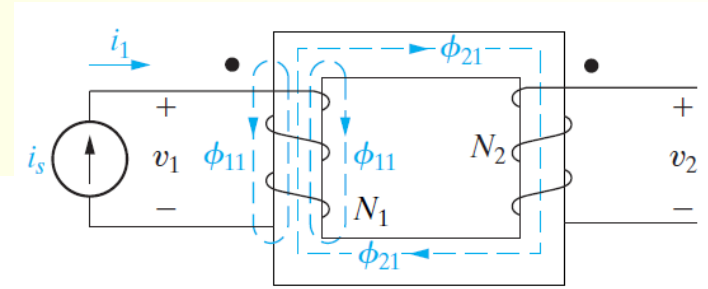
- Οπότε

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d(N_1\phi_1)}{dt} = N_1 \frac{d}{dt}(\phi_{11} + \phi_{21}) \\&= N_1^2(\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21}) \frac{di_1}{dt} = N_1^2 \mathcal{P}_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_2 &= \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d(N_2\phi_{21})}{dt} = N_2 \frac{d}{dt}(\mathcal{P}_{21}N_1i_1) \\&= N_2N_1\mathcal{P}_{21} \frac{di_1}{dt}\end{aligned}$$

- Και συμπεραίνουμε ότι

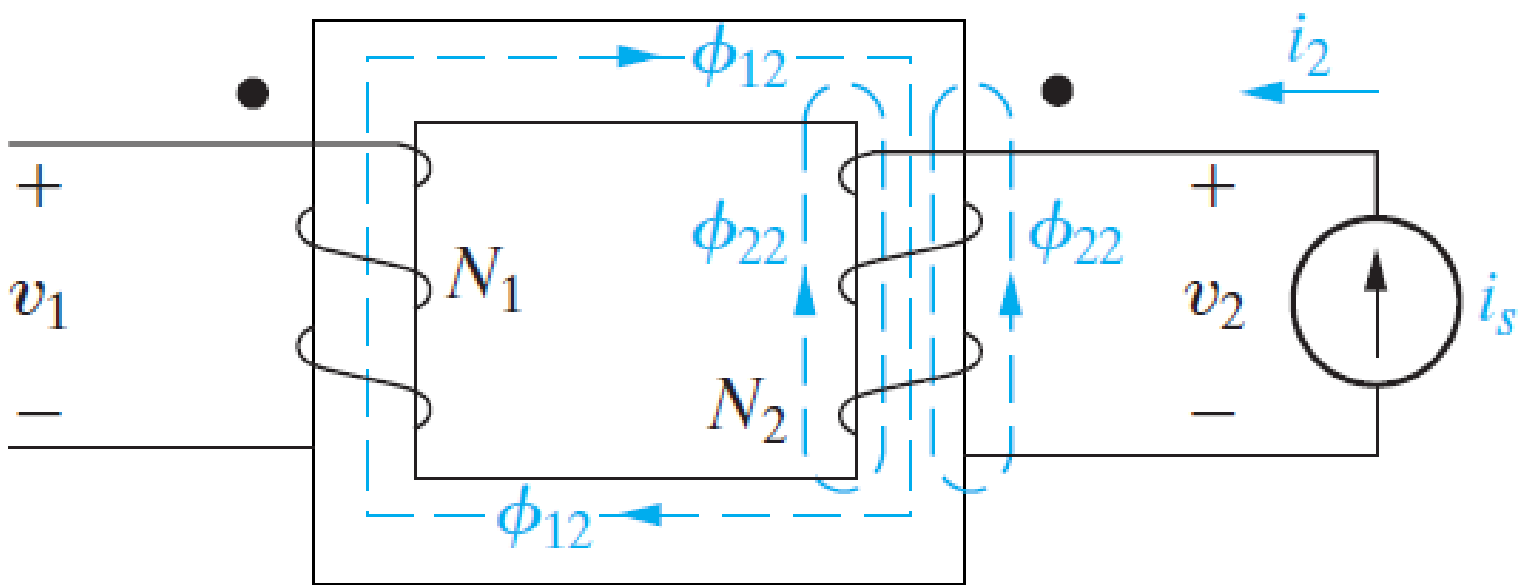
$$M_{21} = N_2N_1\mathcal{P}_{21}$$



$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Τώρα, το πηνίο 2 διεγείρεται από ρεύμα που δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο οποίο αποθηκεύεται ενέργεια (με ρυθμό $v_2 \cdot i_2$)



Η ροή ϕ_{12} (που παράγεται από το ρεύμα i_2) εμπλέκει τις N_1 σπείρες τού πηνίου 1 με τις N_2 σπείρες τού πηνίου 2

- Η συνολική ροή ϕ_2 για το πηνίο 2 μπορεί να διαχωριστεί σαν

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Κλπ. για να καταλήξουμε ότι

$$M_{12} = N_1 N_2 \mathcal{P}_{12}$$

- Θυμόμαστε ότι

$$M_{21} = N_2 N_1 \mathcal{P}_{21}$$

- Αν ο χώρος περιέχει μόνο **μη μαγνητικά υλικά**, τότε οι διαπερατότητες είναι ίσες και μπορούμε να γράψουμε

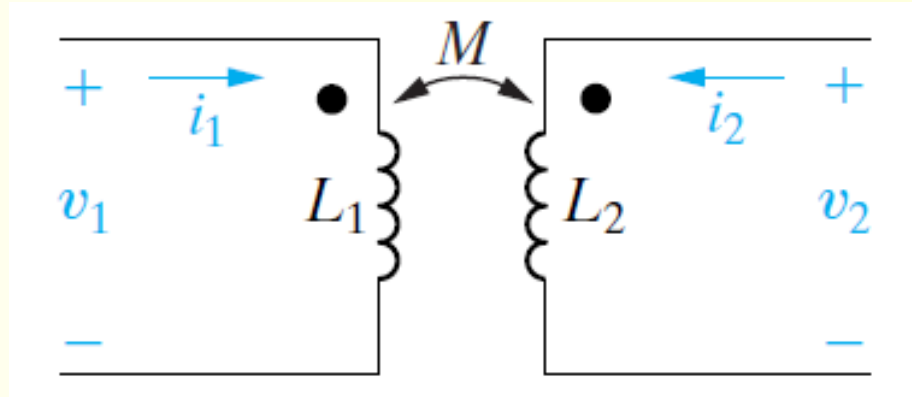
$$M_{12} = M_{21} = M$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

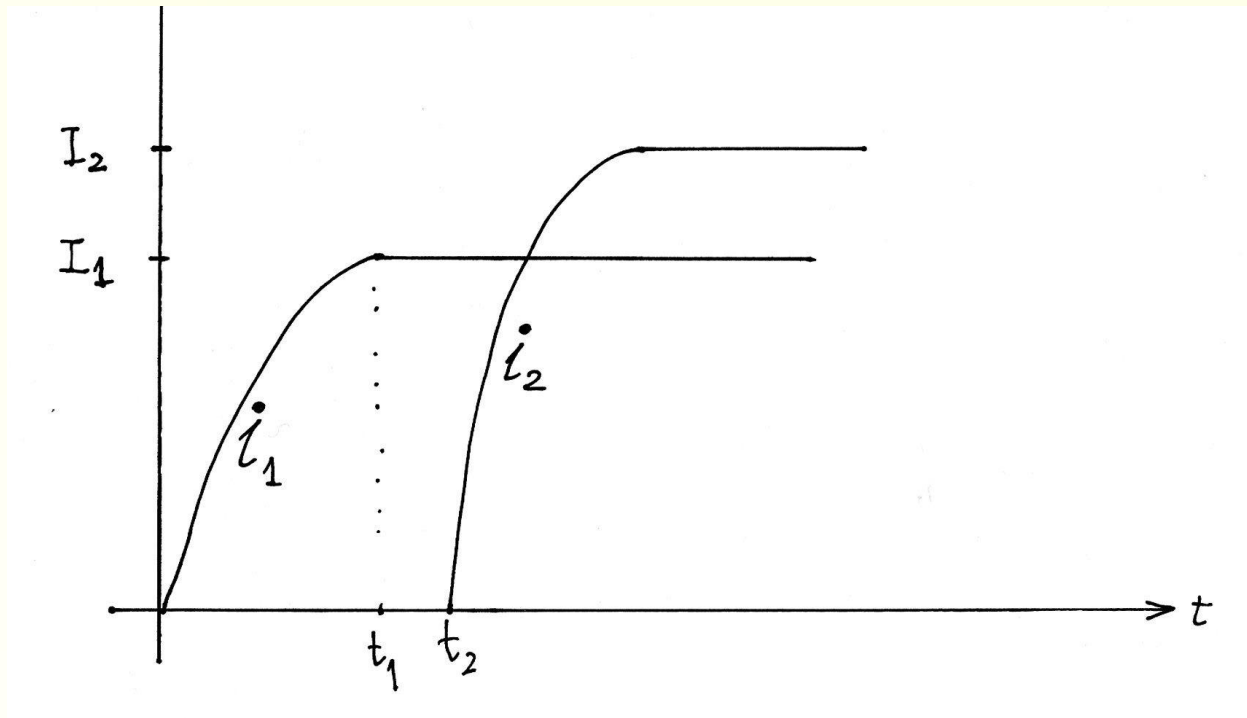
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Για γραμμικά κυκλώματα με μόνο δυο συζευγμένα πηνία (η σύζευξη με μη μαγνητικά υλικά) δεν χρειάζεται να βάζουμε δείκτες στον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής

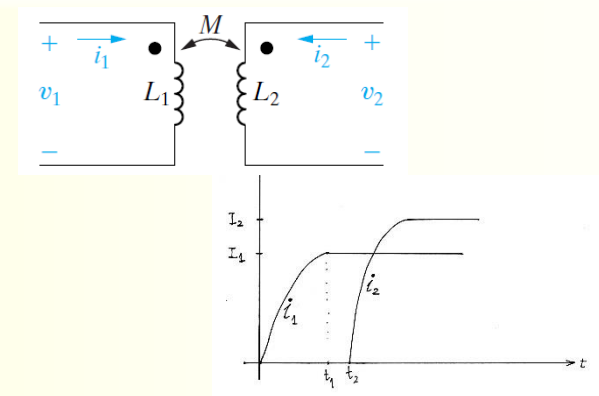
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ



- Στο κύκλωμα αυτό εφαρμόζουμε το «σενάριο» διέγερσης



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ



- Σύμφωνα με το «σενάριο» διέγερσης, το πηνίο 2 παραμένει ανενεργό και η αποθηκευμένη ενέργεια στον χρόνο t_2 θα οφείλεται μόνο στη λειτουργία του πηνίου 1 και θα είναι

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

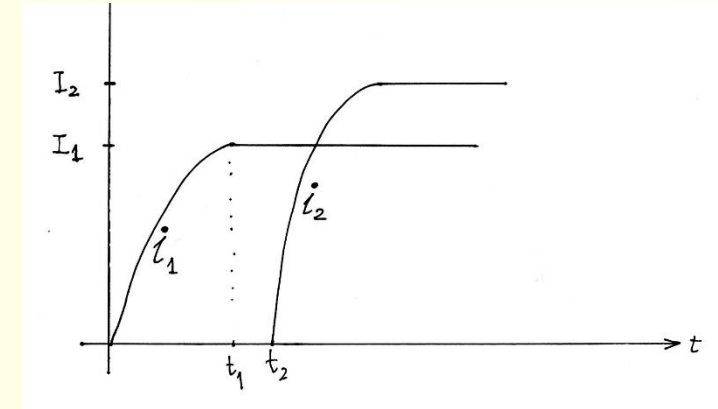
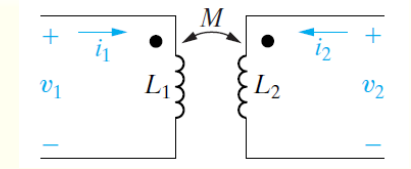
- Μετά τον χρόνο t_2 και όσο μεταβάλλεται το ρεύμα i_2 το πηνίο 1 δεν συνεισφέρει τάση στο πηνίο 2 (επειδή το I_1 είναι σταθερό) αλλά δέχεται τάση από το πηνίο 2, οπότε η ισχύς θα είναι

$$p = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 v_2$$

- και η ενέργεια στο πηνίο 2

$$\int_{W_1}^W dw = \int_0^{I_2} I_1 M_{12} di_2 + \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

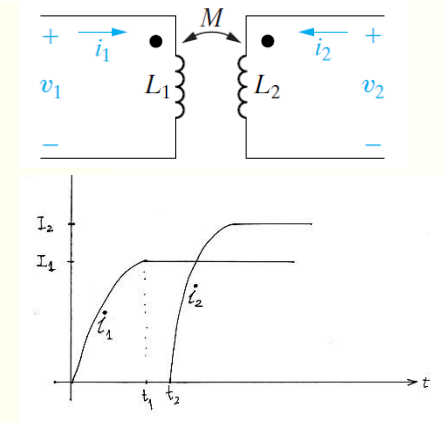


- Συνολικά λοιπόν και μετά τη σταθεροποίηση και του i_2 η ενέργεια θα είναι

$$W = W_1 + I_1 I_2 M_{12} + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + I_1 I_2 M_{12}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

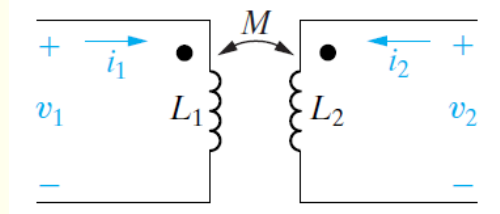
- Επαναλαμβάνουμε την όλη διαδικασία αλλά τώρα εναλλάσσουμε τη σειρά με την οποία εφαρμόζουμε τα ρεύματα: αρχίζουμε από το i_2 και συνεχίζουμε με το i_1



- Θα πάρουμε τώρα

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + I_1 I_2 M_{21}$$


ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ



- Δεχόμενοι τις παραδοχές περί γραμμικότητας και μη μαγνητικών υλικών θα πάρουμε τελικά για την ενέργεια του συστήματος συζευγμένων πηνίων

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

- **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Η παραπάνω ανάλυση έγινε για το συγκεκριμένο κύκλωμα όπου $M > 0$
- Το πρόσημο του M θα καθοριστεί από τις θέσεις των τελειών και τις φορές των ρευμάτων, όπως πάντα:

$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ

- Το σύστημα συζευγμένων πηνίων είναι ένα παθητικό κύκλωμα, άρα η ενέργειά του πρέπει να είναι πάντα μη αρνητική
- Από τον τύπο για την ενέργεια και για τη χειρότερη δυνατή περίπτωση ($M < 0$):

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 = 0$$

- Με λίγη άλγεβρα

$$\left(\sqrt{\frac{L_1}{2}} i_1 - \sqrt{\frac{L_2}{2}} i_2 \right)^2 + i_1 i_2 \left(\sqrt{L_1 L_2} - M \right) = 0$$

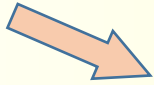
- Οπότε, απαραίτητη αναγκαία συνθήκη

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M$$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ

- Η αναγκαία συνθήκη μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός συντελεστή:

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M$$



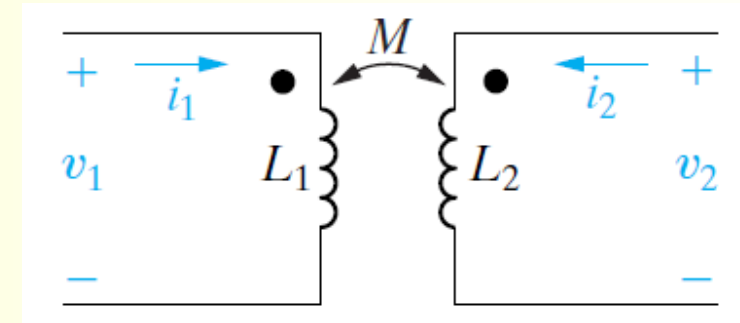
$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

- Ο **συντελεστής σύζευξης** (coupling coefficient) k ποσοτικοποιεί το ποσοστό της μαγνητικής ροής που δημιουργεί τη σύζευξη με το άλλο πηνίο, π.χ.

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{12}}{\phi_{11} + \phi_{12}}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ - ΑΝΑΛΥΣΗ

- Η κυκλωματική ανάλυση του συστήματος συζευγμένων πηνίων μπορεί να βασιστεί στη σχέση ρεύματος και μαγνητικής ροής



$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= L_1 i_1(t) + M i_2(t) \\ \varphi_2(t) &= M i_1(t) + L_2 i_2(t)\end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & \pm M \\ \pm M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{L} \mathbf{i}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ
ΕΠΑΓΩΓΩΝ

- Θα έχουμε τώρα

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d \boldsymbol{\varphi}(t)}{dt} = \mathbf{L} \frac{d \mathbf{i}(t)}{dt}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ - ΑΝΑΛΥΣΗ

- Οπότε θα ισχύει

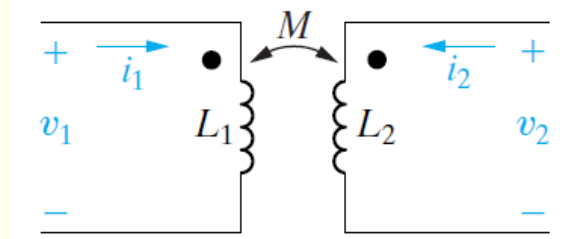
$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{L}^{-1} \int \mathbf{v} d\tau \triangleq \mathbf{\Gamma} \int \mathbf{v} dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i}$$

όπου

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{pmatrix} L_2 & \mp M \\ \mp M & L_1 \end{pmatrix}$$

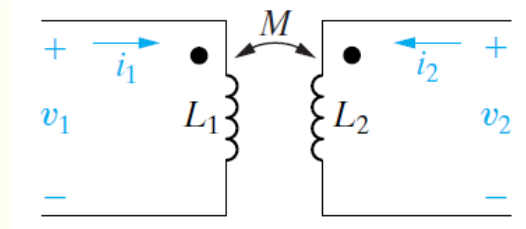
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ
ΠΙΝΑΚΑΣ
ΕΠΑΓΩΓΩΝ

- Και
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Περίπτωση αυτεπαγωγής:

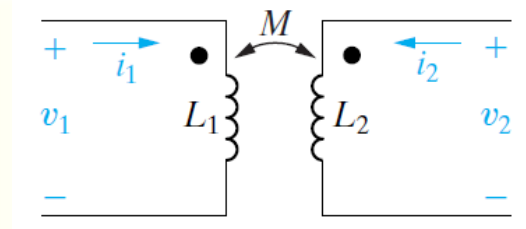


$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_m \\ \vdots \end{pmatrix} = \left(\dots + L_1 \frac{d}{dt} + \dots \right) \begin{pmatrix} \vdots \\ i_m \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ i_m \\ \vdots \end{pmatrix} = \left(\dots + \frac{1}{L_1} \int + \dots \right) \begin{pmatrix} \vdots \\ v_m \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Στοιχείο στη διαγώνιο

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

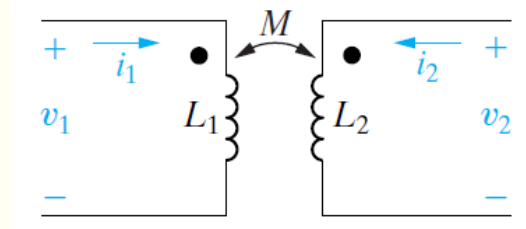


- Περίπτωση αμοιβαίας επαγωγής (σενάριο 1, βροχικές εντάσεις):

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \frac{d}{dt} & \pm M \frac{d}{dt} \\ \pm M \frac{d}{dt} & L_2 \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Περίπτωση αμοιβαίας επαγωγής (σενάριο 2):



$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & L_1 \frac{d}{dt} & \cdots & \pm M \frac{d}{dt} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \pm M \frac{d}{dt} & \cdots & L_2 \frac{d}{dt} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ i_j \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

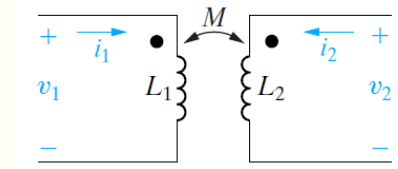
Στήλη j

Στήλη k

Γραμμή j

Γραμμή k

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ



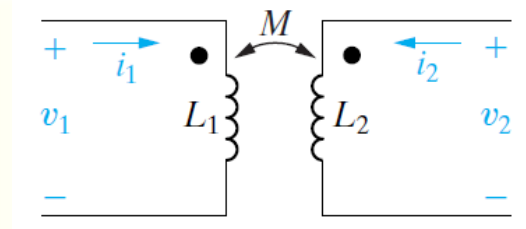
- Περίπτωση αμοιβαίας επαγωγής (σενάριο 3, στο πεδίο συχνότητας):

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{V}_j \\ \vdots \\ \mathbf{V}_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \xrightarrow{\text{Γραμμή } j} j\omega L_1 & \cdots & \pm j\omega M & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \xrightarrow{\text{Γραμμή } k} \pm j\omega M & \cdots & j\omega L_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_j \\ \vdots \\ \mathbf{I}_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

↓ Στήλη j
↓ Στήλη k

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Περίπτωση αμοιβαίας επαγωγής (σενάριο 4, κομβικές τάσεις):



$$\begin{pmatrix} \vdots \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} \int & \Gamma_{12} \int \\ \Gamma_{21} \int & \Gamma_{22} \int \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΥΚΟΛΙΑΣ

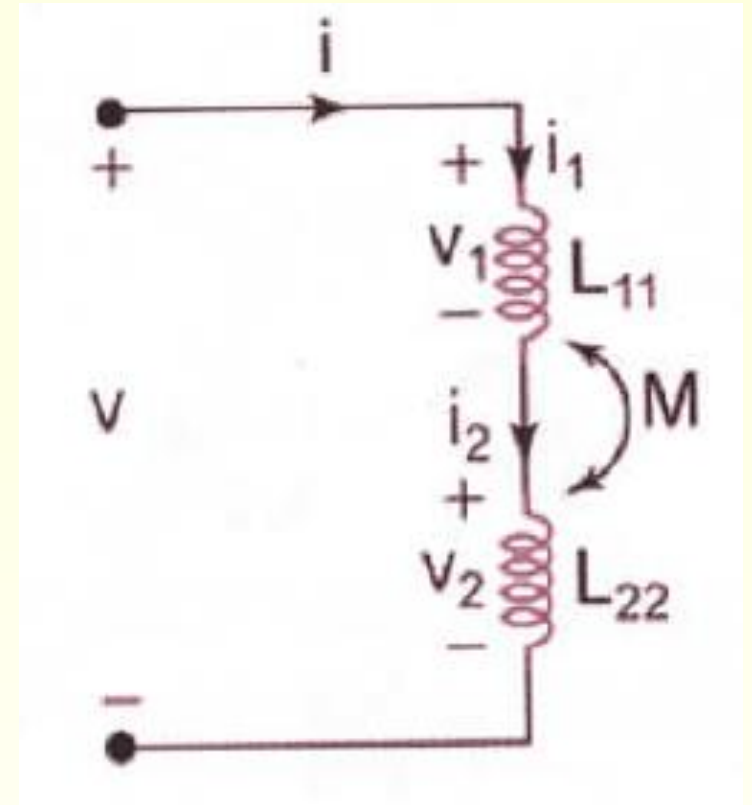
ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ ΠΗΝΙΑ ΣΕ ΣΕΙΡΑ

$$v = v_1 + v_2 \quad \varphi_1 = L_{11} i_1 \pm M i_2$$

$$i = i_1 = i_2 \quad \varphi_2 = L_{22} i_2 \pm M i_1$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt} \Rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

↑
Θεωρούμε τις αρχικές ροές = 0



- Συμπεραίνουμε:

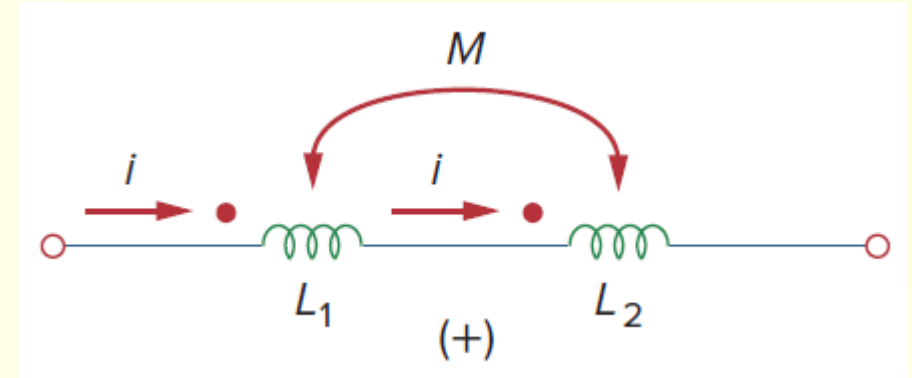
$$\varphi(t) = (L_{11} + L_{22} \pm 2M) i_1(t)$$

$$L_{\text{ισοδύναμο}} = L_{11} + L_{22} \pm 2M$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΥΚΟΛΙΑΣ

ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ ΠΗΝΙΑ ΣΕ ΣΕΙΡΑ

$$M > 0$$

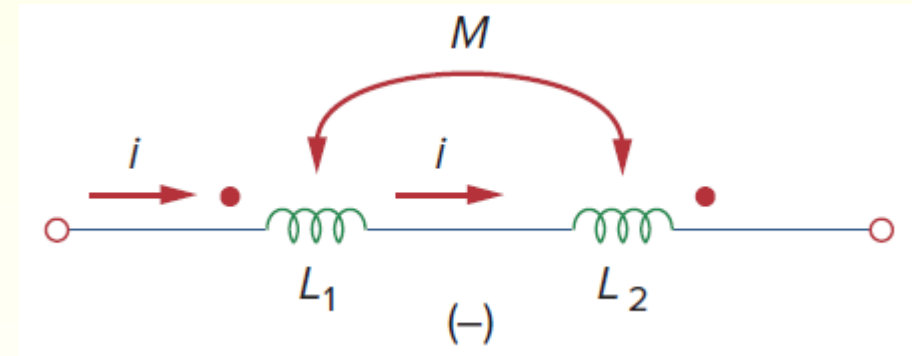


$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

- Πρέπει

$$L_{\text{ισοδύναμο}} > 0 \Rightarrow M \leq \frac{L_{11} + L_{22}}{2}$$

$$M < 0$$



$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΥΚΟΛΙΑΣ

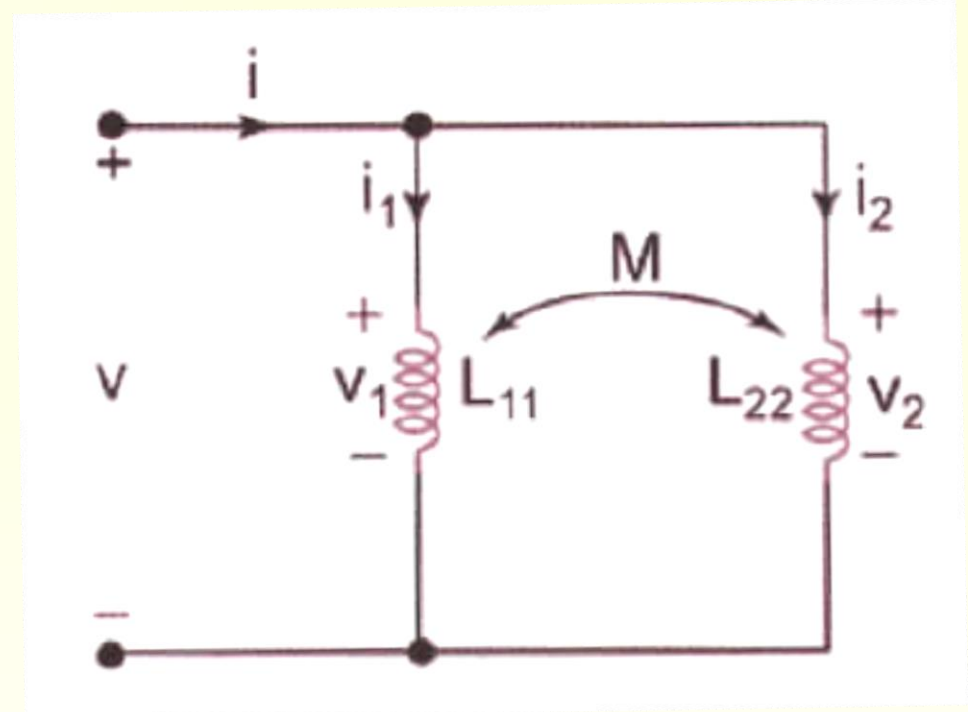
ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ ΠΗΝΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ

$$i = i_1 + i_2 \quad i_1 = \Gamma_{11} \varphi_1 \pm \Gamma_{12} \varphi_2$$

$$v = v_1 = v_2 \quad i_2 = \Gamma_{21} \varphi_1 \pm \Gamma_{22} \varphi_2$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} \Rightarrow \varphi = \varphi_1 = \varphi_2$$

↑ Θεωρούμε τις αρχικές ροές = 0



↓ Λόγω συμμετρίας

• Συμπεραίνουμε: $i(t) = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})\varphi(t)$

$$\Gamma_{\text{ισοδύναμο}} = \frac{L_{11} + L_{22} \mp 2M}{L_{11}L_{22} - M^2} \Rightarrow L_{\text{ισοδύναμο}} = \frac{L_{11}L_{22} - M^2}{L_{11} + L_{22} \mp 2M}$$

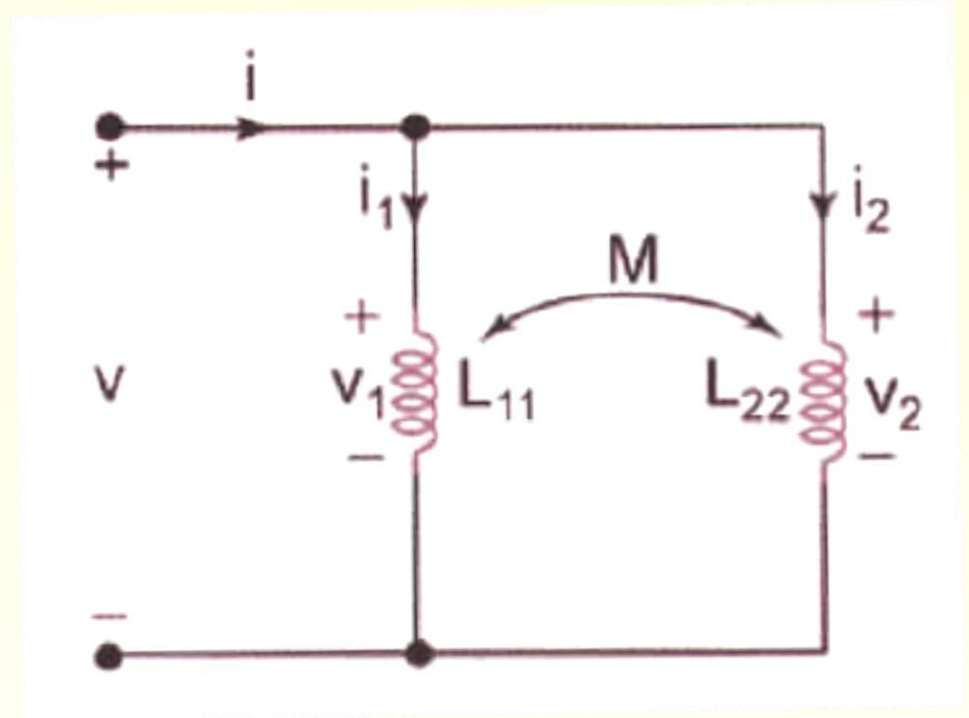
– για $M > 0$
+ για $M < 0$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΥΚΟΛΙΑΣ

ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ ΠΗΝΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ

- Πρέπει

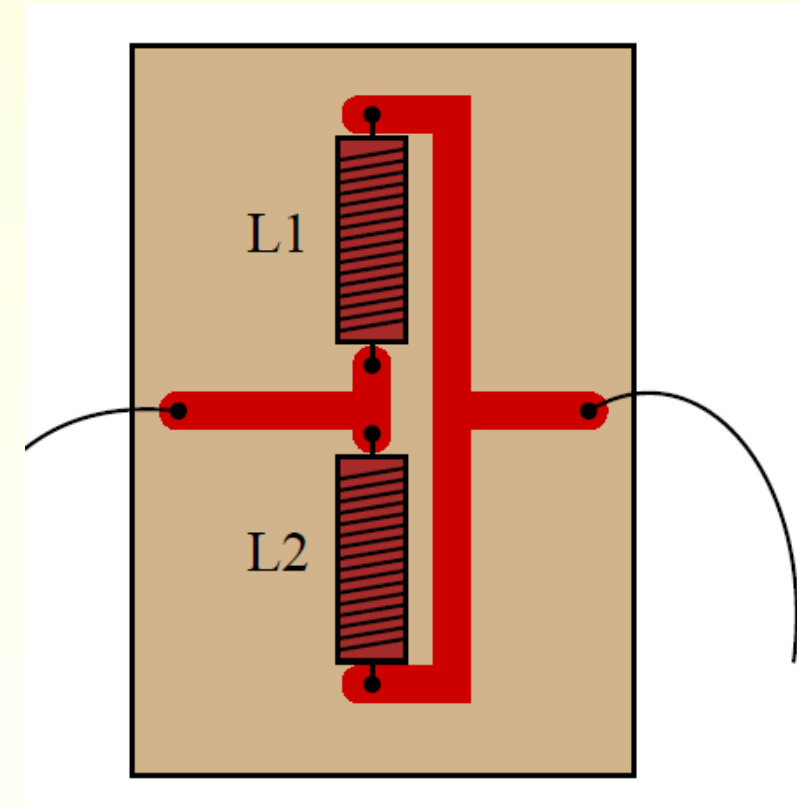
$$M \leq \sqrt{L_{11} L_{22}}$$



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΥΚΟΛΙΑΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

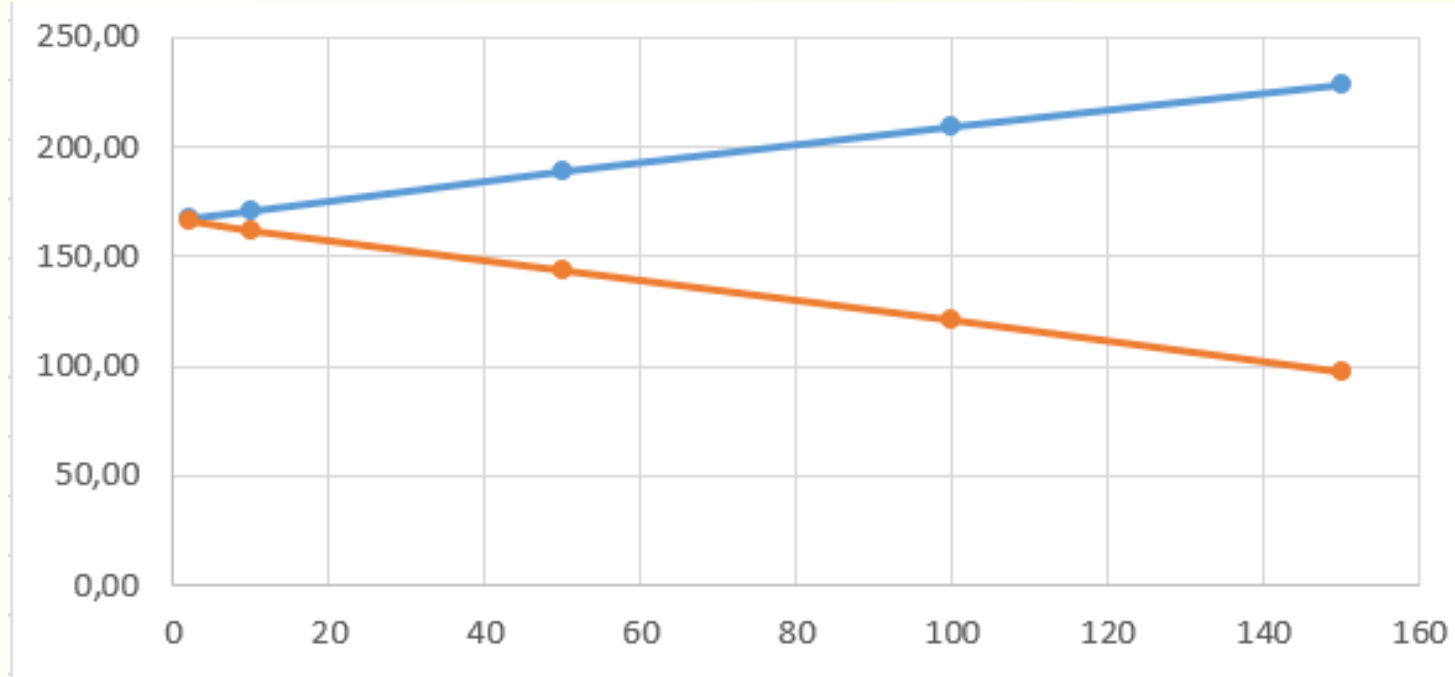
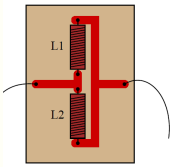
- Ένας τεχνικός χρειάζεται ένα πηνίο των 167 mH αλλά μπορεί να βρει μόνο πηνία των 250 και 500 mH
- Σκεπτόμενος σωστά συνδυάζει παράλληλα δυο τέτοια πηνία και κατασκευάζει το κύκλωμα
- Ανακαλύπτει όμως ότι η αυτεπαγωγή είναι τελικά πολύ χαμηλότερη
- Τι συνέβη?



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΥΚΟΛΙΑΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

- Η χωρίς έλεγχο μαγνητική ροή/αμοιβαία επαγωγή μπορεί να αλλάξει τον τρόπο λειτουργίας ενός κυκλώματος

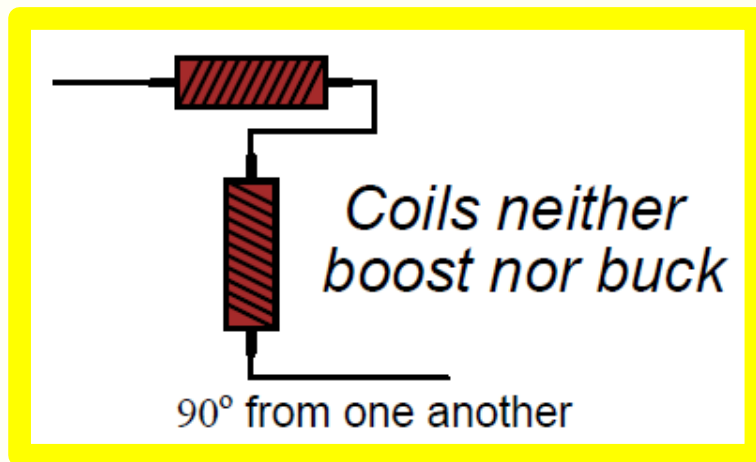
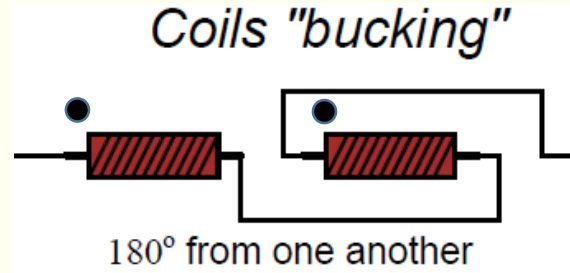
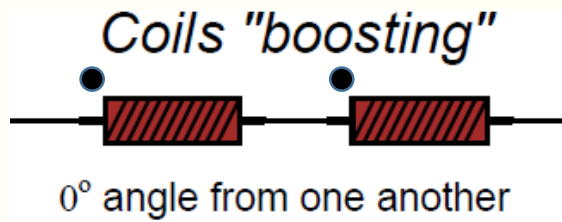


M

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΥΚΟΛΙΑΣ

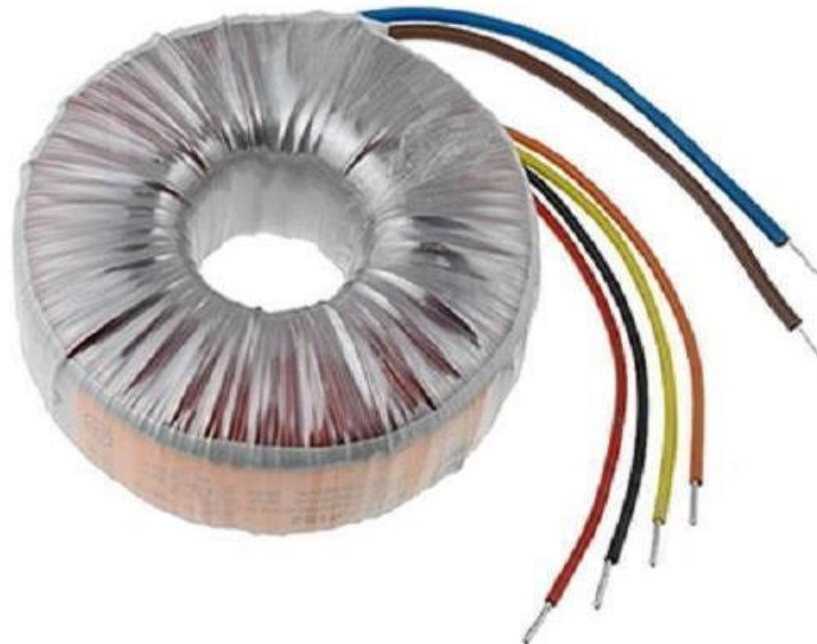
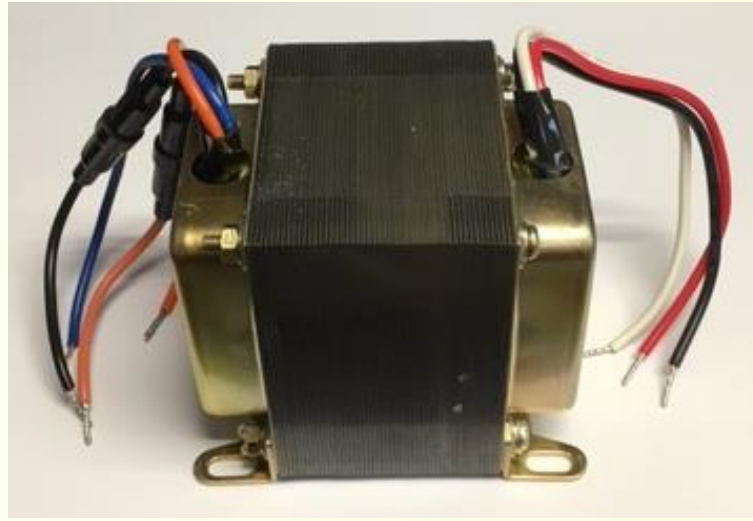
ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

- Ανεπιθύμητη επαγωγή; Κλωβός Faraday
- Η πιο φθηνή λύση: ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ!



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ

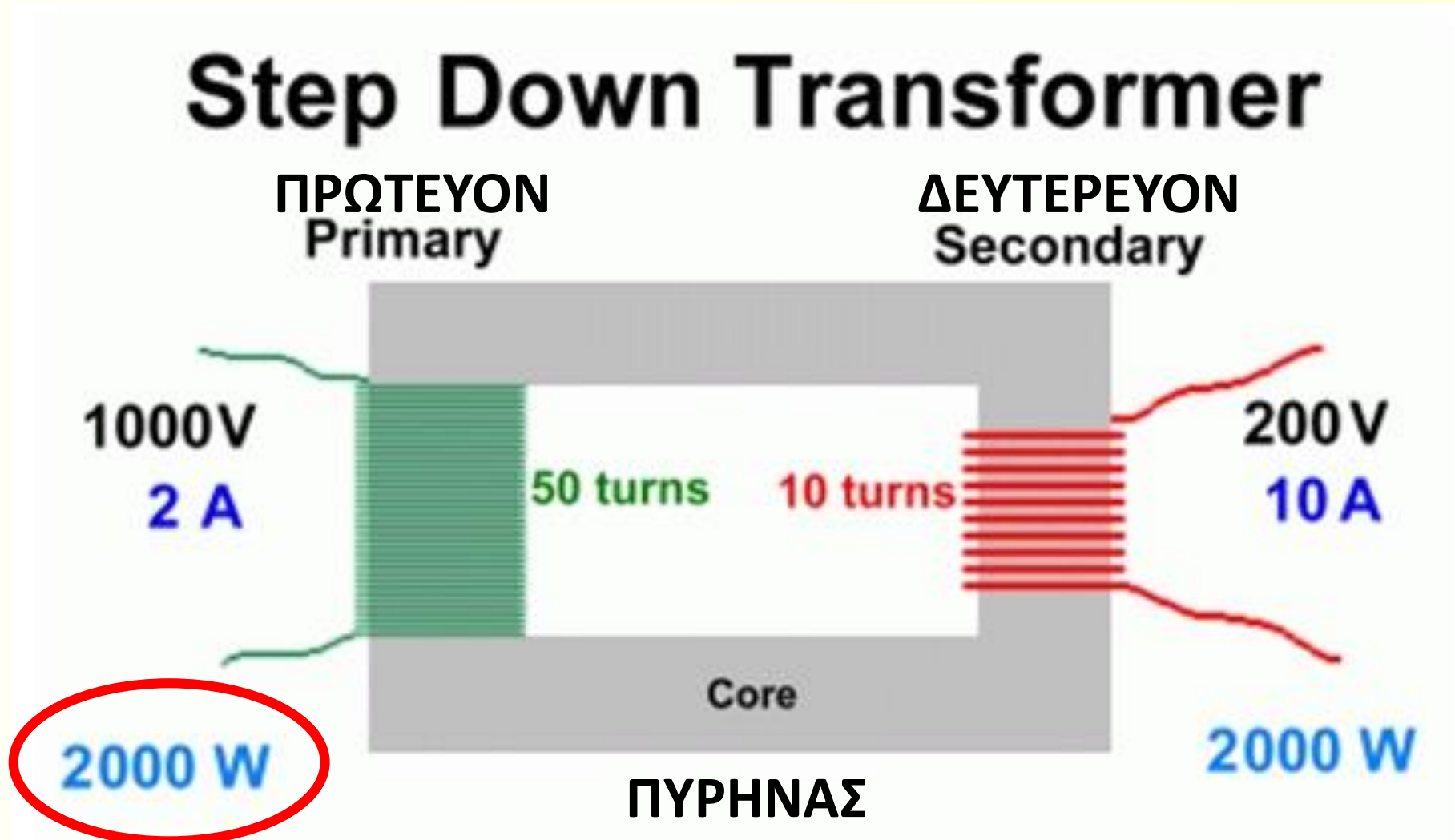


63K VA

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ

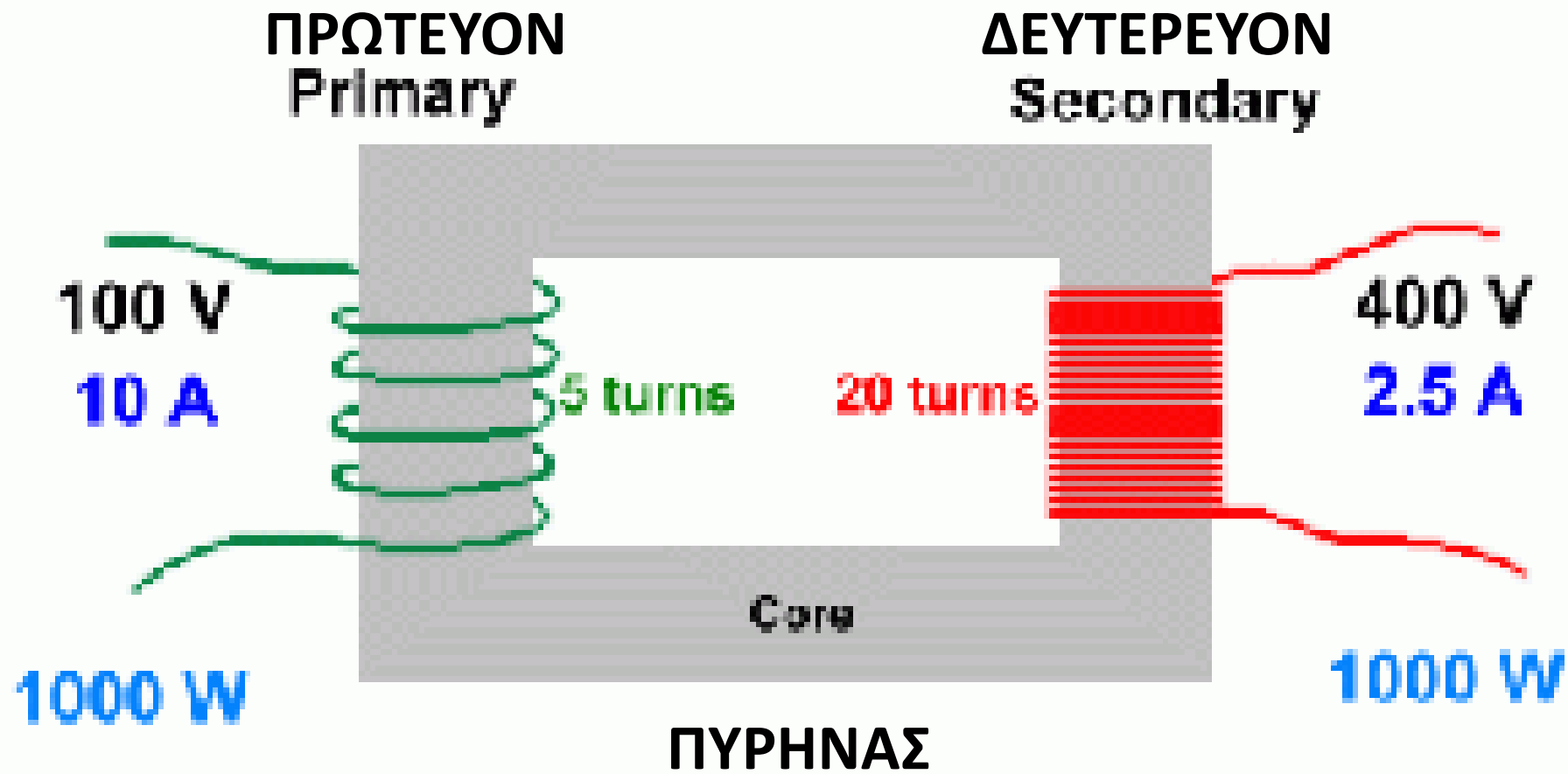
- Βασική χρήση η μετατροπή τάσεων
- ...αλλά όχι μόνο
- Πλατύτατη χρήση

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ-ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΑΣΕΩΝ

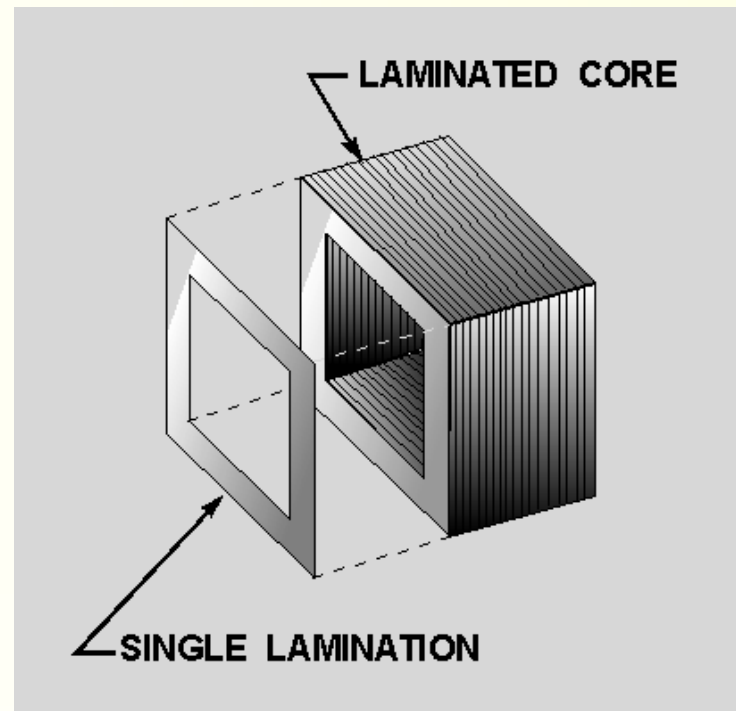
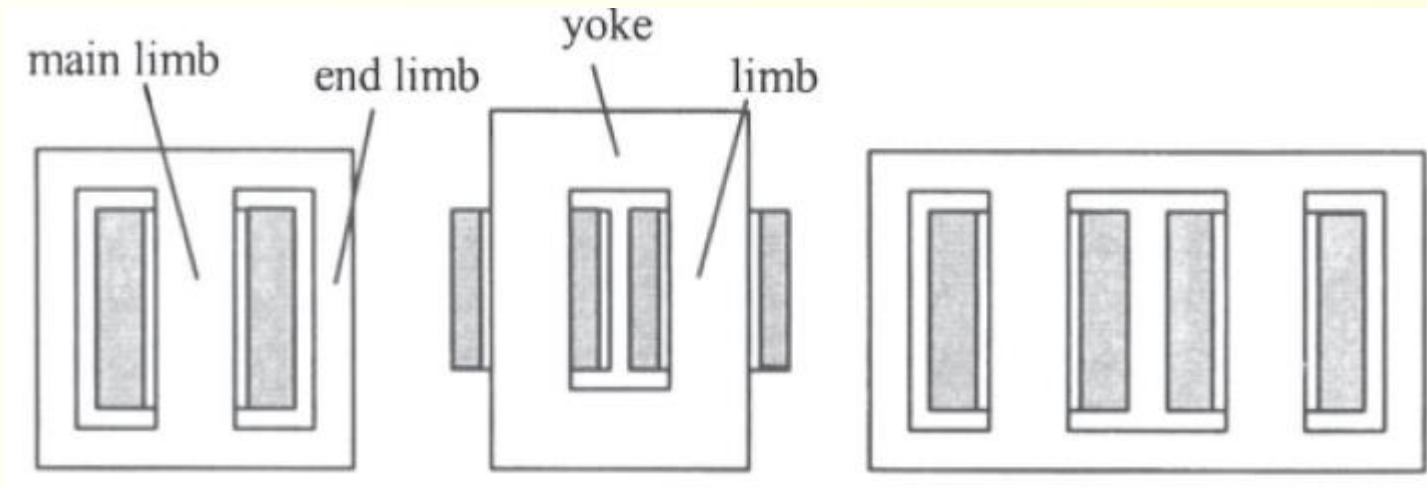


ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ-ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΑΣΕΩΝ

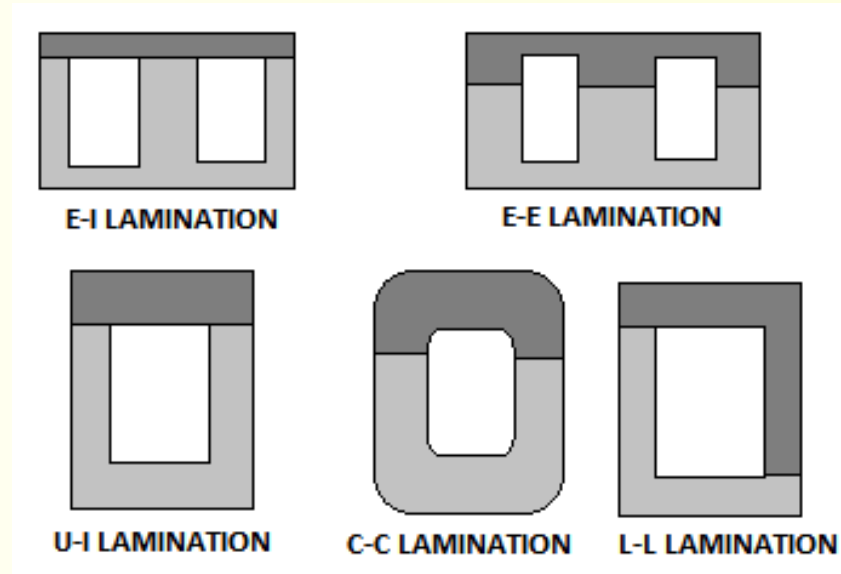
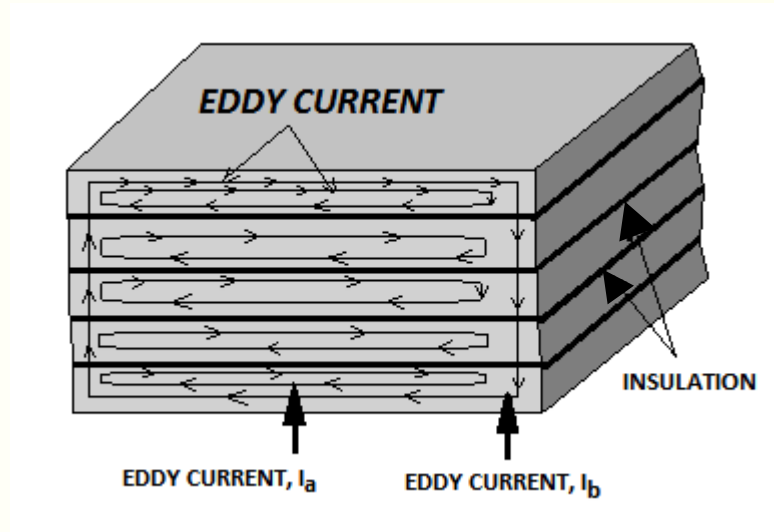
Step Up Transformer



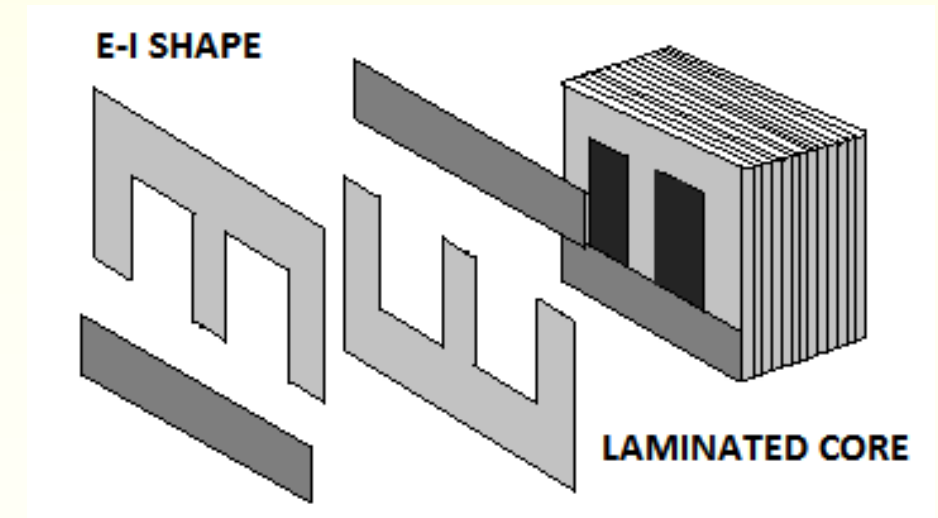
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ-ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ-ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ



ΔΙΝΟΡΡΕΥΜΑΤΑ



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ-ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

- <https://www.youtube.com/watch?v=1CESfmVgRn0>



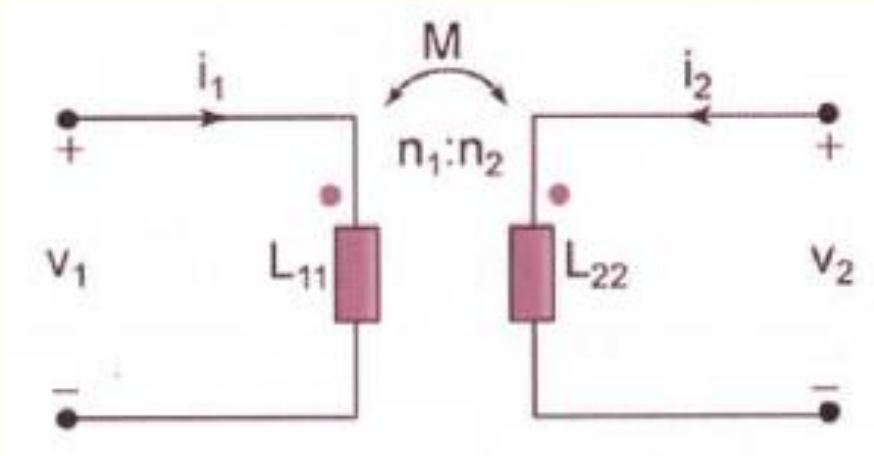
- <https://www.youtube.com/watch?v=LKZm5VSOWKg>

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ

- 2 • Ιδανικός μετασχηματιστής
- 1 • Μετασχηματιστής με τέλεια σύζευξη
- 3 • Μη ιδανικός μετασχηματιστής
- 4 • Πραγματικός μετασχηματιστής

1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΖΕΥΞΗ

- Τέλεια σύζευξη $\Rightarrow$ καμία διαρροή (μαγνητικής ροής) $\Rightarrow \mathbf{k = 1}$



$$v_1(t) = L_{11} \frac{d i_1(t)}{dt} + M \frac{d i_2(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = M \frac{d i_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{d i_2(t)}{dt}$$

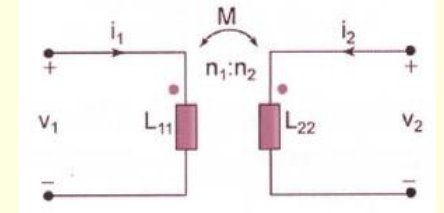
$$k = 1 \Rightarrow M^2 = L_{11} L_{22} \Rightarrow \frac{L_{22}}{M} = \frac{M}{L_{11}} = \frac{\sqrt{L_{11} L_{22}}}{L_{11}} = \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$L = \frac{\mu n^2 A}{l}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΖΕΥΞΗ

- Διαιρούμε:

$$v_1(t) = L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{di_2(t)}{dt}$$



$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_{11} \frac{d}{dt} \left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)}{M \frac{d}{dt} \left(i_1 + \frac{L_{22}}{M} i_2 \right)} = \frac{n_1}{n_2} \frac{\frac{d}{dt} \left(i_1 + \frac{n_2}{n_1} i_2 \right)}{\frac{d}{dt} \left(i_1 + \frac{n_2}{n_1} i_2 \right)} = \frac{n_1}{n_2}$$

- **ΛΟΓΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ:**

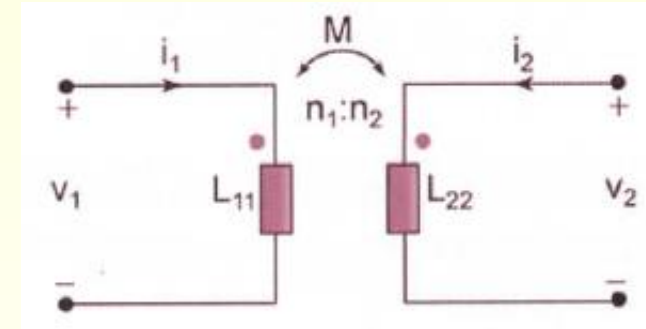
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΖΕΥΞΗ

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Μετατροπή τάσης από $v_1 = 220 \text{ V}$ σε $v_2 = 110 \text{ V}$

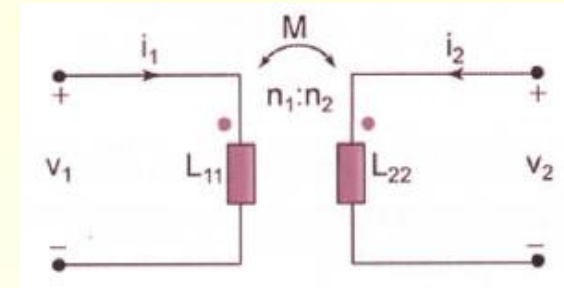
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{220}{110} = 2 \Rightarrow n_2 = \frac{n_1}{2}$$



- Δηλαδή το δευτερεύον πρέπει να έχει τις μισές σπείρες τού πρωτεύοντος
- Πόσες ακριβώς όμως και με τι διατομές;;;

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΖΕΥΞΗ

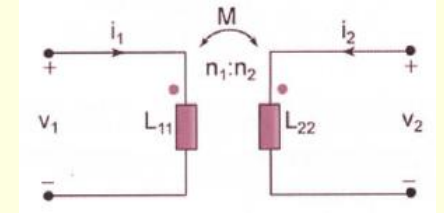
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Μετατροπή τάσης από 220 V σε 110 V
- Ο αριθμός των σπειρών είναι κατασκευαστικό θέμα σχετικό με τη δημιουργία αρκετής επαγωγής
- Οι διατομές καθορίζονται από την ισχύ
 - Π.χ. 1000 W στο πρωτεύον σημαίνει (χονδρικά) 220 V επί 5 A
 - Η ίδια ισχύς θα εμφανιστεί και στο δευτερεύον, οπότε 1000 W θα είναι 110 V επί 10 A
 - Άρα, η διατομή στο δευτερεύον πρέπει να είναι **διπλάσια** από το πρωτεύον



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΖΕΥΞΗ

- Ας δούμε και τα ρεύματα:

$$v_1(t) = L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{di_2(t)}{dt}$$



$$v_1 = L_{11} \frac{d}{dt} \left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} i_1 = \frac{v_1}{L_{11}} - \frac{M}{L_{11}} \frac{d}{dt} i_2 \Rightarrow i_1 = \frac{1}{L_{11}} \int v_1 d\tau - \frac{n_2}{n_1} i_2$$

$$v_2 = L_{22} \frac{d}{dt} \left(i_2 + \frac{L_{22}}{M} i_1 \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} i_2 = \frac{v_2}{L_{22}} - \frac{M}{L_{22}} \frac{d}{dt} i_1 \Rightarrow i_2 = \frac{1}{L_{22}} \int v_2 d\tau - \frac{n_1}{n_2} i_1$$

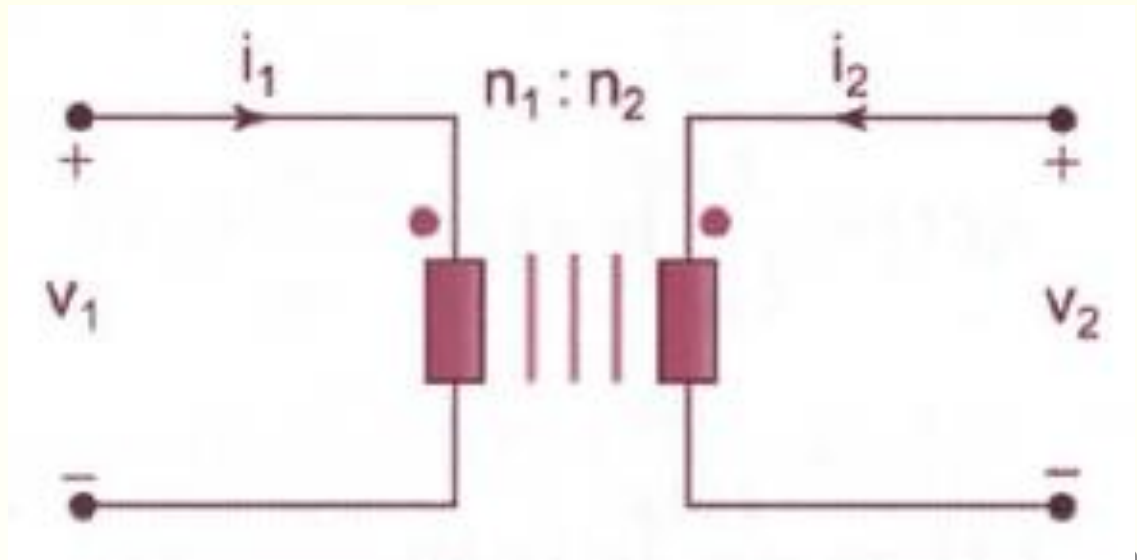
$$i_1(t) = \frac{1}{L_{11}} \int_0^t v_1(\tau) d\tau - \frac{n_2}{n_1} i_2(t)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{L_{22}} \int_0^t v_2(\tau) d\tau - \frac{n_1}{n_2} i_1(t)$$

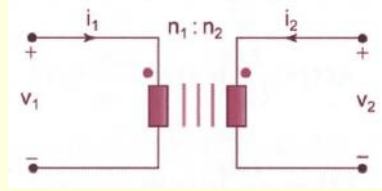
ΙΔΑΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ

- Εξιδανίκευση: όχι μόνο τέλεια σύζευξη αλλά και άπειρη μαγνητική διαπερατότητα του μέσου
- Αυτό σημαίνει: $L_{11} = L_{22} = \infty$
- Η αμοιβαία επαγωγή δεν έχει νόημα γιατί έχουμε την απόλυτη σύζευξη και μάλιστα δωρεάν (χωρίς κατανάλωση ενέργειας)

• ΣΥΜΒΟΛΟ:



ΙΔΑΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ



- Ας εξετάσουμε τα ρεύματα όταν $L_{11} = L_{22} = \infty$

$$i_1(t) = \frac{1}{L_{11}} \int_0^t v_1(\tau) d\tau - \frac{n_2}{n_1} i_2(t) \quad \xRightarrow{L_{11}=\infty} \quad i_1(t) = -\frac{n_2}{n_1} i_2(t)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{L_{22}} \int_0^t v_2(\tau) d\tau - \frac{n_1}{n_2} i_1(t) \quad \xRightarrow{L_{22}=\infty} \quad i_2(t) = -\frac{n_1}{n_2} i_1(t)$$

- Οπότε:

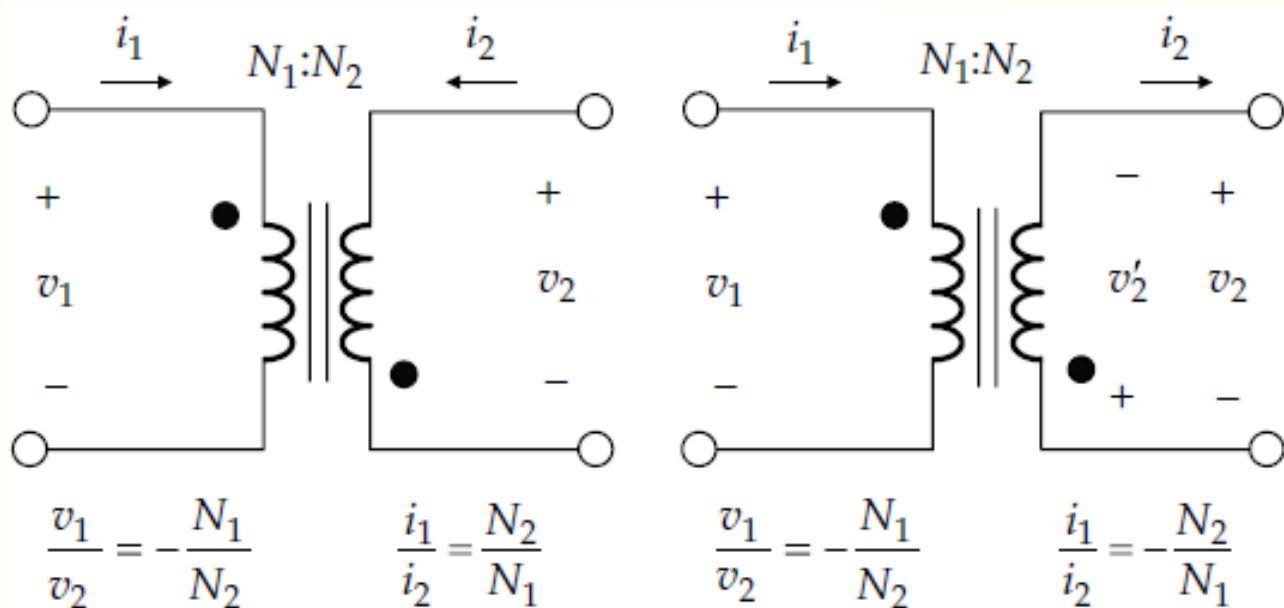
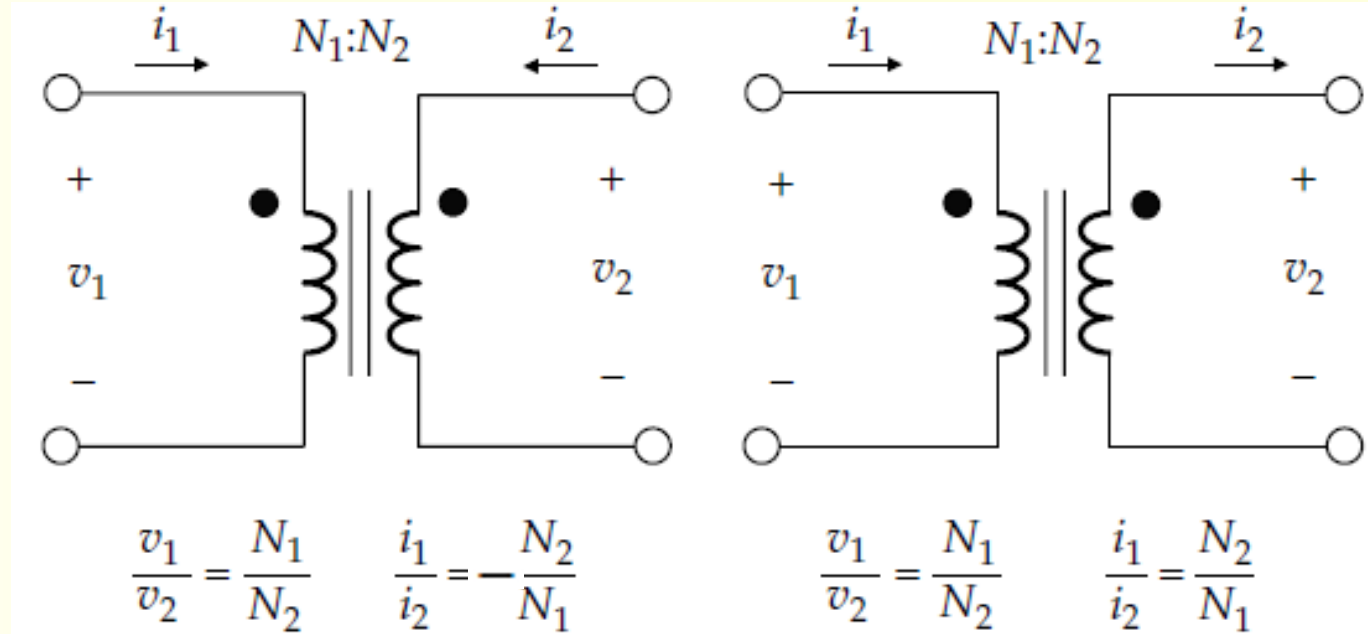
$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}$$

- Αν υπολογίσουμε τη **στιγμιαία ισχύ** ($v_1 i_1 + v_2 i_2$) θα τη βρούμε **ίση με 0**: ο ιδανικός μετ/της ούτε καταναλώνει ούτε αποθηκεύει ενέργεια

ΙΔΑΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ

- Περιπτώσεις (δείγμα):



- Πολλές περιπτώσεις
- Υπάρχουν κανόνες;

ΙΔΑΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ

• ΚΑΝΟΝΑΣ 1 [Τάσεις]

- Αν οι τάσεις των «πηνίων» V_1 και V_2 είναι και οι δυο θετικές ή αρνητικές στους ακροδέκτες με την τελεία, τότε ισχύει ότι

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}$$

- Αν είναι η μια θετική και η άλλη αρνητική τότε

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = -\frac{n_1}{n_2}$$

ΙΔΑΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ

• ΚΑΝΟΝΑΣ 2 [Ρεύματα]

- Αν τα ρεύματα των «πηνίων» I_1 και I_2 και τα δυο μπαίνουν ή βγαίνουν από τους ακροδέκτες με την τελεία, τότε ισχύει ότι

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1}$$

- Αν το ένα μπαίνει και το άλλο βγαίνει, τότε

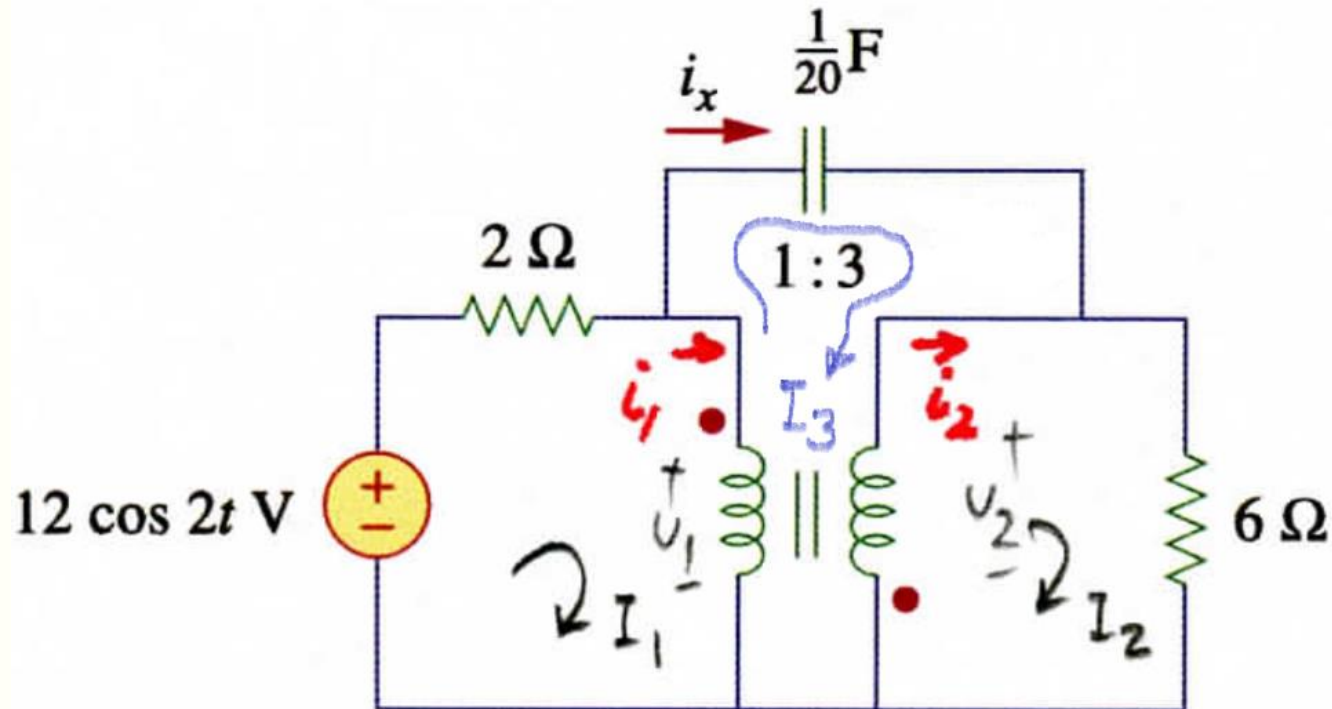
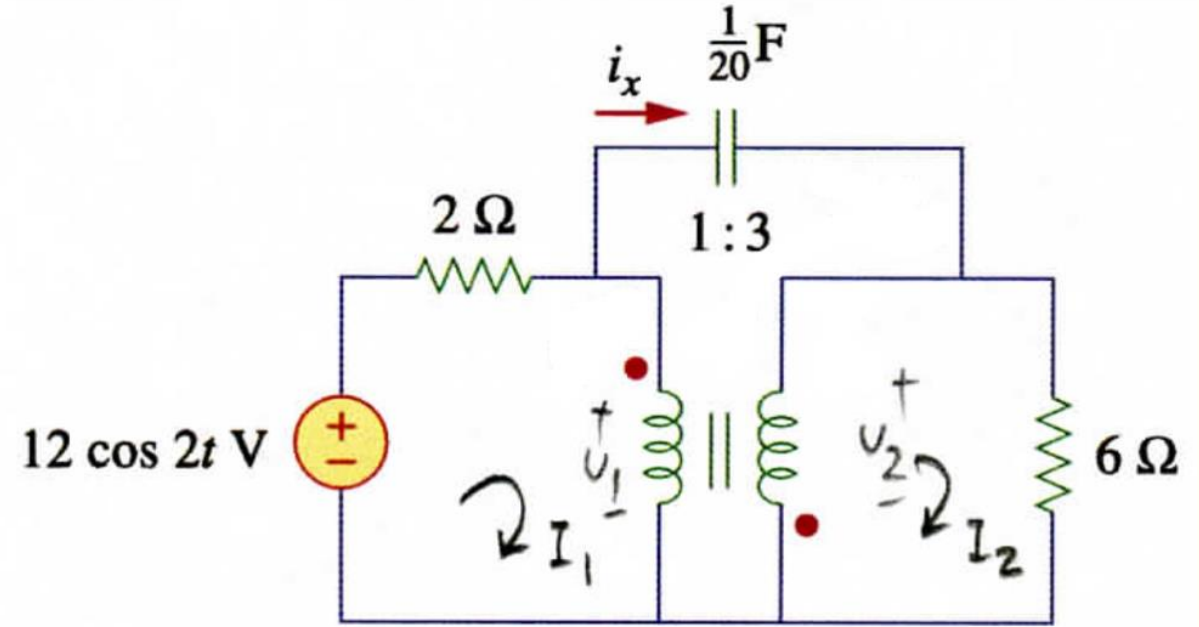
$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{n_2}{n_1}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο κανόνας για τα ρεύματα είναι αντίστροφος αυτού που ισχύει για τα «κανονικά» πηνία

ΙΔΑΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ—ΚΛΑΣΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ

Πολλοί γράφουν μηχανικά:

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{3}{1}$$

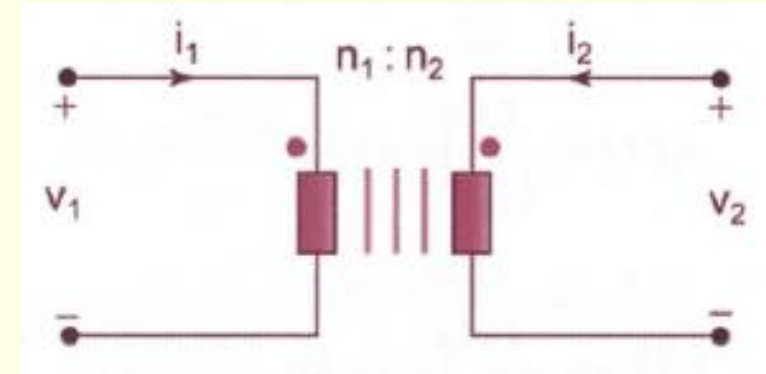


Το σωστό:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{I_1 - I_3}{I_2 - I_3} = -\frac{3}{1}$$

ΙΔΑΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ

- Δεν καταναλώνουν ενέργεια
- Δεν έχουν ροές διαρροής
- Δεν «έχουν» αυτεπαγωγές (είναι άπειρες)
- Εξαιρετικό αν και απλοϊκό μοντέλο για γρήγορες αναλύσεις
- Χρησιμοποιεί σαν βασικό στοιχείο γύρω από το οποίο μπορούν να χτιστούν όλα τα υπόλοιπα πιο πολύπλοκα μοντέλα



ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΖΕΥΞΗ

- Ας θυμηθούμε τα ρεύματα για τον μετασχηματιστή με τέλεια σύζευξη ($L_{11}, L_{22} \neq \infty, k = 1$):

$$i_1(t) = \frac{1}{L_{11}} \int_0^t v_1(\tau) d\tau - \frac{n_2}{n_1} i_2(t)$$

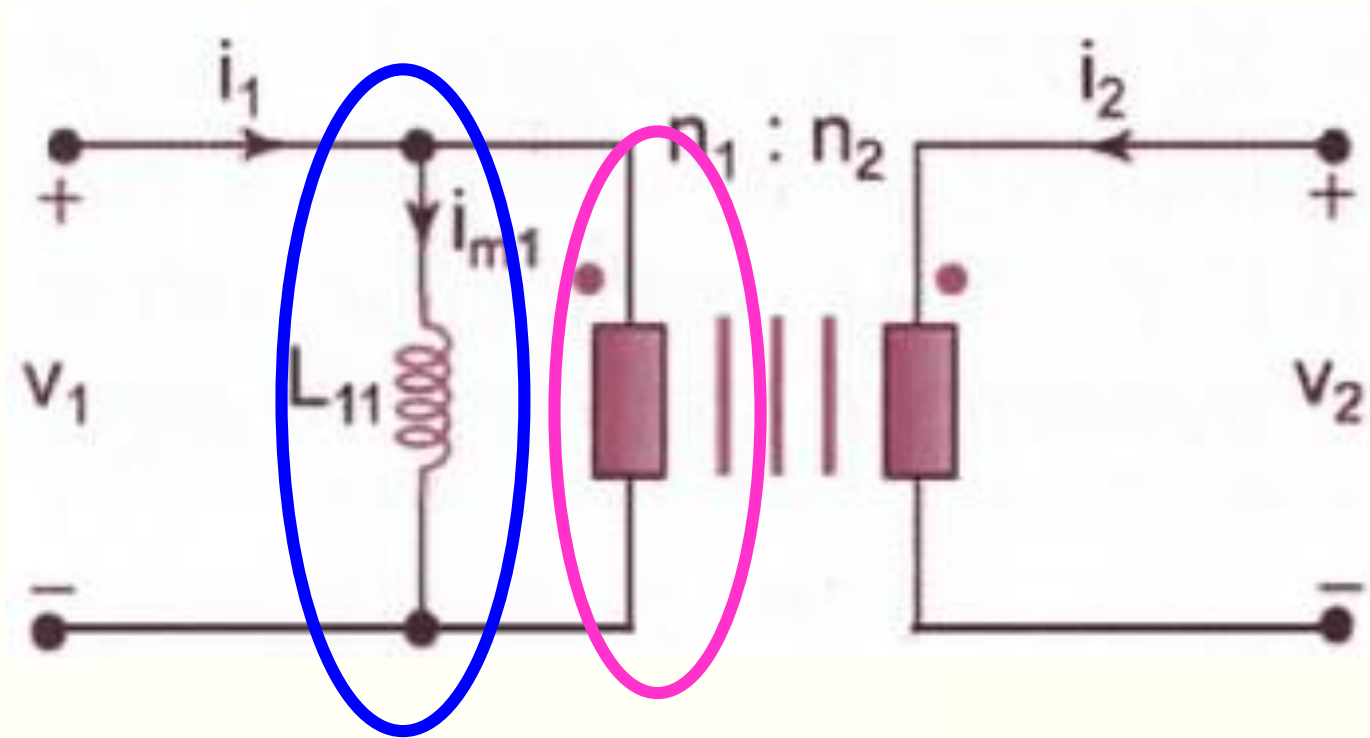
ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ **ΙΔΑΝΙΚΟΣ**

$$i_2(t) = \frac{1}{L_{22}} \int_0^t v_2(\tau) d\tau - \frac{n_1}{n_2} i_1(t)$$

ΡΕΥΜΑ ΜΑΓΝΗΤΙΣΗΣ (ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ): Δημιουργεί τη μαγνητική ροή που «συνδέει» πρωτεύον και δευτερεύον

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΖΕΥΞΗ

- Η μαθηματική έκφραση για το ρεύμα ισοδυναμεί με:



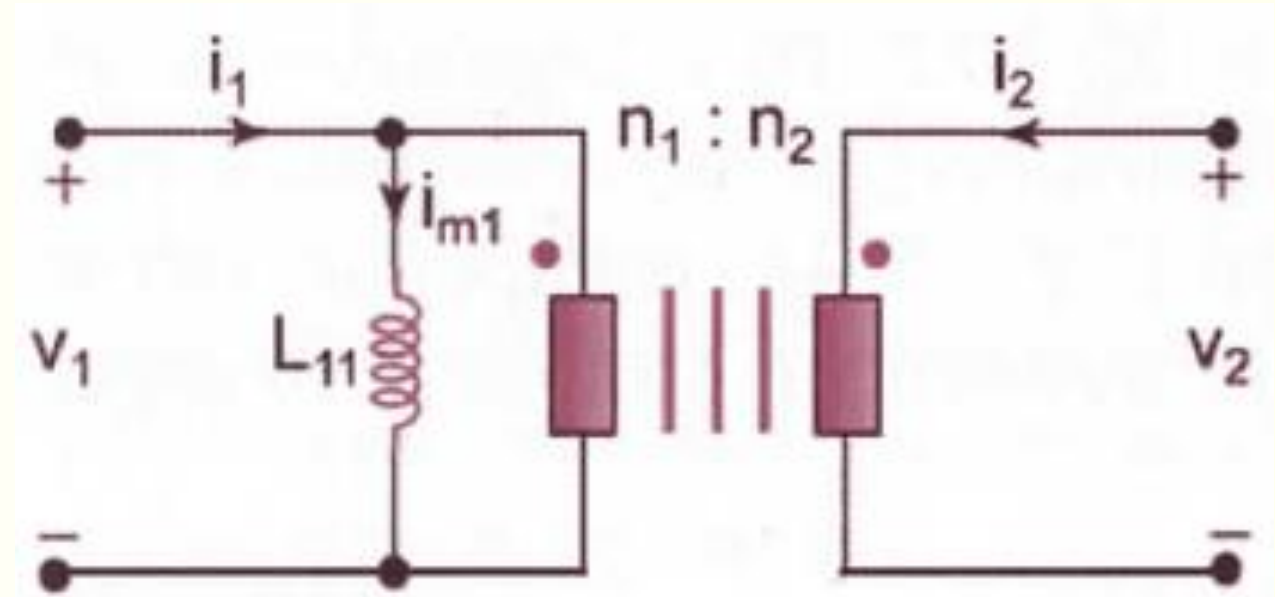
$$i_1(t) = \frac{1}{L_{11}} \int_0^t v_1(\tau) d\tau - \frac{n_2}{n_1} i_2(t)$$

$$i_{m1}(t) \triangleq \frac{1}{L_{11}} \int_0^t v_1(\tau) d\tau$$

Το ρεύμα μαγνήτισης «φέρει» την ενέργεια που αποθηκεύεται στον μετασχηματιστή

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΖΕΥΞΗ

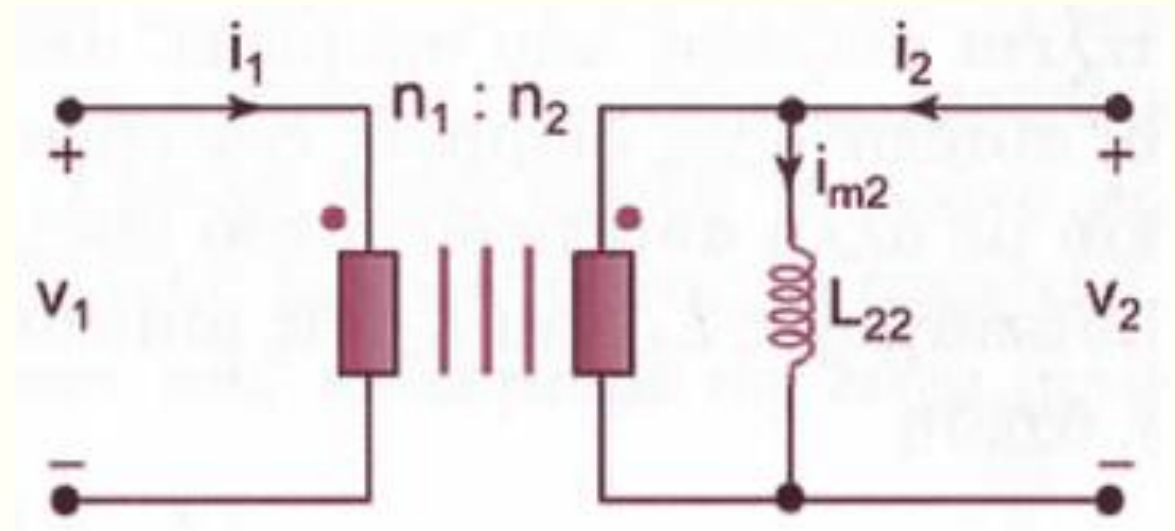
- Άποψη από το πρωτεύον



- Άποψη από το δευτερεύον

Ναι! Ο μετασχηματιστής θα «δουλέψει» αν τον τροφοδοτήσουμε από το δευτερεύον αλλά αυτό που θα κάνει θα είναι πολύ περιορισμένο (μάλλον άχρηστο ή και επικίνδυνο):

ΚΑΘΟΛΟΥ ΚΑΛΗ ΙΔΕΑ!!

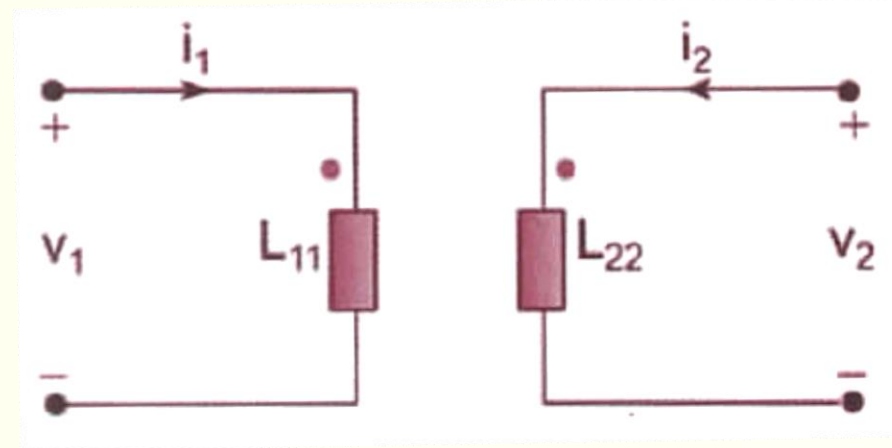


ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ

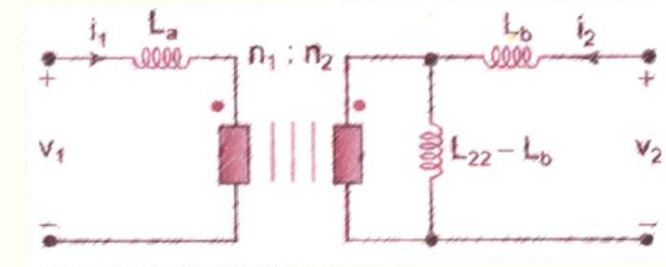
- Μη ιδανικός = Μη τέλεια σύζευξη $\Leftrightarrow L_{11} \cdot L_{22} > M^2$
- $\Rightarrow$ Απώλεια μαγνητικής ροής εκτός πυρήνα
- $\Rightarrow$ Υπάρχουν αυτεπαγωγές που πλεονάζουν («**αυτεπαγωγές διαρροής**»-leakage inductances)
- πλεονάζουν = δεν συμβάλλουν στη μαγνητική σύζευξη
- **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Οι αυτεπαγωγές διαρροής ΔΕΝ είναι συζευγμένες μεταξύ τους ούτε με κάποια άλλη αυτεπαγωγή στο κύκλωμα

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΤΟΥ ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗ

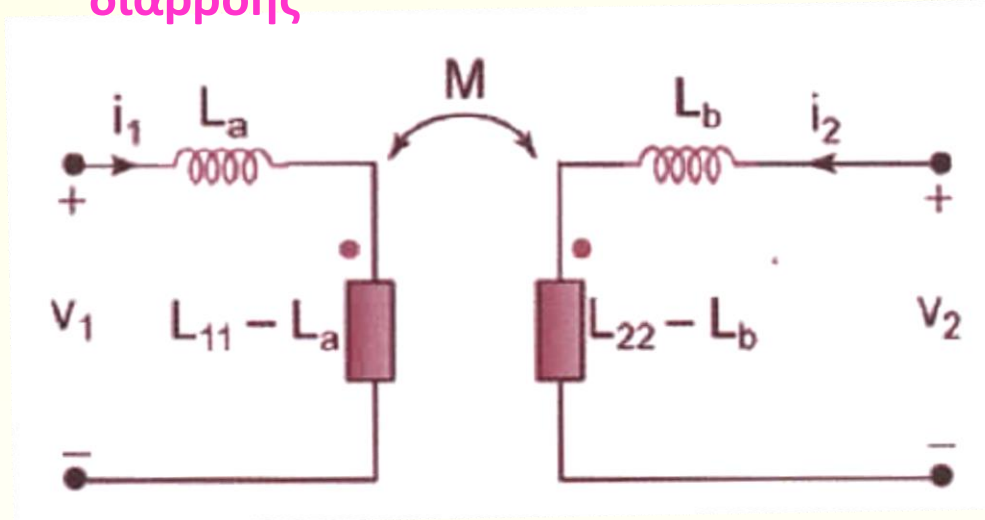
- Μη ιδανικός:



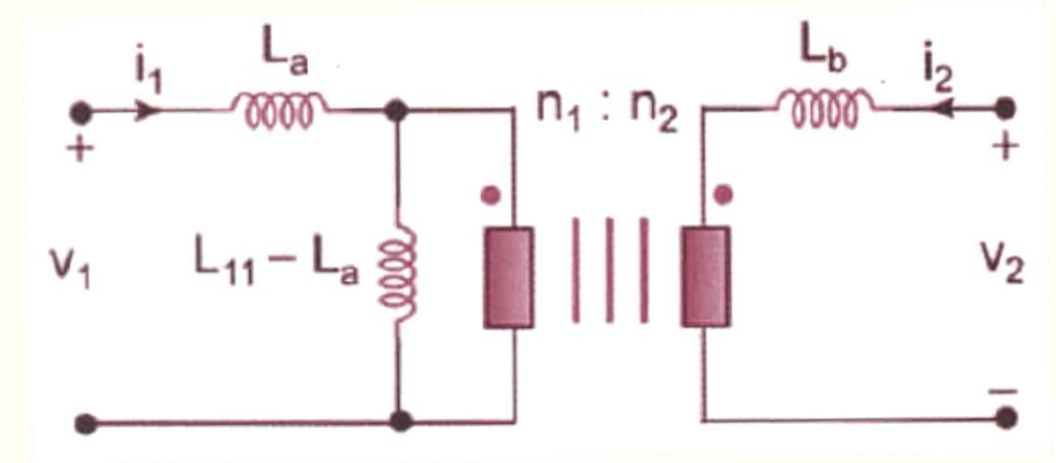
(Άποψη από το δευτερεύον)



Αυτεπαγωγή
διαρροής



Ισοδύναμο με μετασχηματιστή
με τέλεια σύζευξη



Ισοδύναμο με ιδανικό
μετασχηματιστή

ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ

$$L_{11} \cdot L_{22} > M^2 \Rightarrow (L_{11} - L_a) \cdot (L_{22} - L_b) = M^2$$

$$\Rightarrow \frac{M}{(L_{22} - L_b)} = \frac{(L_{11} - L_a)}{M} = \frac{n_1}{n_2}$$

• Οπότε:

$$L_a = L_{11} - \frac{n_1}{n_2} M$$

$$L_b = L_{22} - \frac{n_2}{n_1} M$$

Δυο εξισώσεις,
τρεις άγνωστοι

⇒

Παραμετρική λύση
από τον λόγο n_1/n_2

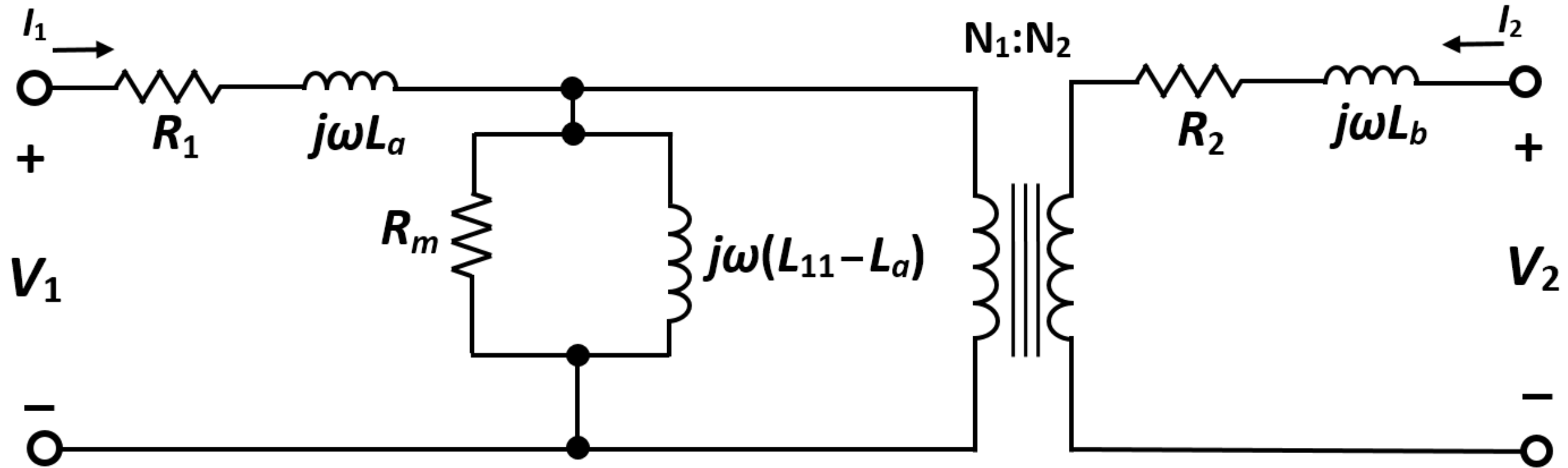
ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ

- Επειδή ο λόγος των σπειρών δεν είναι πάντα γνωστός, χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο λόγο επαγωγών που μπορούν να μετρηθούν εύκολα:

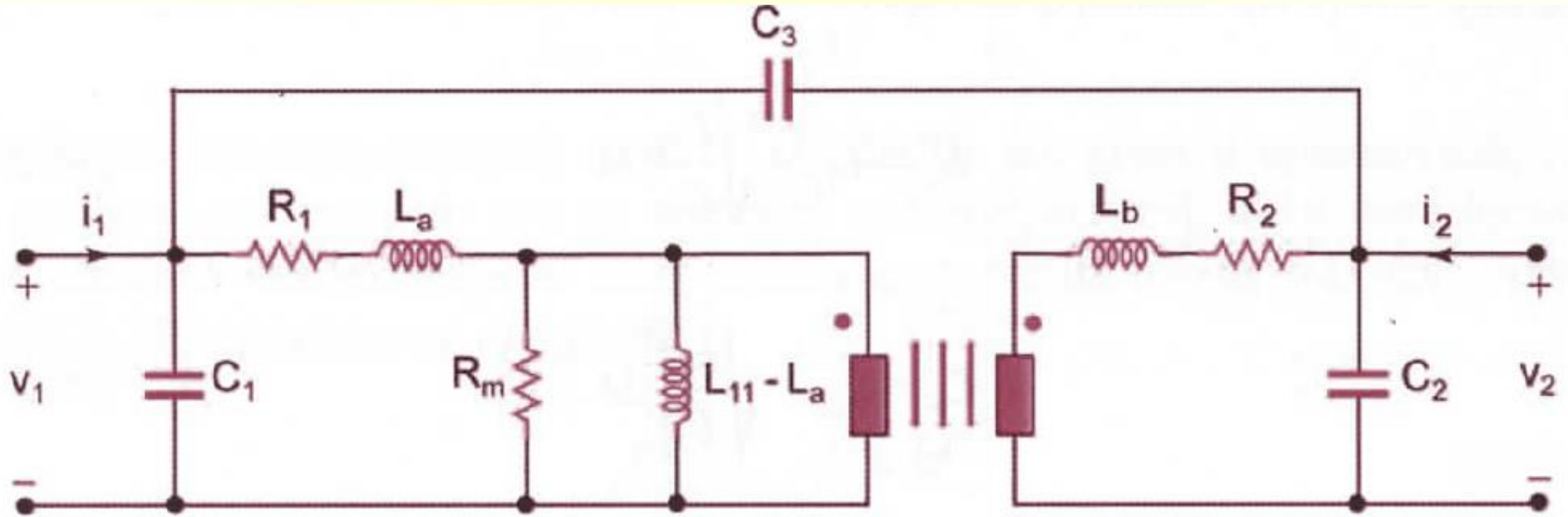
$$L_a = L_{11} - \frac{\sqrt{L_{11}}}{\sqrt{L_{22}}} M$$

$$L_b = L_{22} - \frac{n_2}{n_1} M$$

ΠΛΗΡΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗ



ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ



- R_m : Μαγνητικές απώλειες πυρήνα
- R_1, R_2 : ωμικές απώλειες τυλιγμάτων
- C_1, C_2, C_3 : κατανεμημένες χωρητικότητες τυλιγμάτων

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΣΥΖΕΥΞΗ

- Θα περιοριστούμε στο πεδίο συχνότητας
- Μετασχηματίζουμε μια σχέση που γνωρίζουμε στο πεδίο τής συχνότητας:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) &= M \frac{di_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{di_2(t)}{dt} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} V_1 &= j\omega L_{11} I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_{22} I_2 \end{aligned}$$

Το M «φέρει» το
πρόσημό του

- Εκτελούμε αλγεβρικές μετατροπές και...

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΣΥΖΕΥΞΗ

$$V_1 = j\omega \left[(L_{11} - M) + M \right] I_1 + j\omega M I_2$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega \left[(L_{22} - M) + M \right] I_2$$

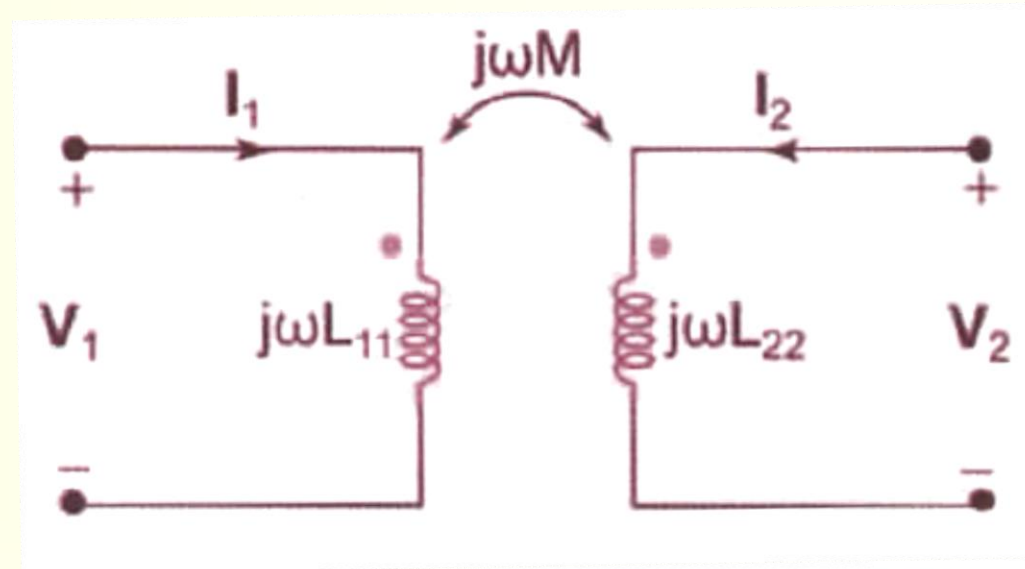
$$V_1 = j\omega (L_{11} - M) I_1 + j\omega M (I_1 + I_2)$$

$$V_2 = j\omega M (I_1 + I_2) + j\omega (L_{22} - M) I_2$$

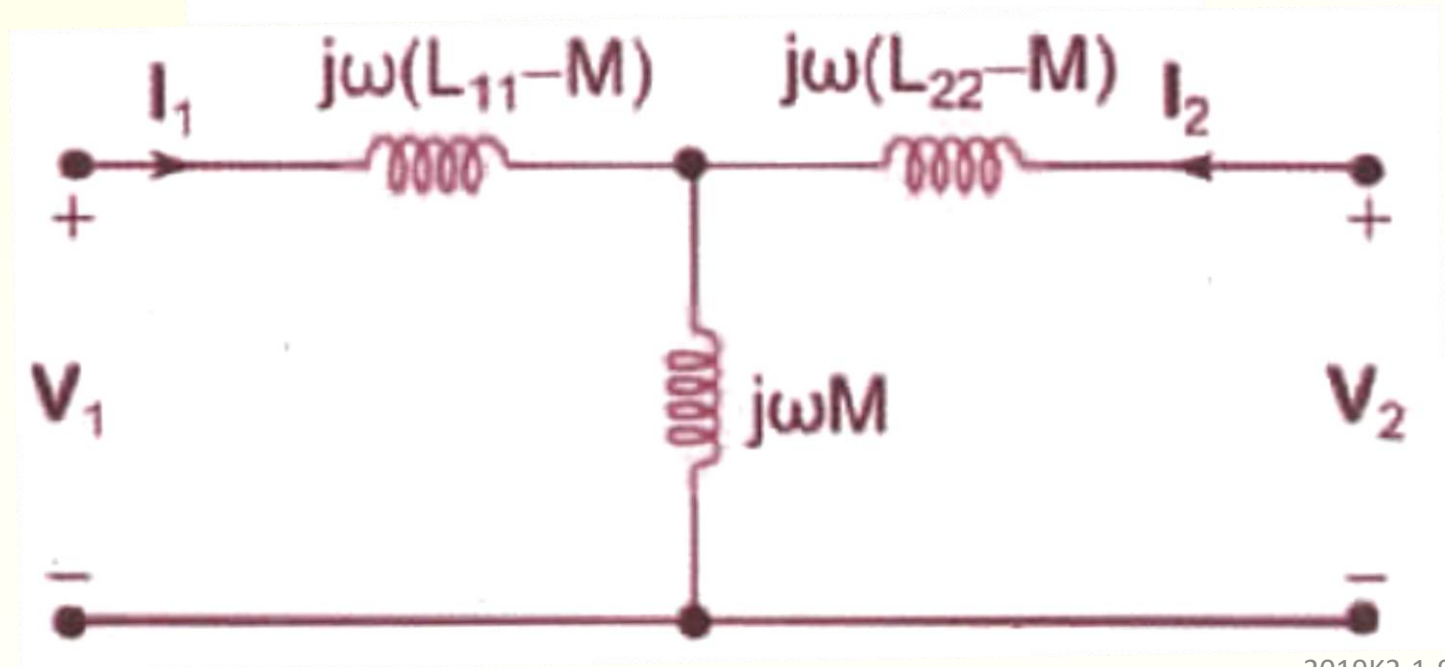
- Εκφράζουμε ηλεκτρολογικά όλα τα παραπάνω:

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΣΥΖΕΥΞΗ

- Ξεκινήσαμε από αυτό:



- Και πήραμε αυτό:

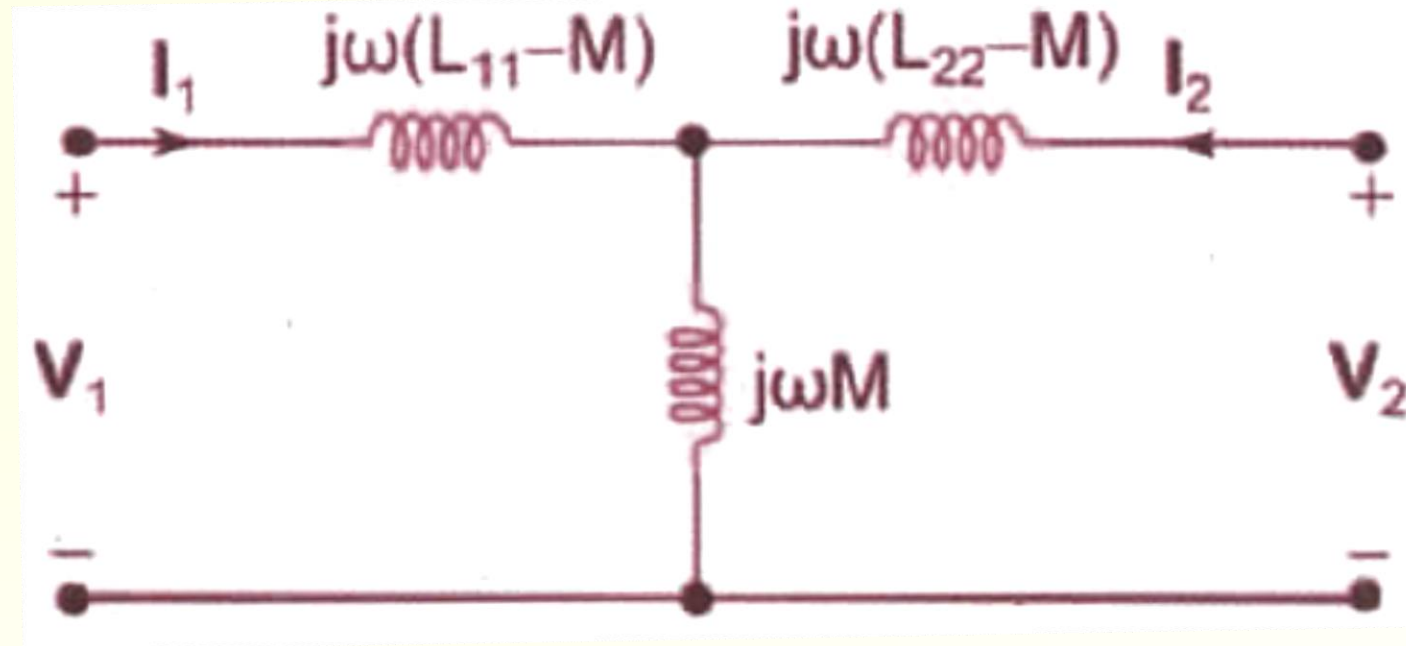
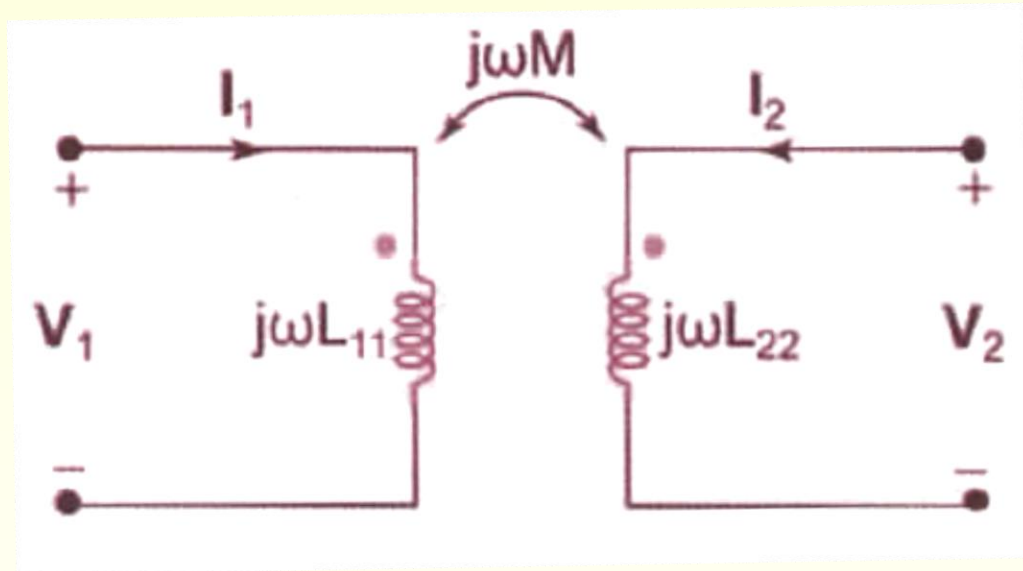


$$V_1 = j\omega (L_{11} - M) I_1 + j\omega M (I_1 + I_2)$$

$$V_2 = j\omega M (I_1 + I_2) + j\omega (L_{22} - M) I_2$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΣΥΖΕΥΞΗ

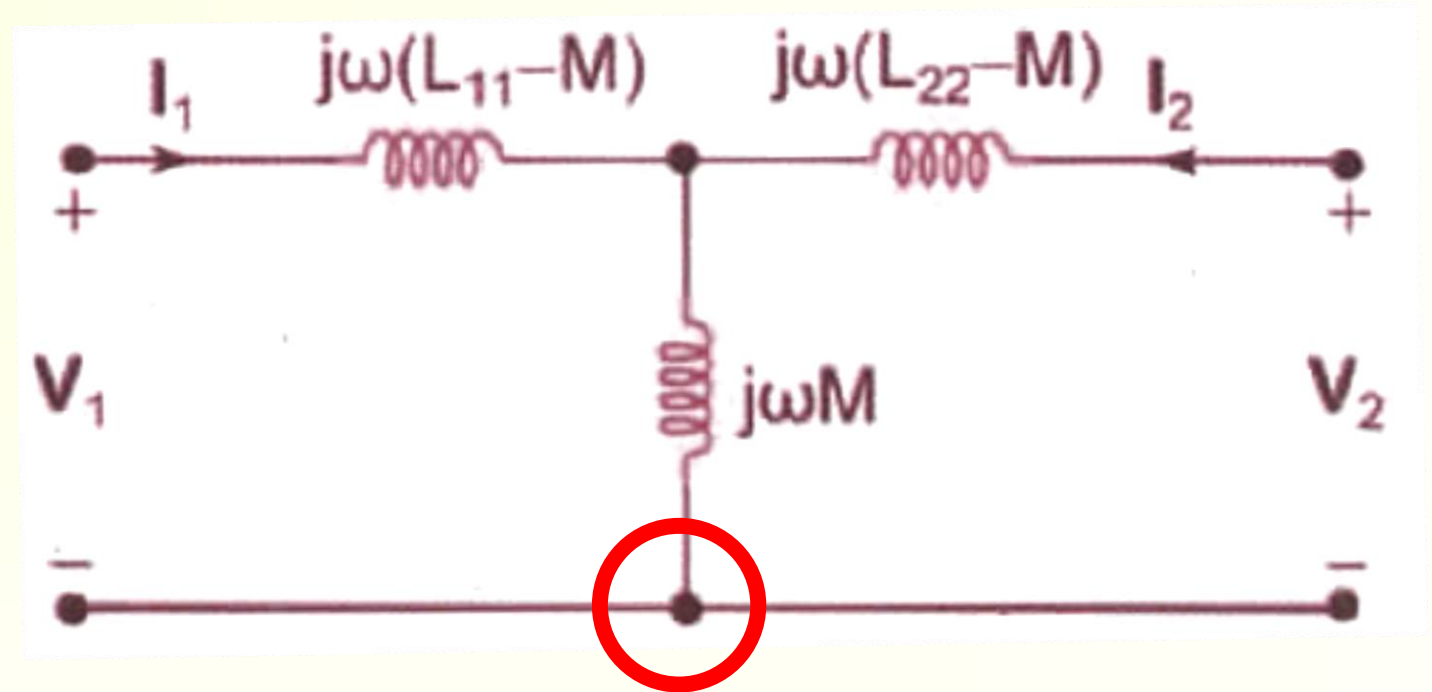
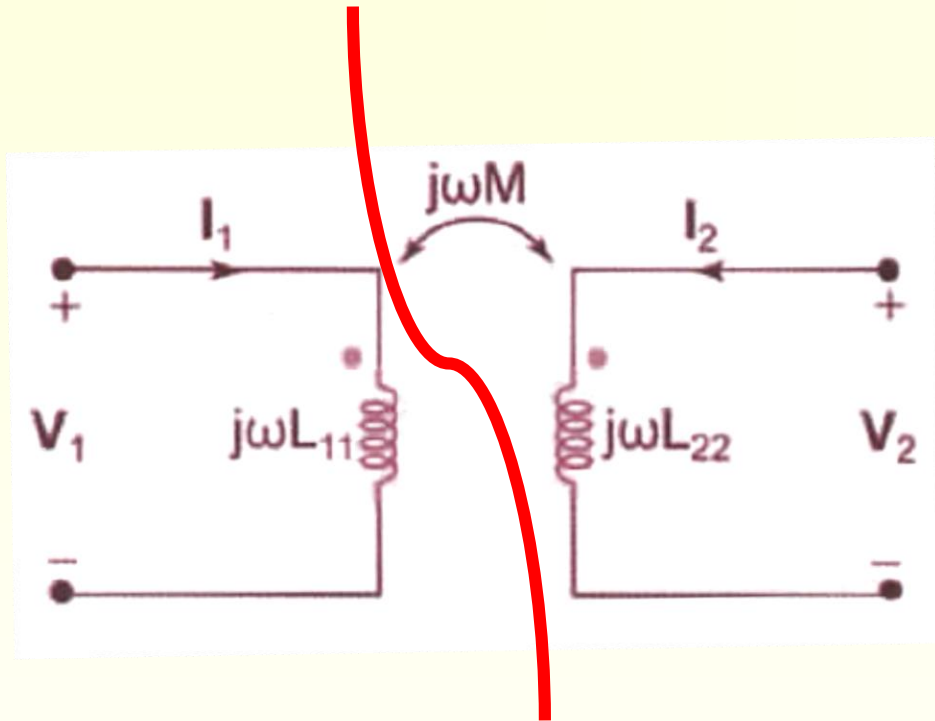
- Η μαγνητική σύζευξη χάθηκε!



- Ισοδύναμο κύκλωμα αστέρα (T-equivalent)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΣΥΖΕΥΞΗ

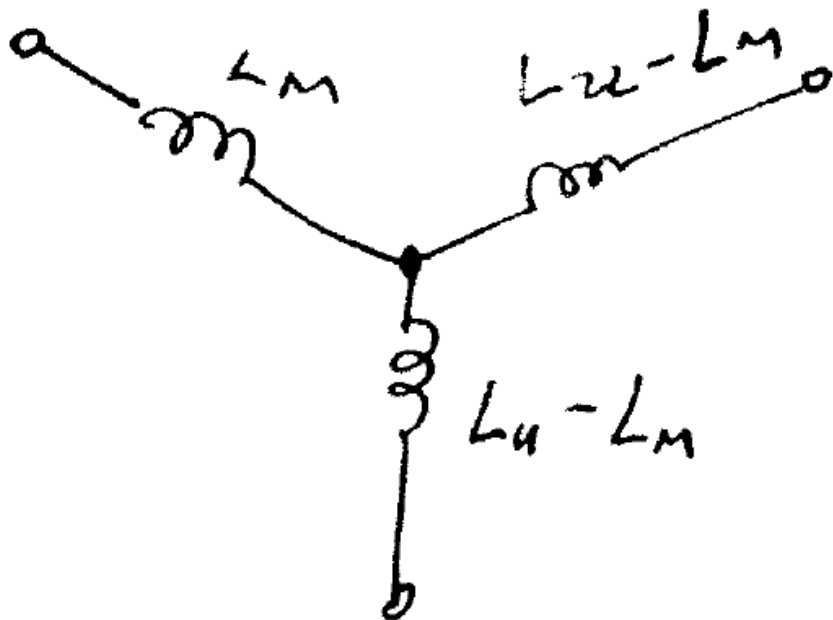
- **ΕΡΩΤΗΣΗ:** Πρόκειται πράγματι για ισοδύναμο;;;



- Γενικά όχι, αλλά...

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΑΣΤΕΡΑ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ-ΕΚΠΛΗΞΗ

- Αρνητική επαγωγή



Φροντίστε έτσι ώστε
να νοκίσει

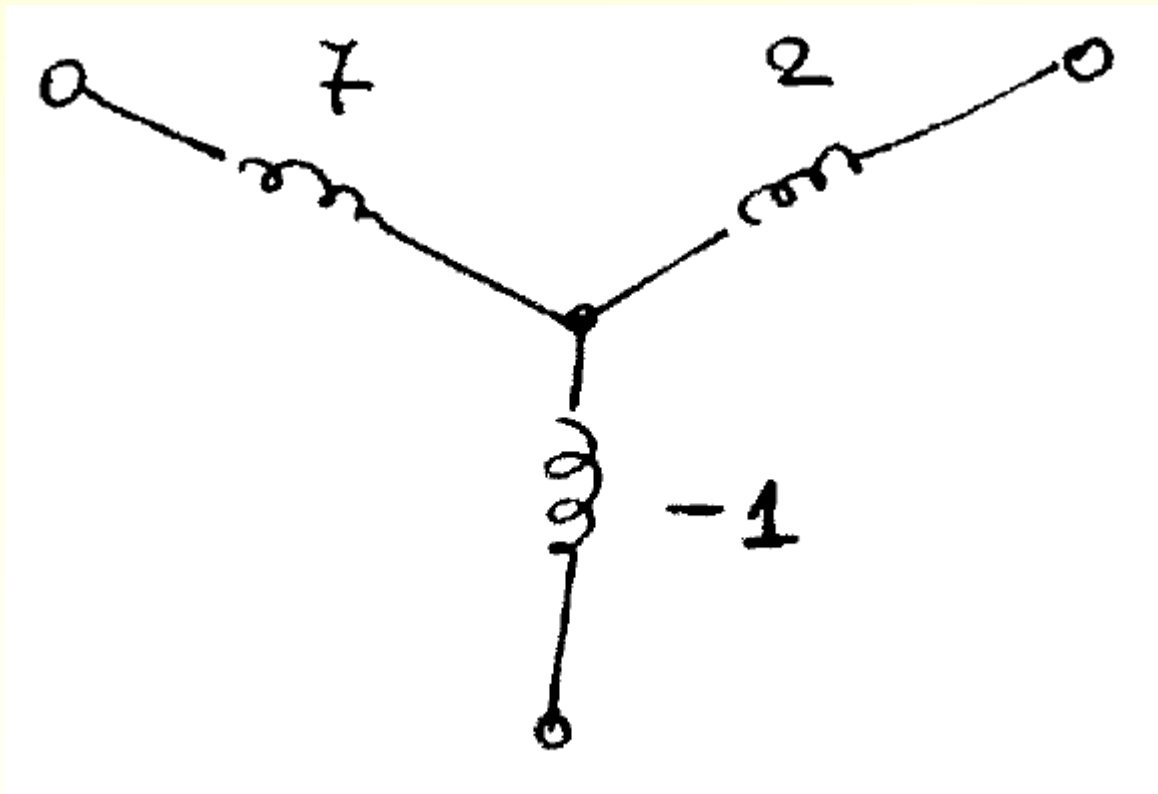
$$L_{11} < L_M \leq \sqrt{L_{11}L_{22}} < L_{22}$$

π.χ.

$$6 < 7 \leq \sqrt{54} = 7.34 < 9$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΑΣΤΕΡΑ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ-ΕΚΠΛΗΞΗ

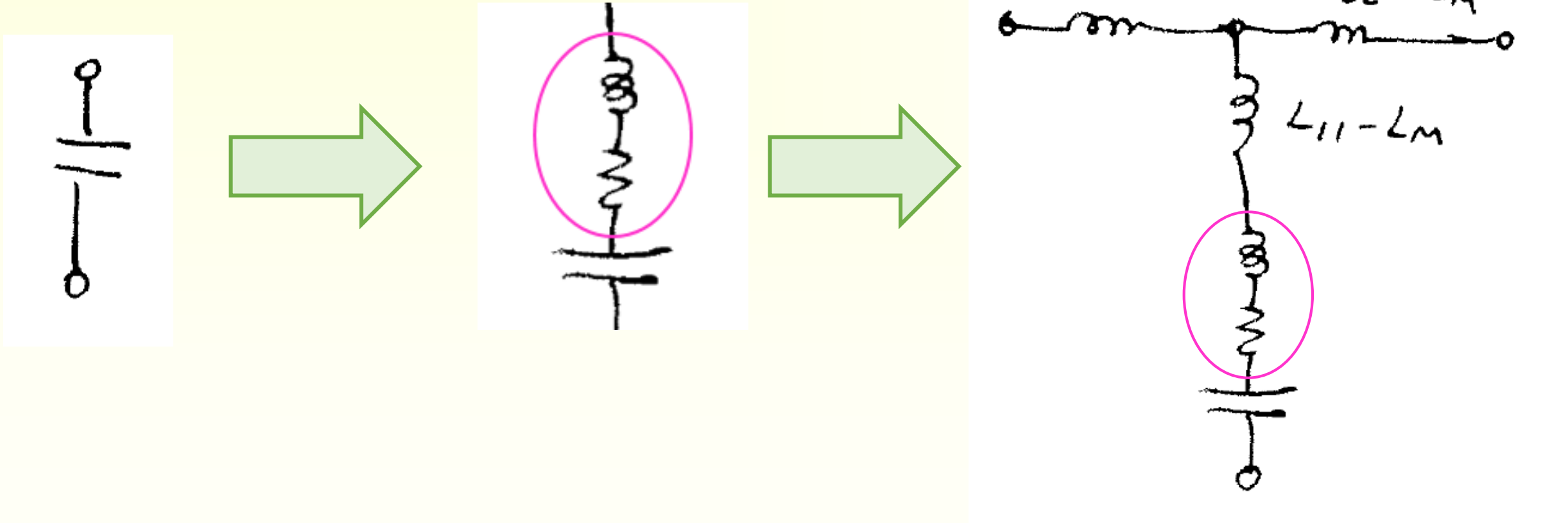
- Αρνητική επαγωγή



- Μόνο ένα σκέλος έχει αρνητική επαγωγή
- Από οποιοδήποτε ζευγάρι ακροδεκτών η επαγωγή είναι θετική

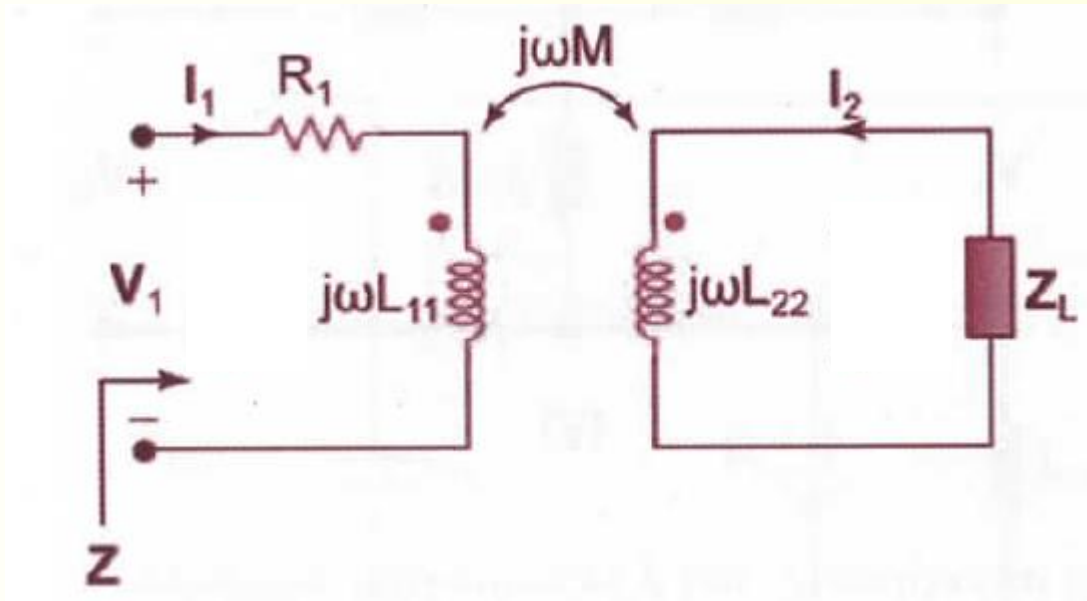
ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΑΣΤΕΡΑ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ-ΕΚΠΛΗΞΗ

- **Χρήση:** Εξάλειψη παρασιτικής επαγωγής σε κυκλώματα υψηλής ποιότητας

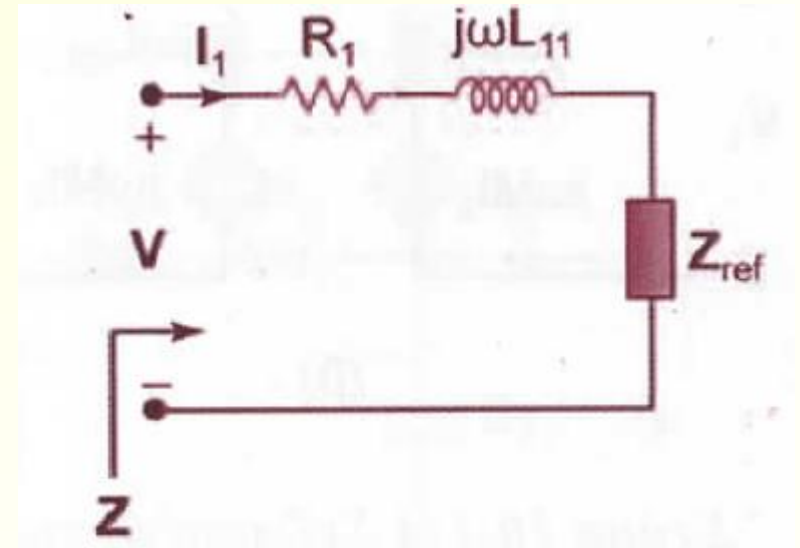


ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΗ ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

- **Ανάκλαση (reflection)**: Πώς φαίνεται από το πρωτεύον η Z_L στο δευτερεύον;



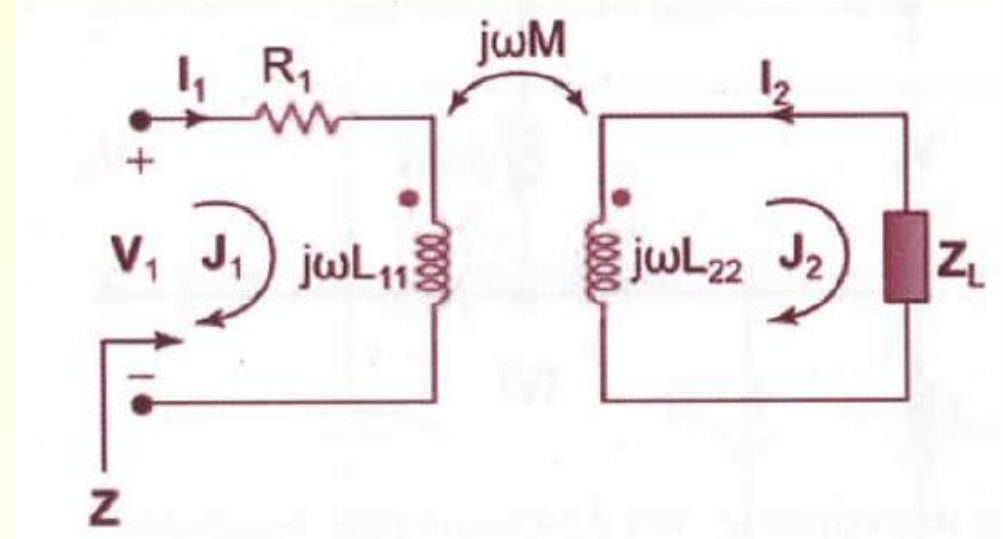
=



ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΗ ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

- **Ανάλυση:** Επιλύουμε το κύκλωμα

$$\begin{aligned}(R_1 + j\omega L_{11})J_1 - j\omega M J_2 &= V_1 \\ -j\omega M J_1 + [j\omega L_{22} + Z_L(j\omega)]J_2 &= 0\end{aligned}$$



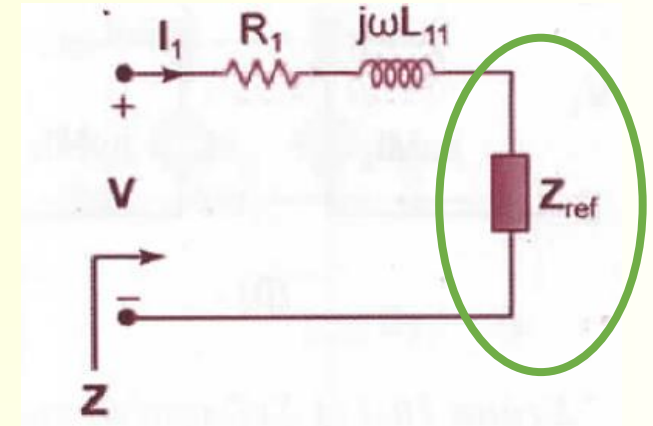
- **ΛΥΣΗ:**

$$J_1 = \frac{j\omega L_{22} + Z_L(j\omega)}{(R_1 + j\omega L_{11})[j\omega L_{22} + Z_L(j\omega)] + \omega^2 M^2} V_1$$

$\Rightarrow$

ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΗ ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

$$\frac{V_1}{J_1} = \dots = R_1 + j\omega L_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_{22} + Z_L(j\omega)}$$



Σύνθετη αντίσταση
με το δευτερεύον
ανοικτό

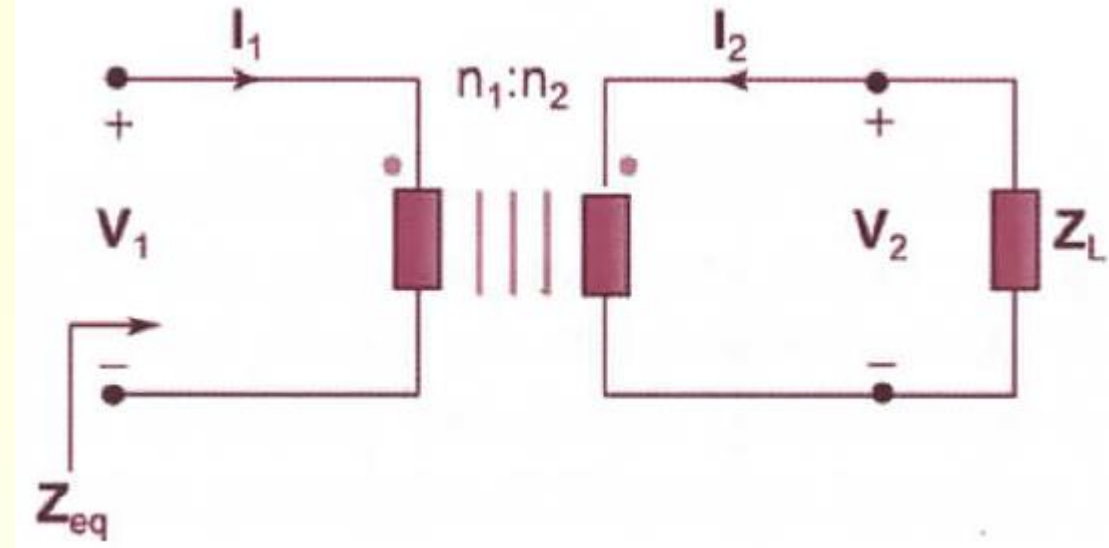
Ανακλώμενη

$$Z_L(j\omega) = R_L + jX_L \Rightarrow$$

$$Z_{\text{reflected}}(j\omega) = \frac{\omega^2 M^2 R_L}{R_L^2 + (\omega L_{22} + X_L)^2} - j \frac{\omega^2 M^2 (\omega L_{22} + X_L)}{R_L^2 + (\omega L_{22} + X_L)^2}$$

ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΗ ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΣΤΟΝ ΙΔΑΝΙΚΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗ

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{και} \quad \frac{I_1}{I_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$



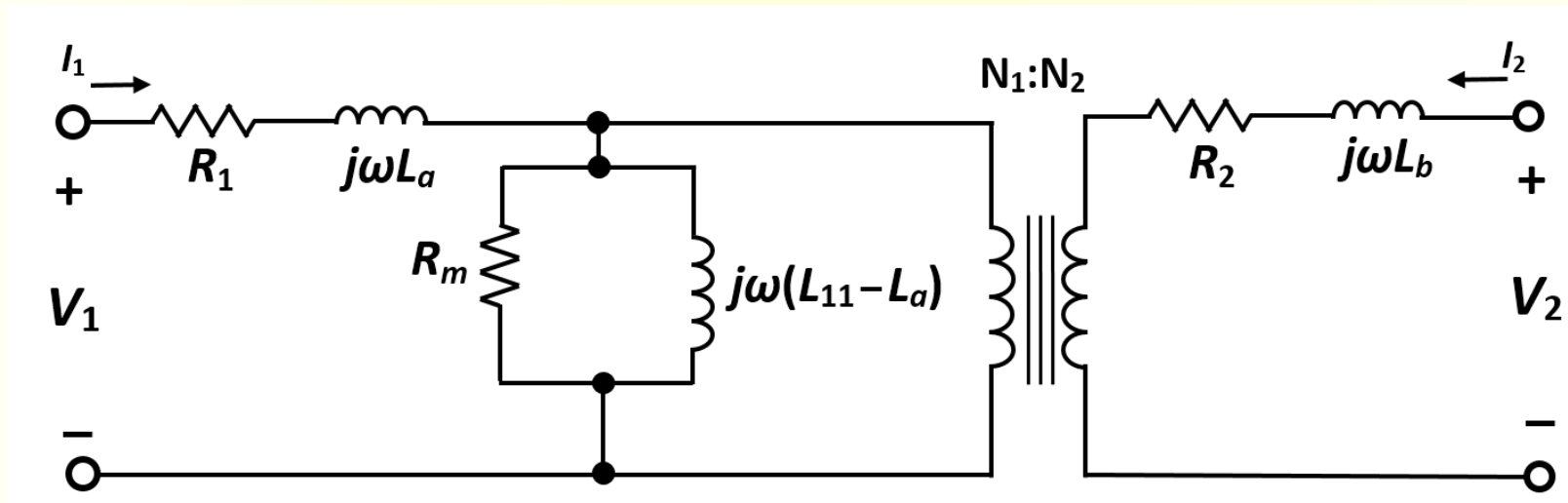
$$Z_{eq}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{n_1 V_2}{n_2}}{-\frac{n_2}{n_1} I_2} = -\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{V_2}{I_2} = -\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{-Z_L(j\omega) I_2}{I_2}$$

Τελικά:

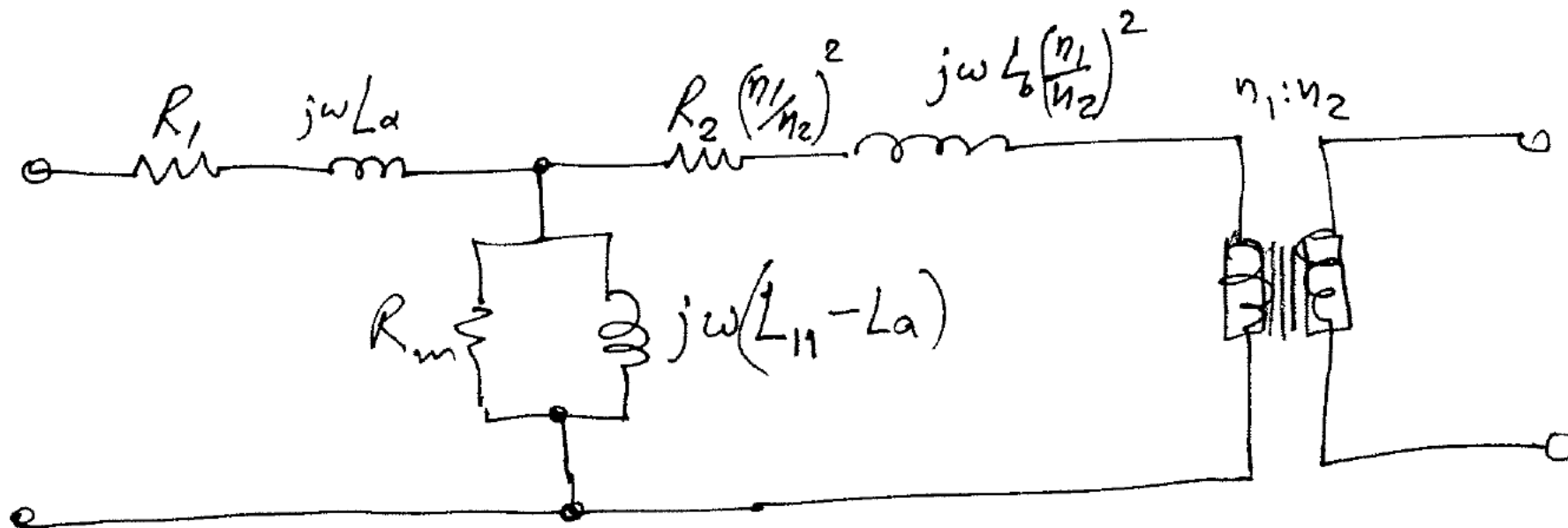
$$Z_{eq}(j\omega) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_L(j\omega)$$

Επηρεάζεται μόνο το μέτρο τής εμπέδησης

ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΗ ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΣΤΟΝ ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗ

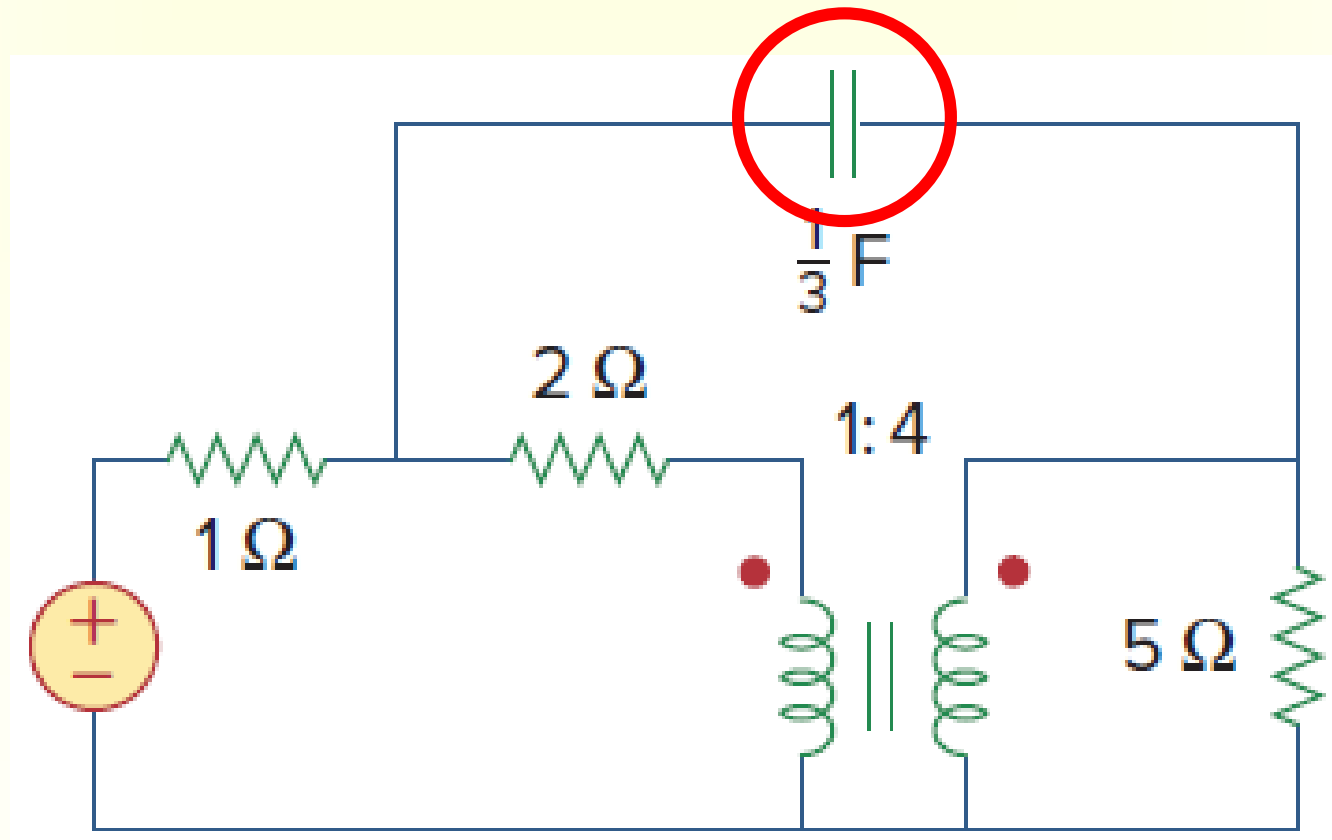


Ανάκλαση του δευτερεύοντος:



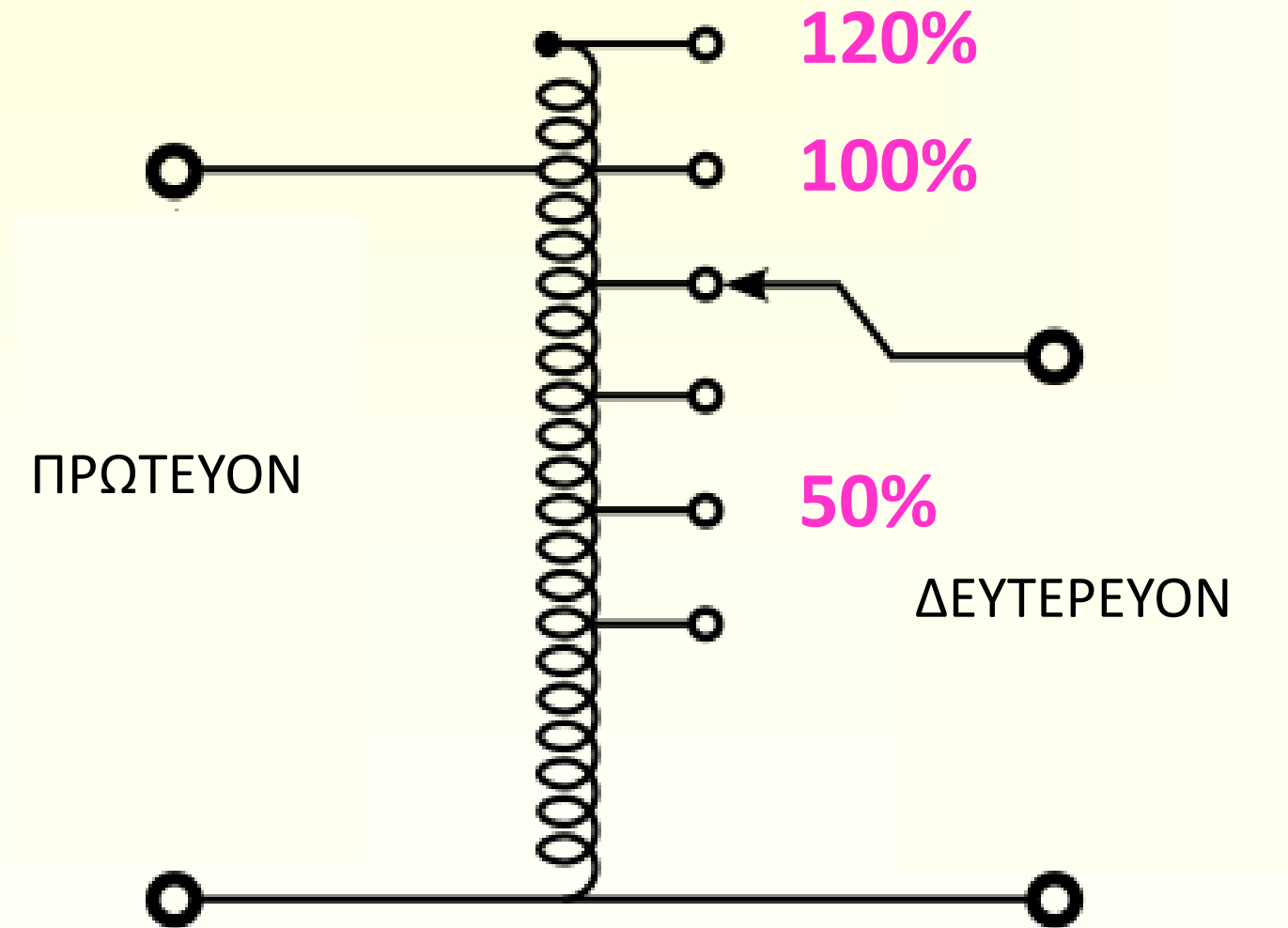
ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΗ ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

ΠΡΟΣΟΧΗ: **ΔΕΝ** επιτρέπεται να γίνει ανάκλαση όταν το πρωτεύον και το δευτερεύον συνδέονται με κάποιον τρόπο



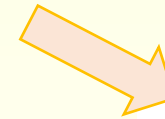
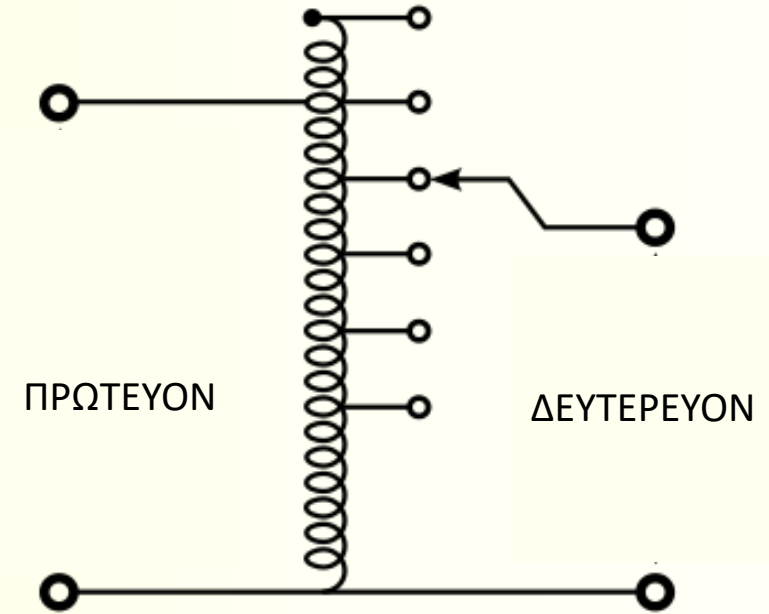
ΑΥΤΟΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ

Ένα πηνίο με λήψεις (taps):



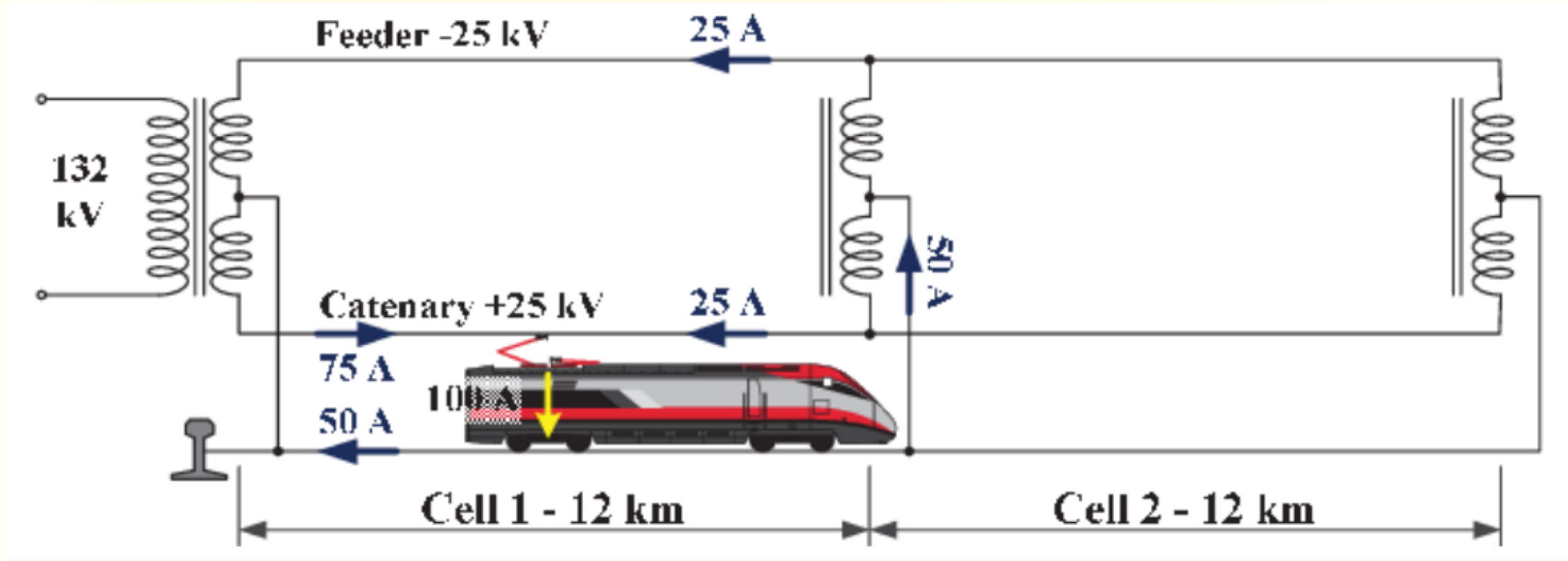
ΑΥΤΟΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ

- Πιο ελαφρύς και πιο φθηνός από ένα «κανονικό» μετασχηματιστή μέχρι λόγους περίπου 3:1
- **ΧΡΗΣΕΙΣ:**
 - Προσαρμογή 200 kV και 400 kV
 - Προσαρμογή εμπέδησης σε ηλεκτροακουστικά συστήματα
 - Ηλεκτρικούς σιδηροδρόμους
- ΠΡΟΣΟΧΗ: Έχουν παρενέργειες



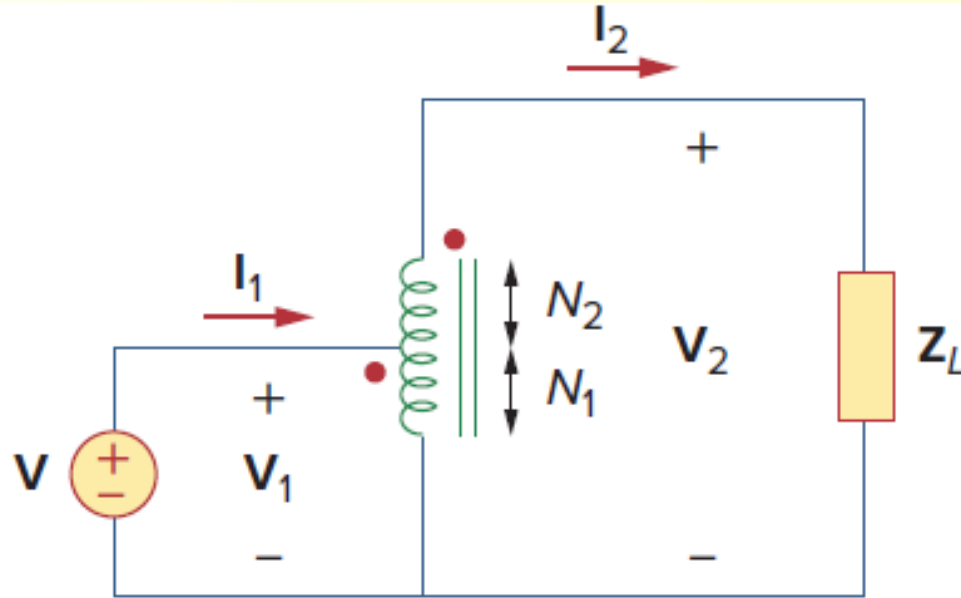
ΑΥΤΟΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ

- **ΧΡΗΣΕΙΣ:**
 - Ηλεκτρικούς σιδηροδρόμους



ΙΔΑΝΙΚΟΣ ΑΥΤΟΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ

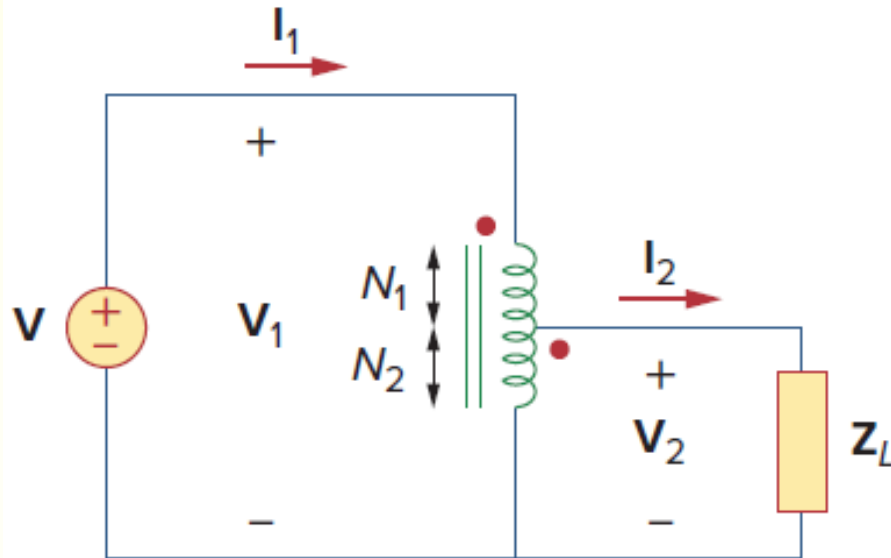
- STEP-UP



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} = 1 + \frac{N_2}{N_1}$$

- STEP-DOWN

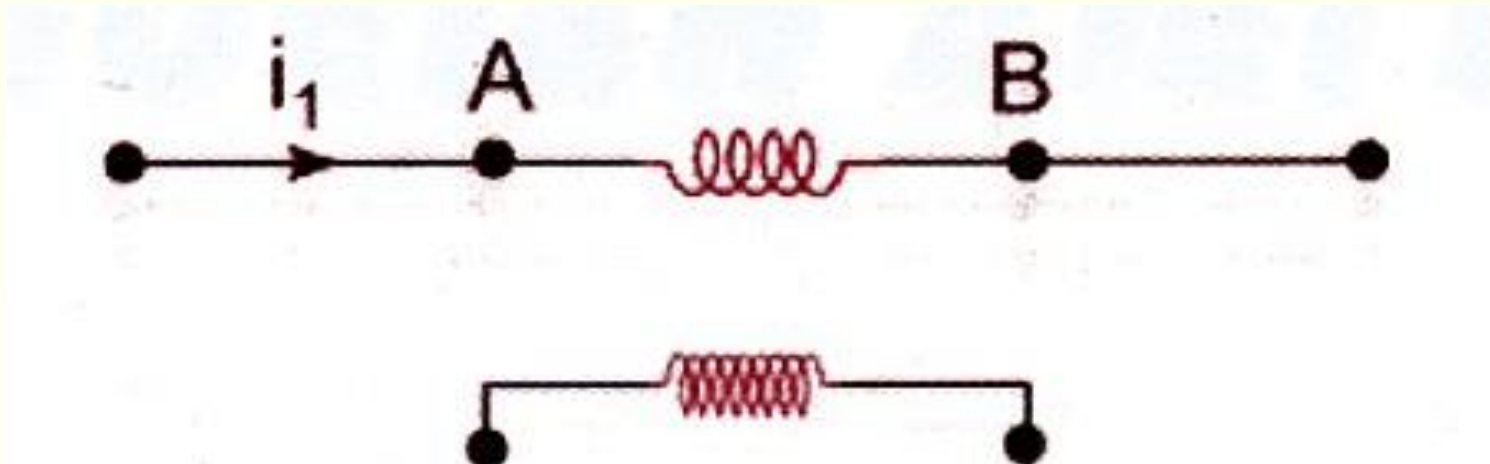


$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

- Ο μετασχηματιστής ρεύματος (μετασχηματιστής έντασης) είναι ένας μετασχηματιστής τού οποίου το **πρωτεύον** έχει λίγες σπείρες από αγωγό σχετικά μεγάλης διατομής, ώστε να έχει **μικρή αντίσταση**
- Το **δευτερεύον** έχει πολλές σπείρες από λεπτό αγωγό

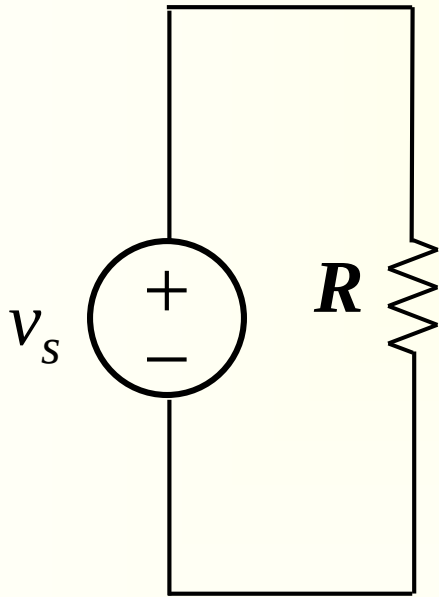


ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ: ΜΕΤΡΗΣΗ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

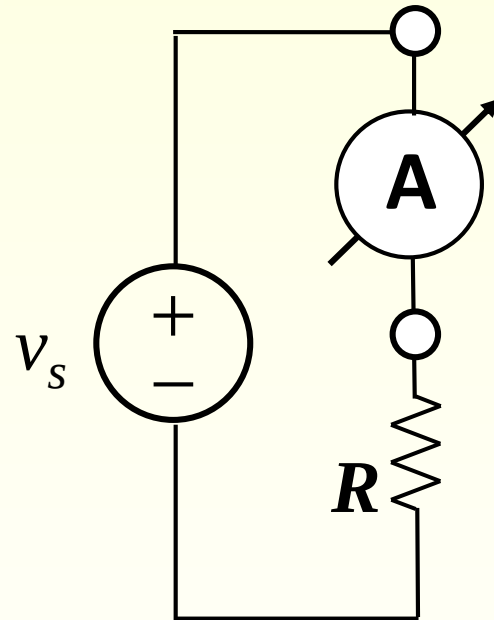
- ...ένα αμπερόμετρο

ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

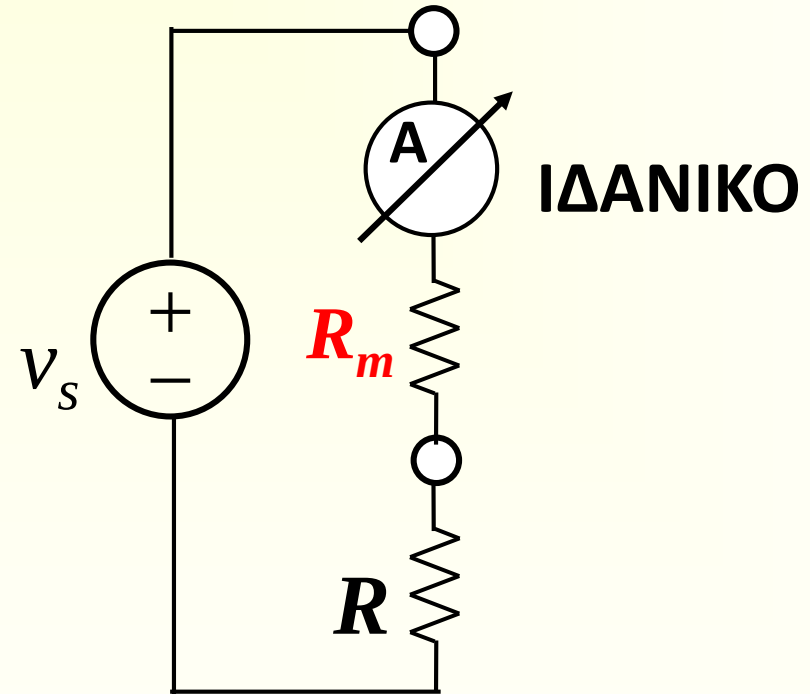
- Θέλουμε να μετρήσουμε το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R οπότε παρεμβάλλουμε **σε σειρά** ένα (πραγματικό) αμπερόμετρο



$$I = \frac{V_s}{R}$$



$$I = \frac{V_s}{R + R_m}$$



⇒ η αντίσταση R_m πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη

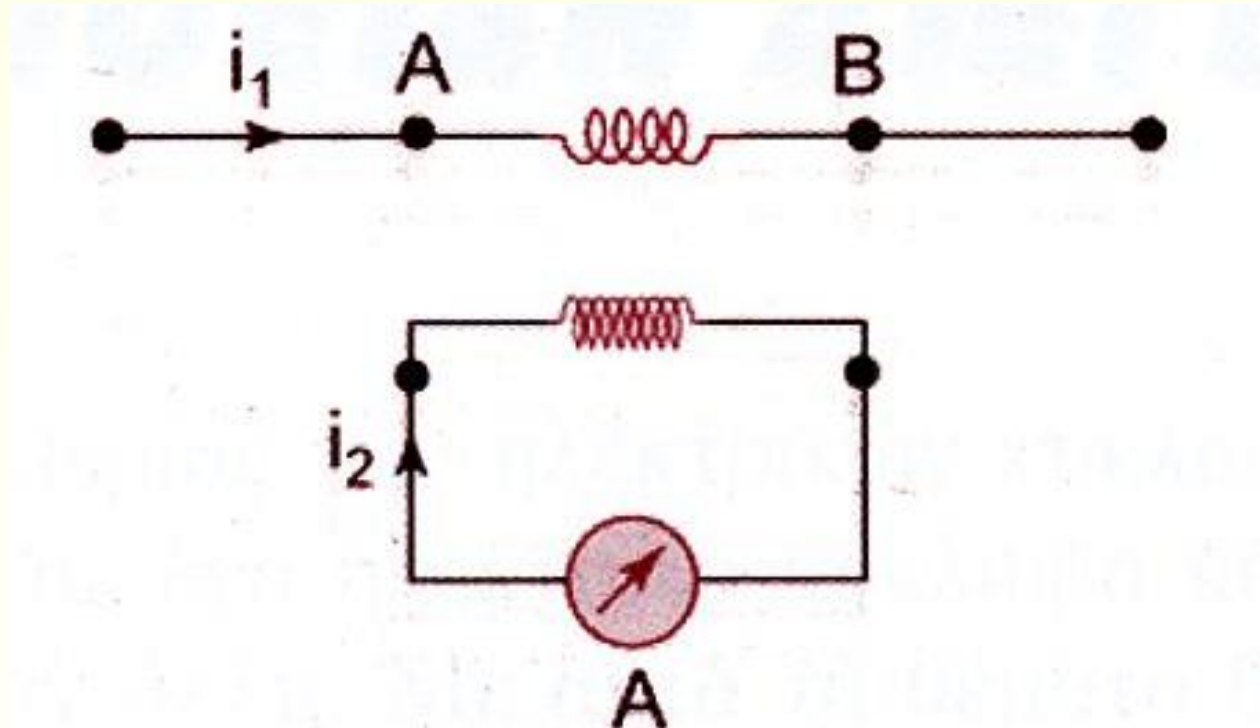
ΑΜΠΕΡΟΜΕΤΡΟ

- Γενικά, είναι αναγκαίο να διακοπεί το κύκλωμα για να παρεμβληθεί το αμπερόμετρο
- → Πρακτικές δυσκολίες
- Μη επεμβατικοί τρόποι π.χ.
«αμπεροτσιμπίδα» (clamp meter)

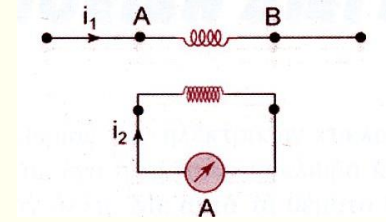


ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

- Το πρωτεύον παρεμβάλλεται στον αγωγό, του οποίου το ρεύμα πρέπει να μετρηθεί, σε σειρά, όπως ένα αμπερόμετρο
- Το δευτερεύον είναι πάντοτε βραχυκυκλωμένο μ' ένα αμπερόμετρο

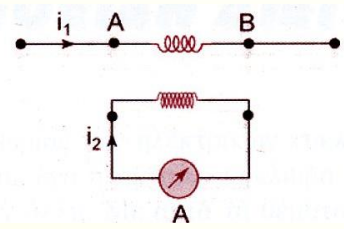


ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ



- Να βρεθεί ο λόγος μετασχηματισμού, ώστε ένα ρεύμα 12.000 A να μπορεί να μετρηθεί με ένα αμπερόμετρο με κλίμακα των 5 A
- Πόση είναι η τάση τού δευτερεύοντος, όταν αυτό είναι ανοικτό;

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ



- Για ευκολότερη ανάλυση, υποθέτουμε ότι ο μετασχηματιστής ρεύματος είναι ιδανικός μετασχηματιστής

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \left| \frac{i_1}{i_2} \right| = \frac{12000}{5} = 2400$$

- Όταν το δευτερεύον είναι ανοικτό, ισχύει η σχέση

$$v_2 = \frac{n_2}{n_1} v_1 = 2400 v_1$$

⇒ ο μετασχηματιστής ρεύματος πρέπει πάντοτε να λειτουργεί με βραχυκυκλωμένο το δευτερεύον

ΤΙ ΕΙΔΑΜΕ

- Σύζευξη πηνίων (αυτεπαγωγή και αμοιβαία επαγωγή)
- Σύμβαση της τελείας
- Τελείες και ρεύματα επιτρέπουν την ανάλυση
- Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής και συντελεστής μαγνητικής σύζευξης
- Μετασχηματιστές
 - Ιδανικοί
 - Με τέλεια σύζευξη
 - Μη ιδανικοί
 - Πραγματικοί
 - Αυτομετασχηματιστής
 - Ρεύματος
- Ισοδύναμο αστέρα
- Ανάκλαση στο πρωτεύον