

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

- **Μετασχηματισμοί:** Μετατροπή ενός μαθηματικού αντικειμένου (π.χ. συνάρτηση, εξίσωση, κλπ.) σε μια άλλη μορφή
- **Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί:** Απεικόνιση ή αντιστοίχιση μιας συνάρτησης, εξίσωσης, κλπ. από ένα πεδίο ορισμού σε ένα άλλο που επιτρέπει ευκολότερο χειρισμό
- **Παραδείγματα** ολοκληρωτικών μετασχηματισμών:
 - Fourier (++), Laplace, Hankel, Hilbert, ... (≈ 15)



$$H(u)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

- Έχουμε ήδη γνωρίσει ένα μετασχηματισμό:
- της ημιτονοειδούς συνάρτησης από το πεδίο χρόνου (3 παράμετροι) στο πεδίο συχνότητας (2 παράμετροι) μέσω των φασόρων
- Με τον μετασχηματισμό αυτό, μετατρέπαμε διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές όταν η είσοδος ήταν ημιτονοειδής και μας ενδιέφερε μόνο η μόνιμη κατάσταση (ΜΗΚ)
- Τώρα θέλουμε να επιτύχουμε μια αντίστοιχη ευκολία για γενικές εισόδους αλλά και για το μεταβατικό στάδιο
- Το κατάλληλο εργαλείο αποδείχθηκε ότι είναι ο **μετασχηματισμός Laplace**

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας **ολοκληρωτικός μετασχηματισμός**
- Οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί παίρνουν τη μορφή:

$$f(t) \rightarrow F(s), \quad s \in \mathbb{C}$$

$$F(s) = \int_a^b f(t) K(t, s) dt$$

- Όπου $K(t, s)$ είναι ο **πυρήνας (kernel)** τού μετασχηματισμού και αποτελεί το αντικείμενο σχεδιασμού για συγκεκριμένες ιδιότητες και απαιτήσεις

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE - ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ

- Για γενικότητα θέτουμε τα όρια: $a = 0$, $b = \infty$ (περιοριζόμενοι έτσι στον μονόπλευρο μετ. Laplace)
- Για να συμπεριλάβουμε «απότομα» φαινόμενα στην αρχή τής λειτουργίας, τελικά θέτουμε $a = 0^-$
- **ΒΑΣΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ:** Η διαφόριση/παραγωγή να μετατραπεί σε πολλαπλασιασμό

$$\frac{d f(t)}{dt} \rightarrow s F(s)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE - ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

$$s F(s) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d f(t)}{dt} k(t, s) dt = \int_{0^-}^{\infty} k(t, s) df$$

- Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$s F(s) = f(t) k(t, s) \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t) \frac{dk(t, s)}{dt} dt$$

- Αγνοούμε τον πρώτο παράγοντα προσωρινά επειδή αποτελείται από σταθερές που δεν επηρεάζουν τον μετασχηματισμό, οπότε παίρνουμε

$$s F(s) = - \int_{0^-}^{\infty} f(t) \frac{dk(t, s)}{dt} dt$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE - ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

- Ισχύει επίσης από τον ορισμό:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) k(t, s) dt \Rightarrow s F(s) = \int_{0^-}^{\infty} s f(t) k(t, s) dt$$

- Οπότε έχουμε δυο διαφορετικές «απόψεις» για την ίδια ποσότητα

$$s F(s) = \int_{0^-}^{\infty} s f(t) k(t, s) dt \quad s F(s) = - \int_{0^-}^{\infty} f(t) \frac{dk(t, s)}{dt} dt$$

- Άρα, πρέπει:

$$s k(t, s) = - \frac{dk(t, s)}{dt} \Rightarrow k(t, s) = e^{-st}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας **ολοκληρωτικός μετασχηματισμός** που ορίζεται από τη σχέση

$$f(t) \rightarrow F(s), \quad s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$$

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \triangleq \mathcal{L}\{f(t)\}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$k(t, s) = e^{-st}$$

- Η πρώτη εφαρμογή θα είναι για την επιβεβαίωση του αρχικού στόχου (διαφόριση/παραγώγιση)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} df = f(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t) \frac{de^{-st}}{dt} dt \\ &= f(\infty) e^{-\infty} - f(0^-) e^{0^-} - \int_{0^-}^{\infty} f(t) (-s) e^{-st} dt \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΥΠΑΡΞΗ ΜΕΤ. LAPLACE

$$f(t) = O(e^{Ct})$$

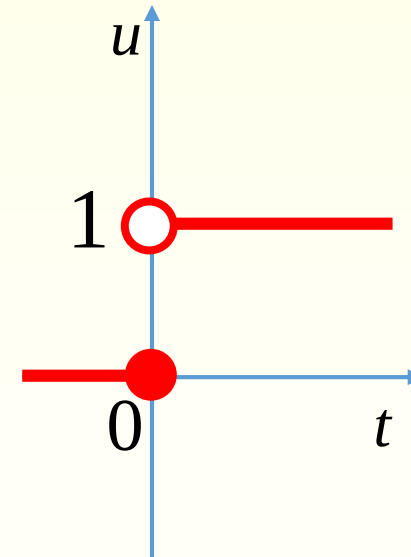
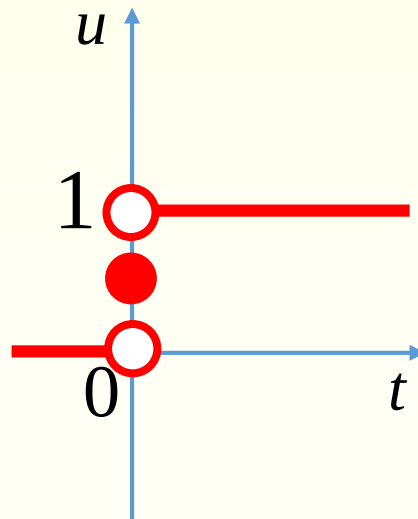
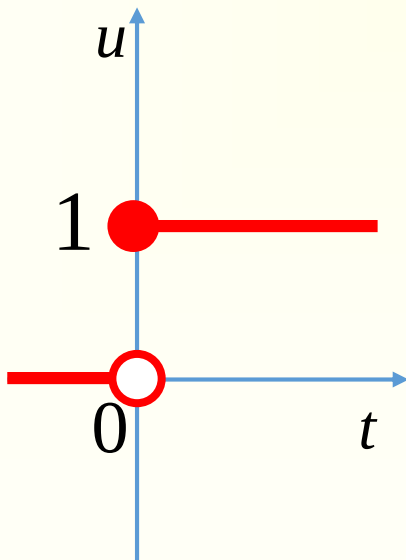
- Αν η f είναι κατά τμήματα συνεχής και ισχύει ότι $|f(t)| < Me^{Ct}$ τότε ο Μετασχηματισμός Laplace συγκλίνει για $\operatorname{Re}\{s\} > C$

Παράδειγμα μη ύπαρξης: το σήμα/συνάρτηση e^{at^2}
(τέτοιο σήμα δεν υπάρχει στην πράξη)

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΤ. LAPLACE

- Συναρτήσεις με **ασήμαντες διαφορές** έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace
- Παράδειγμα: η βηματική συνάρτηση $u(t)$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤ. LAPLACE

- Η εγγύηση της μοναδικότητας και της ύπαρξης οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μπορεί να οριστεί και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

- με ορισμό

$$f(t) \triangleq \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤ. LAPLACE

- Δεν χρησιμοποιούμε τον ορισμό αλλά πίνακες με μετασχηματισμούς στοιχειωδών συναρτήσεων σε συνδυασμό με μαθηματικές ιδιότητες του μετασχηματισμού

Properties of the Laplace transform.

Property	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Frequency shift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$

TABLE 15.2

Laplace transform pairs.*

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤ. LAPLACE

- Ο πίνακας που συνοδεύει τα θέματα των εξετάσεων

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1, t > 0$	$1/s$
$u(t-k)$	e^{-ks} / s
e^{-kt}	$\frac{1}{s+k}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad n > 0$
$t^n e^{-kt}$	$\frac{n!}{(s+k)^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{(s+k)^{n+1}} \quad n > 0$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 1: ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

- Μπορεί να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

όπου a_1 και a_2 σταθερές

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\mathcal{L}[\cos \omega t u(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]$$

$$e^{-at}$$

$$\frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t u(t)] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 2: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

- Είδαμε πριν ότι

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

Επαναλαμβάνοντας:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

- ΓΕΝΙΚΑ

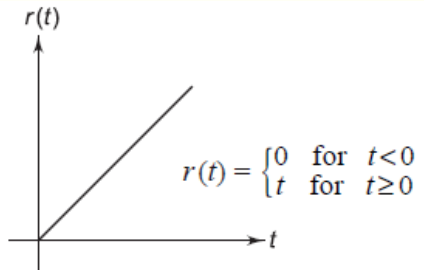
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0^-)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ML για τη **ράμπα** $= t$ = ολοκλήρωση της βηματικής $u(t)$



$$\mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t u(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

- **ΓΕΝΙΚΑ:**

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)dt$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 4: ΑΛΛΑΓΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΧΡΟΝΟΥ

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\mathcal{L}[\sin \omega t u(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin 2\omega t u(t)] = \frac{1}{2} \frac{\omega}{(s/2)^2 + \omega^2} = \frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5: ΜΛ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- Περιοδική συνάρτηση με περίοδο a : όταν $f(t + a) = f(t)$
- Τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^a f(t)e^{-st} dt + \int_a^{2a} f(t)e^{-st} dt + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{na}^{(n+1)a} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

- Θέτουμε $t' = t - n \cdot a$ και ολοκληρώνουμε έναν όρο:

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5: ΜΛ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$\int_{na}^{(n+1)a} f(t) e^{-st} dt = \int_0^a f(t' + na) e^{-st' - nas} dt' = \int_0^a f(t') e^{-st' - nas} dt'$$

- Διώχνοντας τον τόνο, παίρνουμε:

$$\mathcal{L}(f) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-san} \right) \int_0^a f(t) e^{-st} dt$$

- Χρησιμοποιούμε τη γνωστή δυναμοσειρά
- και παίρνουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-san} = \frac{1}{1 - e^{-sa}}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5: ML ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- Μόλις αποδείξαμε ότι για περιοδική f :

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-as}} \int_0^a f(t) e^{-st} dt$$

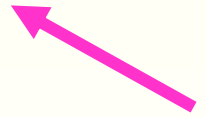
- Δηλαδή, ο ML μιας περιοδικής συνάρτησης f με περίοδο a είναι ο ML τής πρώτης περιόδου τής f διαιρεμένος με $(1 - e^{-as})$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 6: ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ (ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ) ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 7: ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ (ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ) ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(z) dz$$


ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ

$$\mathcal{L}[f(t - a)u(t - a)] = e^{-as} F(s)$$

- Δηλαδή, αν μια συνάρτηση έχει καθυστέρηση a , τότε ο ΜΛ της πολλαπλαζεται με e^{-as}
- Παράδειγμα

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{tu(t-1) - 1u(t-1)\} = e^{-s} \frac{1+s}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\} = e^{-s} \frac{1}{s^2}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)u(t)] = F(s + a)$$

- Παράδειγμα

$$\cos \omega t u(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\sin \omega t u(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t u(t)] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t u(t)] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

- Παράδειγμα

$$f(t) = e^{-2t} \cos 10t u(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 10^2}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 4s + 104} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/s}{1 + 4/s + 104/s^2} = 1 \end{aligned}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

- **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Για να ισχύει, πρέπει όλες οι ρίζες τού παρονομαστή τού $F(s)$ να βρίσκονται στο ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο εκτός από το πολύ μία που μπορεί να είναι 0

- **Παράδειγμα**

$$f(t) = e^{-2t} \sin 5t u(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{5}{(s+2)^2 + 5^2}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s}{s^2 + 4s + 29} = 0$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

• Παράδειγμα

$$f(t) = \sin t \, u(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

- Όμως, το ημίτονο ταλαντώνεται μεταξύ +1 και −1 και δεν έχει όριο!
- Το θεώρημα δεν πρέπει να χρησιμοποιηθεί επειδή οι ρίζες του παρονομαστή του $F(s)$ είναι $\pm j$ και βρίσκονται επάνω στον φανταστικό άξονα που δεν ανήκει στο ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5: ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ


$$F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]$$

- Προσεχώς...

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0^-)$$

ΜΛ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-as}} \int_0^a f(t) e^{-st} dt = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-as}}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

ΑΛΛΑΓΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΧΡΟΝΟΥ

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(z) dz$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

$$F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ

$$\mathcal{L}[f(t - a)u(t - a)] = e^{-as} F(s)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)u(t)] = F(s + a)$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Οι ρητές πολυωνυμικές συναρτήσεις αποτελούν τη συντριπτική πλειοψηφία των συναρτήσεων για τις οποίες θα χρειαστούμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace
- Αξίζει λοιπόν να τις μελετήσουμε σε βάθος
- Οι **ρητές πολυωνυμικές συναρτήσεις** (rational polynomial functions) παίρνουν τη μορφή

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

- p_i : **πόλοι** (poles) [τιμές για τις οποίες $F(s) \rightarrow \infty$]
- z_i : **μηδενικά** (zeros) [τιμές για τις οποίες $F(s) \rightarrow 0$]

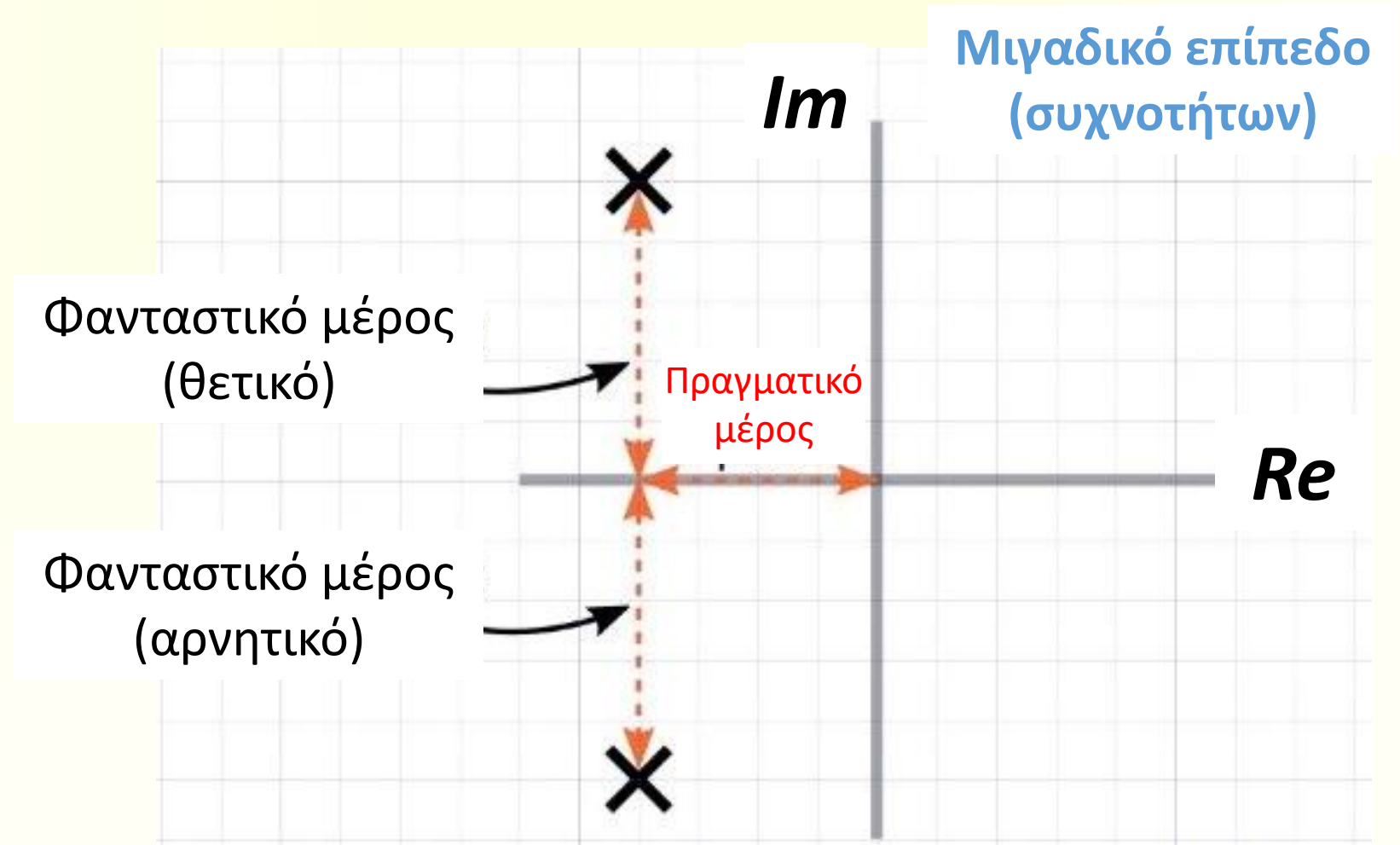
ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

• p_i : πόλοι **X**

• z_i : μηδενικά **O**

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

• **Παράδειγμα:**
2 μιγαδικοί πόλοι



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

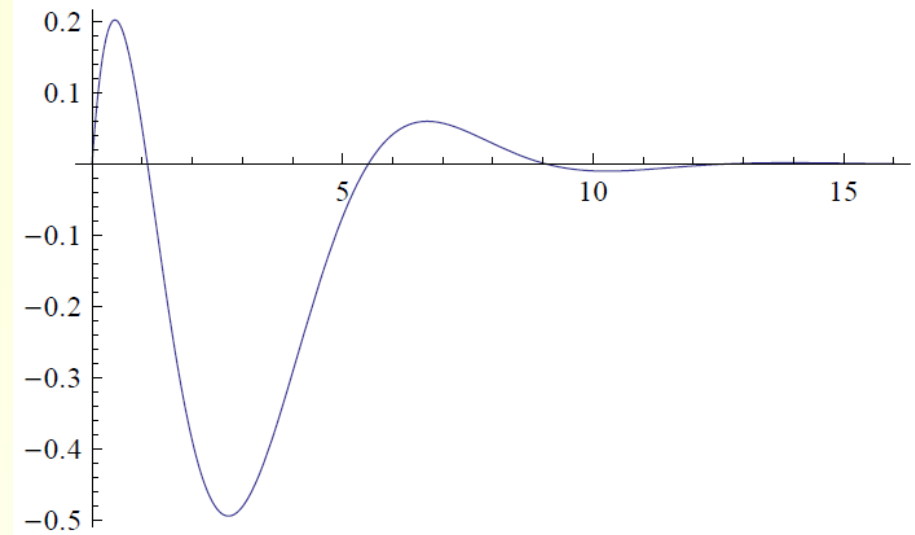
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$x(t) = -2e^{-t} + 2e^{-t/2} \cos\left[\frac{\sqrt{3}t}{2}\right]$$

$$X(s) = \frac{-1 + s}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}$$

Zeros $\{X(s)\}$: $\{s \rightarrow 1.\}$

Poles $\{X(s)\}$: $\{s \rightarrow -1.\}, \{s \rightarrow -0.5 - 0.866025i\}, \{s \rightarrow -0.5 + 0.866025i\}$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

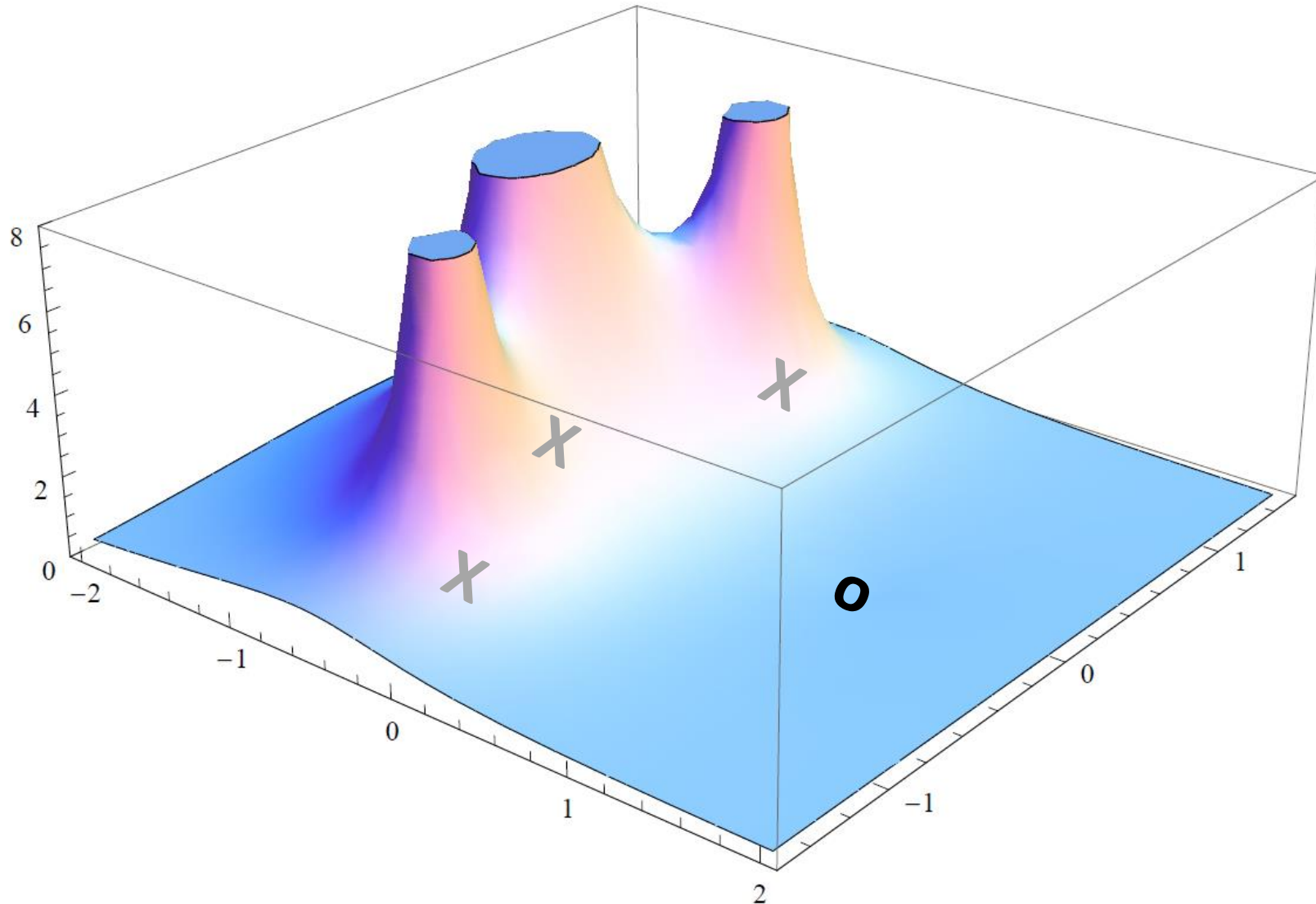
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$X(s) = \frac{-1 + s}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}$$

Zeros{X(s)}: {{s → 1.}}

Poles{X(s)}: {{s → -1.}, {s → -0.5 - 0.866025 i}, {s → -0.5 + 0.866025 i}}

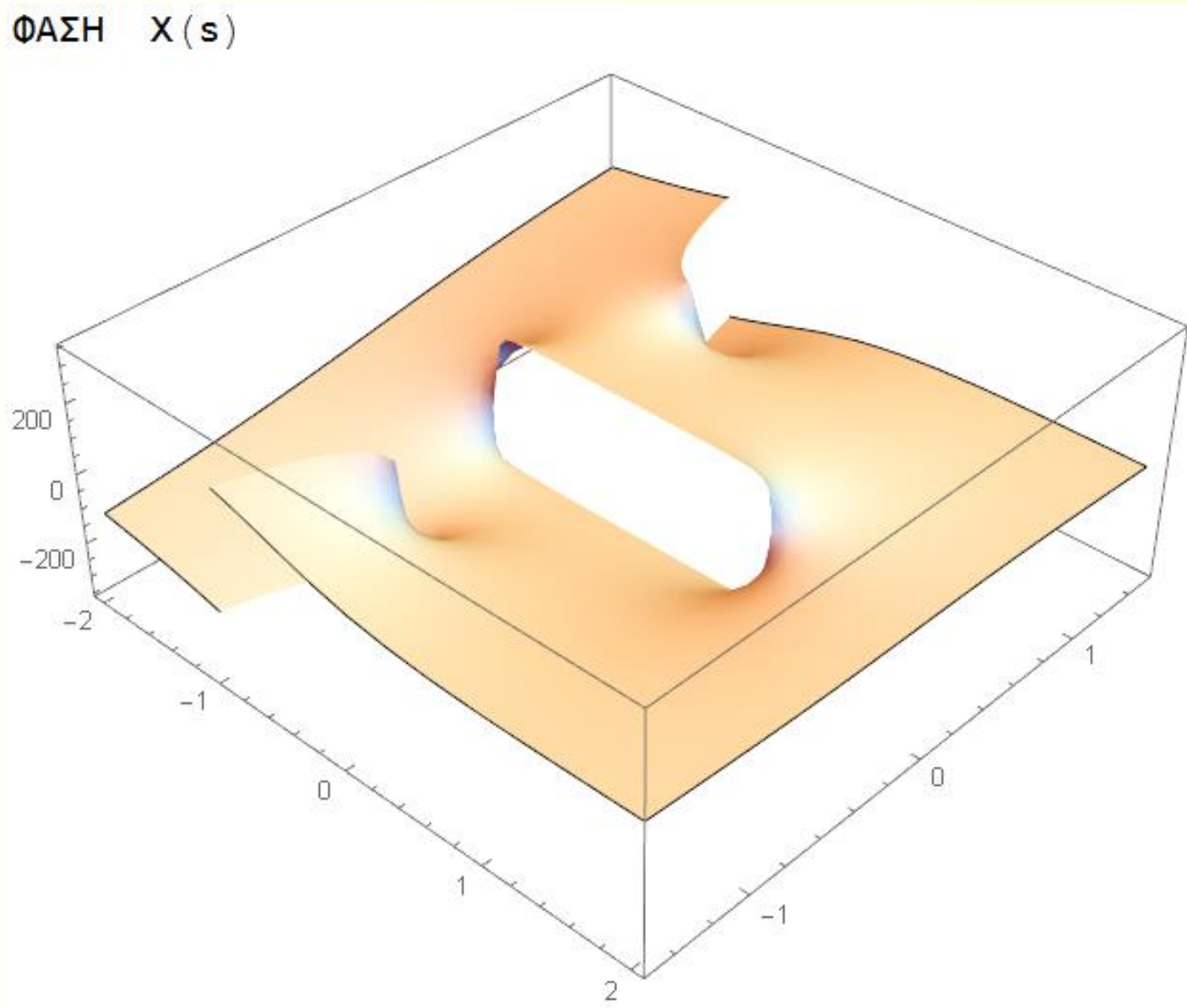
ΜΕΤΡΟ $X(s)$



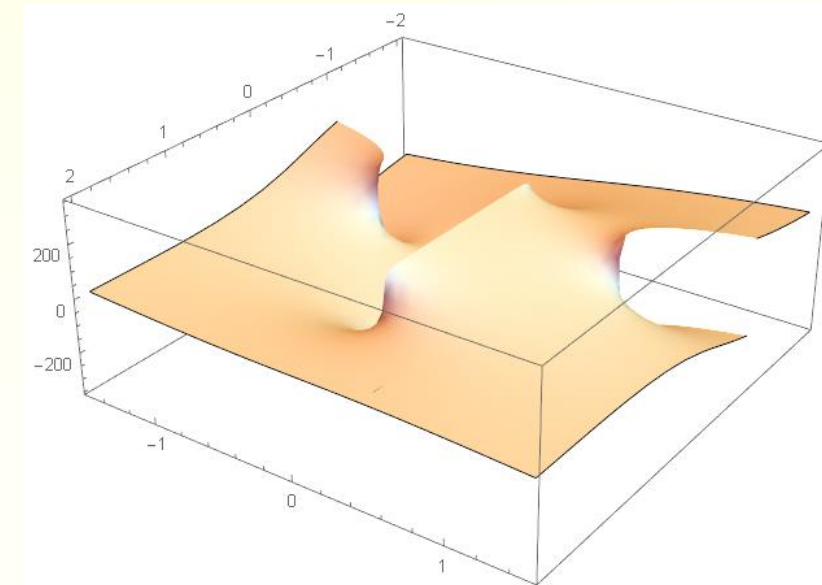
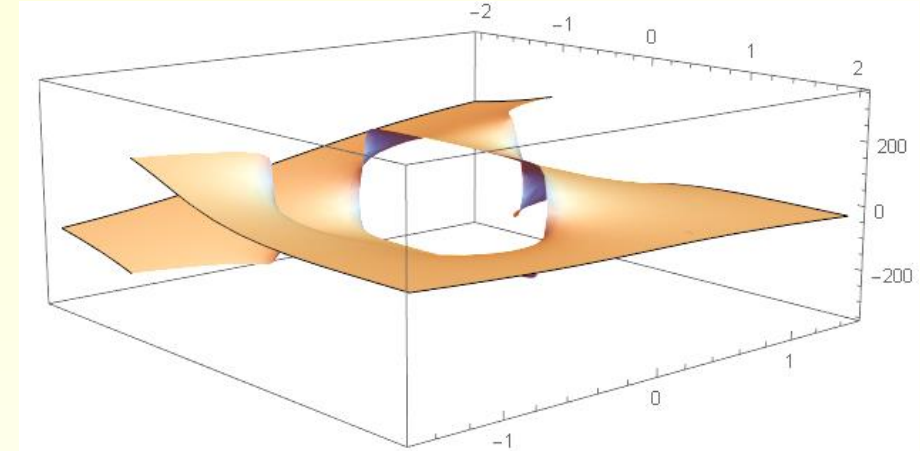
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΦΑΣΗ $X(s)$

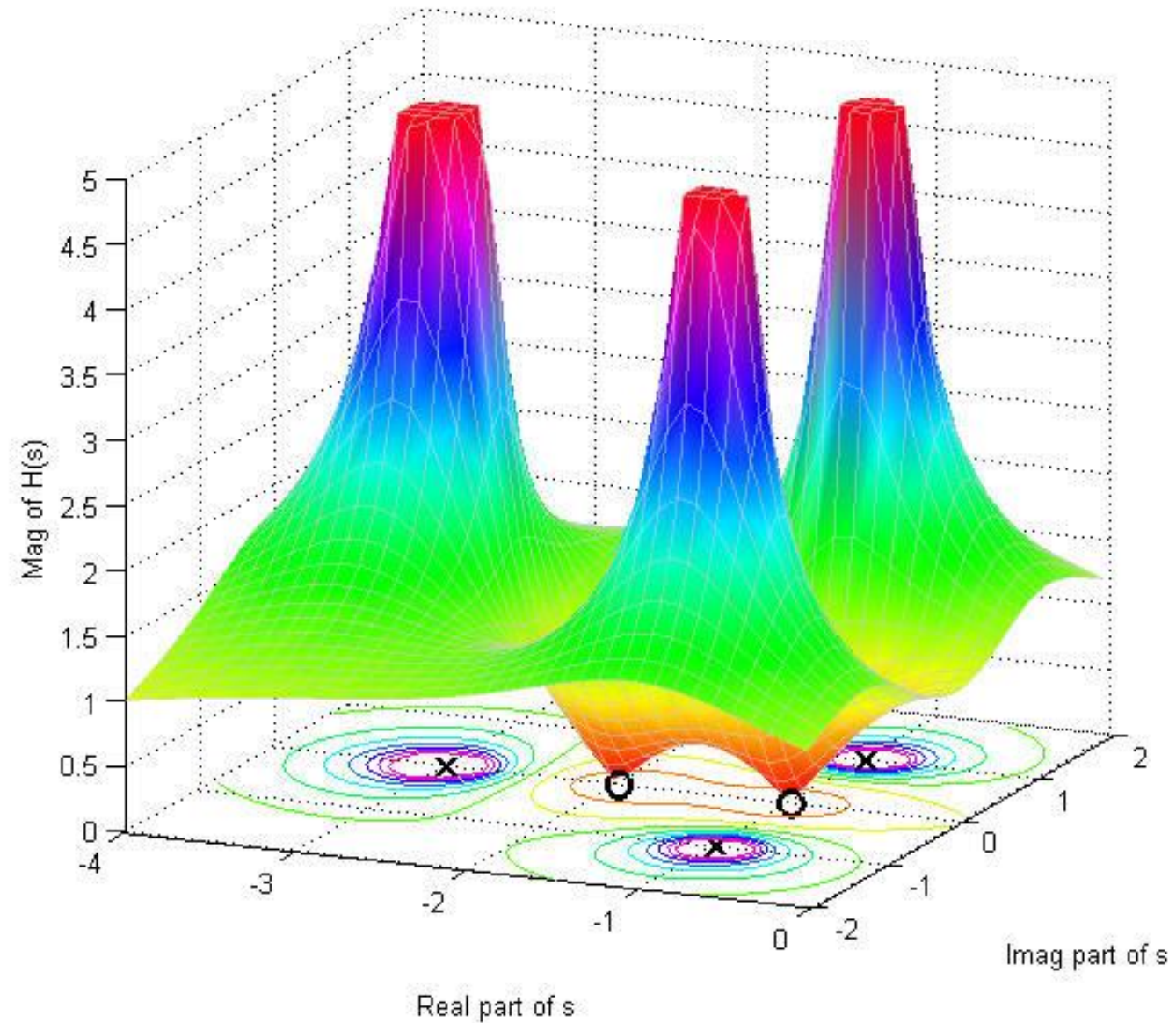
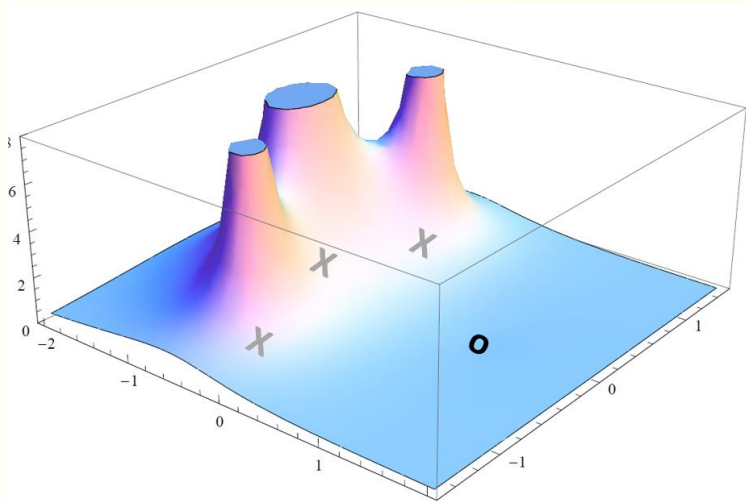


$$X(s) = \frac{-1 + s}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}$$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Οι ρητές πολυωνυμικές συναρτήσεις διακρίνονται σε **γνήσιες** (proper) και **μη γνήσιες** (improper)
- **Γνήσιες**: Όταν ο βαθμός του πολωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του πολωνύμου του παρονομαστή: $m < n$ ή $\deg\{N(s)\} < \deg\{D(s)\}$
- Μια **μη γνήσια** ρητή συνάρτηση μπορεί να μετατραπεί σε άθροισμα ενός πολωνύμου και μιας γνήσιας ρητής συνάρτησης εκτελώντας απλά τη διαίρεση των πολωνύμων της

$$\frac{s^4 + 13s^3 + 66s^2 + 200s + 300}{s^2 + 9s + 20} = s^2 + 4s + 10 + \frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20}$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Οι τεχνικές για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ρητών πολυωνυμικών συναρτήσεων που θα δούμε, εφαρμόζονται **μόνο σε γνήσιες ρητές συναρτήσεις**

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Οι ρίζες τού παρονομαστή $D(s)$ («πόλοι») έχουν καίριο ρόλο
- Θα ξεχωρίσουμε **4 περιπτώσεις**:
 1. Πραγματικές και διακριτές ρίζες
 2. Μιγαδικές και διακριτές ρίζες
 3. Πραγματικές και επαναλαμβανόμενες ρίζες
 4. Μιγαδικές και επαναλαμβανόμενες ρίζες
- Θα εξετάσουμε κάθε περίπτωση με τη βοήθεια ενός παραδείγματος

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Η τεχνική τής «**διάσπασης σε απλά κλάσματα**» (partial fraction expansion) που θα παρουσιάσουμε βασίζεται στην απλοποίηση της ρητής συνάρτησης στα απλούστερα δυνατά κλάσματα των οποίων ο αντίστροφος μετ. Laplace υπάρχει έτοιμος σε πίνακα
- Η διάσπαση σε απλά κλάσματα υλοποιείται αποτελεσματικά με τη μέθοδο των **υπολοίπων** (residues)

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6}$$

- Στόχος μας το K_1
- Πολλ/ζουμε με s (δηλ. τον παρονομαστή τού στόχου) και τα δυο μέλη και υπολογίζουμε στο $s = 0$:

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{(s+8)(s+6)} \right|_{s=0} \equiv K_1 + \left. \frac{K_2 s}{s+8} \right|_{s=0} + \left. \frac{K_3 s}{s+6} \right|_{s=0}$$

$$\frac{96(5)(12)}{8(6)} \equiv K_1 = 120$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{\textcircled{K_2}}{s+8} + \frac{K_3}{s+6}$$

- Στόχος μας το K_2
- Πολλ/ζουμε με $s+8$ και τα δυο μέλη και υπολογίζουμε στο $s = -8$:

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+6)} \right|_{s=-8} \equiv \left. \frac{K_1(s+8)}{s} \right|_{s=-8} + K_2 + \left. \frac{K_3(s+8)}{(s+6)} \right|_{s=-8}$$

$$\frac{96(-3)(4)}{(-8)(-2)} = K_2 = -72$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6}$$

- Στόχος μας το K_3
- Πολλ/ζουμε με $s+6$ και τα δυο μέλη και υπολογίζουμε στο $s = -6$:

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)} \right|_{s=-6} = K_3 = 48$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Τελικά:

$$\frac{96(s + 5)(s + 12)}{s(s + 8)(s + 6)} \equiv \frac{120}{s} + \frac{48}{s + 6} - \frac{72}{s + 8}$$

- Και από τον πίνακα και τις ιδιότητες:

$$e^{-at} \qquad \frac{1}{s + a}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{96(s + 5)(s + 12)}{s(s + 8)(s + 6)} \right\} = (120 + 48e^{-6t} - 72e^{-8t})u(t)$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

[ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΠΡΟΦΑΝΩΣ]

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Η μόνη διαφορά με το προηγούμενο είναι ότι τώρα χειριζόμαστε μιγαδικούς αριθμούς
- Παράδειγμα:

$$F(s) = \frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)}$$

$$s^2 + 6s + 25 = (s + 3 - j4)(s + 3 + j4)$$

- Μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)} \equiv \frac{K_1}{s + 6} + \frac{K_2}{s + 3 - j4} + \frac{K_3}{s + 3 + j4}$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$\frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)} \equiv \frac{\overset{\textcircled{+}}{K_1}}{s + 6} + \frac{K_2}{s + 3 - j4} + \frac{K_3}{s + 3 + j4}$$

- Στόχος μας το K_1
- Πολλ/ζουμε με $(s+6)$ και τα δυο μέλη και υπολογίζουμε στο $s = -6$:
- Θα πάρουμε:

$$K_1 = \frac{100(s + 3)}{s^2 + 6s + 25} \bigg|_{s=-6} = \frac{100(-3)}{25} = -12$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$\frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)} \equiv \frac{K_1}{s + 6} + \frac{K_2}{s + 3 - j4} + \frac{K_3}{s + 3 + j4}$$

- Στόχος μας το K_2
- Πολλ/ζουμε με τον παρονομαστή τού στόχου $(s + 3 - j4)$ και τα δυο μέλη και υπολογίζουμε στο $s = -3 + j4$:
- Θα πάρουμε:

$$K_2 = \left. \frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s + 3 + j4)} \right|_{s=-3+j4} = \frac{100(j4)}{(3 + j4)(j8)} = 6 - j8 = 10e^{-j53.13^\circ}$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$\frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)} \equiv \frac{K_1}{s + 6} + \frac{K_2}{s + 3 - j4} + \frac{K_3}{s + 3 + j4}$$

- Στόχος μας το K_3
- Πολλ/ζουμε και τα δυο μέλη με τον παρονομαστή τού K_3 , δηλ. το $(s + 3 + j4)$, και υπολογίζουμε στο $s = -3 - j4$:
- Θα πάρουμε:

$$K_3 = \left. \frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s + 3 - j4)} \right|_{s=-3-j4} = \frac{100(-j4)}{(3 - j4)(-j8)} = 6 + j8 = 10e^{j53.13^\circ}$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Θα πάρουμε τελικά ότι

$$\frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)} = \frac{-12}{s + 6} + \frac{10 \angle -53.13^\circ}{s + 3 - j4} + \frac{10 \angle 53.13^\circ}{s + 3 + j4}$$

- Παρατηρούμε ότι τελικά τα K_2 και K_3 είναι συζυγή
- Άρα, τελικά, χρειάζεται να υπολογίζουμε τον συντελεστή της μιας μόνο από τις συζυγείς ρίζες

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Συνεχίζοντας με τον αντίστροφο ML θα πάρουμε

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)} \right\} = (-12e^{-6t} + 10e^{-j53.13^\circ} e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53.13^\circ} e^{-(3+j4)t})u(t)$$

$$e^{-at} \quad \frac{1}{s + a}$$

- Η έκφραση αυτή δεν έχει κανένα πρακτικό νόημα καθώς εμπλέκει τα πεδία χρόνου και συχνότητας
- Οι φανταστικοί αριθμοί πρέπει να εξαλειφθούν
- Αυτό είναι κατωρθωτό λόγω τού ότι είναι πάντα συζυγείς (για φυσικά υλοποιήσιμα κυκλώματα)

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Προσθέτοντας απλά τους συζυγείς μιγαδικούς θα πάρουμε

$$\begin{aligned} 10e^{-j53.13^\circ} e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53.13^\circ} e^{-(3+j4)t} &= 10e^{-3t} (e^{j(4t-53.13^\circ)} + e^{-j(4t-53.13^\circ)}) \\ &= 20e^{-3t} \cos(4t - 53.13^\circ) \end{aligned}$$

- Έτσι ώστε τελικά

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)} \right\} = [-12e^{-6t} + 20e^{-3t} \cos(4t - 53.13^\circ)]u(t)$$

- Η κατάσταση αυτή εμφανίζεται πάρα πολύ συχνά, οπότε ας την αναλύσουμε περισσότερο

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Πιο γενικά, όταν έχουμε συζυγείς μιγαδικές ρίζες-πόλους, θα εμφανίζονται αθροίσματα όπως

$$\frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta}$$

με

$$K = |K|e^{j\theta} = |K| \angle \theta^\circ$$

- Ο αντίστροφος ML θα περιέχει εκφράσεις

$$|K|e^{j\theta}e^{(-\alpha + j\beta)t} + |K|e^{-j\theta}e^{(-\alpha - j\beta)t}$$

- Τότε:

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$\begin{aligned} & |K|e^{j\theta}e^{(-\alpha+j\beta)t} + |K|e^{-j\theta}e^{(-\alpha-j\beta)t} \\ &= |K|e^{-\alpha t} \left[e^{j\theta}e^{j\beta t} + e^{-j\theta}e^{-j\beta t} \right] \\ &= |K|e^{-\alpha t} \left[(\cos \theta + j \sin \theta)(\cos \beta t + j \sin \beta t) \right. \\ &\quad \left. + (\cos \theta - j \sin \theta)(\cos \beta t - j \sin \beta t) \right] \\ &= \dots \\ &= 2|K|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{|K|e^{j\theta}}{s + \alpha - j\beta} + \frac{|K|e^{-j\theta}}{s + \alpha + j\beta} \rightarrow 2|K|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ
ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Παράδειγμα:

$$\frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3}$$


- Τότε γράφουμε

$$\frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s + 5)^3} + \frac{K_3}{(s + 5)^2} + \frac{K_4}{s + 5}$$

- Για τους δυο πρώτους όρους δουλεύουμε όπως και πριν αλλά οι επόμενοι δυο απαιτούν ειδικό χειρισμό

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$\frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3} = \frac{\cancel{K_1}}{s} + \frac{K_2}{(s + 5)^3} + \frac{K_3}{(s + 5)^2} + \frac{K_4}{s + 5}$$

- Στόχος μας το K_1
- Πολλ/ζουμε με s και τα δυο μέλη και υπολογίζουμε στο $s = 0$:

$$K_1 = \left. \frac{100(s + 25)}{(s + 5)^3} \right|_{s=0} = \frac{100(25)}{125} = 20$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$\frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{\textcircled{K_2}}{(s + 5)^3} + \frac{K_3}{(s + 5)^2} + \frac{K_4}{s + 5}$$

- Στόχος μας το K_2
- Πολλ/ζουμε με $(s+5)^3$ και τα δυο μέλη και υπολογίζουμε στο $s = -5$:

$$\left. \frac{100(s + 25)}{s} \right|_{s=-5} = \left. \frac{K_1(s + 5)^3}{s} \right|_{s=-5} + K_2 + K_3(s + 5)|_{s=-5} + K_4(s + 5)^2|_{s=-5}$$

$$K_2 = -400$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Η συνηθισμένη προσέγγιση δεν θα δουλέψει για το K_3 επειδή δεν θα μπορέσει να εμφανιστεί μόνο του (θα πάρουμε $K_3 s$)
- Οπότε παρεμβάλλουμε ένα βήμα στο οποίο παραγωγίζουμε την έκφραση που έχει προκύψει από τη γνωστή διαδικασία

$$\frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s + 5)^3} + \frac{\cancel{K_3}}{(s + 5)^2} + \frac{K_4}{s + 5}$$

- Στόχος μας το K_3
- Πολλ/ζουμε με $(s+5)^3$ και τα δυο μέλη, **παραγωγίζουμε ως προς s** και υπολογίζουμε στο $s = -5$:

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left[\frac{100(s + 25)}{s} \right]_{s=-5} &= \frac{d}{ds} \left[\frac{K_1(s + 5)^3}{s} \right]_{s=-5} \\ &+ \frac{d}{ds} [K_2]_{s=-5} \\ &+ \frac{d}{ds} [K_3(s + 5)]_{s=-5} \\ &+ \frac{d}{ds} [K_4(s + 5)^2]_{s=-5}\end{aligned}$$

$$100 \left[\frac{s - (s + 25)}{s^2} \right]_{s=-5} = K_3 = -100$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Υποψιαζόμαστε ότι θα έχουμε το ίδιο πρόβλημα και για το K_4 επειδή δεν θα μπορέσει να εμφανιστεί μόνο του (θα πάρουμε $K_4 s^2$)
- Οπότε παρεμβάλλουμε ένα βήμα στο οποίο παραγωγίζουμε δύο φορές την έκφραση που έχει προκύψει από τη γνωστή διαδικασία

$$\frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s + 5)^3} + \frac{K_3}{(s + 5)^2} + \frac{\cancel{K_4}}{s + 5}$$

- Στόχος μας το K_4
- Πολλ/ζουμε με $(s+5)^3$ και τα δυο μέλη, **παραγωγίζουμε ως προς s δύο φορές** και υπολογίζουμε στο $s = -5$:
- [Μπορούμε να παραγωγίσουμε αυτό που προέκυψε από το K_3]

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$100 \left[\frac{s - (s + 25)}{s^2} \right]_{s=-5} = K_3 = -100 \quad (\text{Από το προηγούμενο βήμα για το } K_3)$$

$$100 \frac{d}{ds} \left[-\frac{25}{s^2} \right]_{s=-5} = K_1 \frac{d}{ds} \left[\frac{(s + 5)^2 (2s - 5)}{s^2} \right]_{s=-5} \\ + 0 + \frac{d}{ds} [K_3]_{s=-5} + \frac{d}{ds} [2K_4(s + 5)]_{s=-5}$$

$$K_4 = -20$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Τελικά

$$\frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3} = \frac{20}{s} - \frac{400}{(s + 5)^3} - \frac{100}{(s + 5)^2} - \frac{20}{s + 5}$$

- και

$$t^n e^{-at} \quad \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3} \right\} = [20 - 200t^2 e^{-5t} - 100t e^{-5t} - 20e^{-5t}]u(t)$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ
ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ
[ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΠΡΟΦΑΝΩΣ]

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Συνδυασμός όλων των προηγούμενων

- Παράδειγμα:

$$F(s) = \frac{768}{(s^2 + 6s + 25)^2}$$

- Μπορούμε να γράψουμε

$$F(s) = \frac{768}{(s + 3 - j4)^2(s + 3 + j4)^2}$$

$$= \frac{K_1}{(s + 3 - j4)^2} + \frac{K_2}{s + 3 - j4}$$

$$+ \frac{K_1^*}{(s + 3 + j4)^2} + \frac{K_2^*}{s + 3 + j4}$$

Θα υπολογίσουμε μόνο τα K_1 και K_2

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$K_1 = \frac{768}{(s + 3 + j4)^2} \Big|_{s=-3+j4} = \frac{768}{(j8)^2} = -12$$

$$K_1^* = -12$$

$$K_2 = \frac{d}{ds} \left[\frac{768}{(s + 3 + j4)^2} \right]_{s=-3+j4}$$

$$= -\frac{2(768)}{(s + 3 + j4)^3} \Big|_{s=-3+j4}$$

$$= -\frac{2(768)}{(j8)^3}$$

$$= -j3 = 3 \angle -90^\circ$$

$$K_2^* = j3 = 3 \angle 90^\circ$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

$$F(s) = \frac{768}{(s^2 + 6s + 25)^2} = \left[\frac{-12}{(s + 3 - j4)^2} + \frac{-12}{(s + 3 + j4)^2} \right] + \left(\frac{3 \angle -90^\circ}{s + 3 - j4} + \frac{3 \angle 90^\circ}{s + 3 + j4} \right)$$

$$f(t) = [-24te^{-3t} \cos 4t + 6e^{-3t} \cos(4t - 90^\circ)]u(t).$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

- Γενικά ισχύει ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{(s + a)^r} \right\} = \frac{K t^{r-1} e^{-at}}{(r-1)!} u(t) \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{(s + \alpha - j\beta)^r} + \frac{K^*}{(s + \alpha + j\beta)^r} \right\} = \left[\frac{2|K|t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \right] u(t)$$

$$K \in \mathbb{C} \quad K = |K|e^{j\theta} = |K|\underline{\angle \theta^\circ}$$

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

Είναι καλή ιδέα να ελέγχουμε το αποτέλεσμα, δηλ. τη διάσπαση σε κλάσματα, για μια ή δυο τυχαίες τιμές του s

ΡΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΚΑΙ ΑΛΛΟΙ ΤΡΟΠΟΙ....:

Για παράδειγμα:

$$\frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}\right)^2}$$

και για συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\alpha + j\beta$ θα είναι $a = 2\alpha$, $b = \alpha^2 + \beta^2$

$$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \rightarrow \frac{e^{-\alpha t} \sin \beta t}{\beta}$$