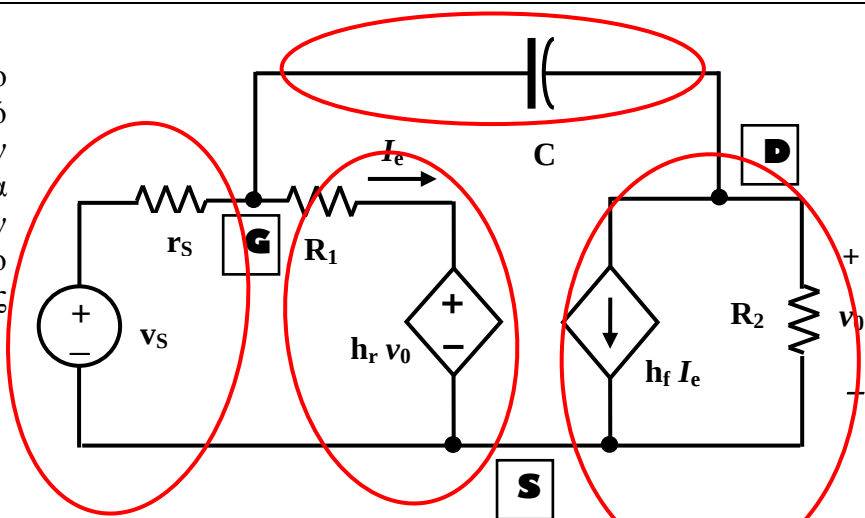


ΘΕΜΑ 1. [15 %]

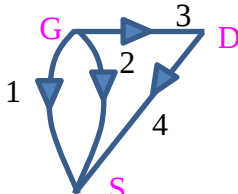
Θέλουμε να εισαγάγουμε το κύκλωμα στα δεξιά (υβριδικό μοντέλο τρανζίστορ) στον υπολογιστή. Προσδιορίστε τα απαραίτητα μεγέθη για την ανάλυσή του με τη μέθοδο κομβικών τάσεων με χρήση της τεχνικής των γράφων. (ΜΗΝ ΕΠΙΛΥΣΤΕ ΤΙΠΟΤΕ—ΒΡΕΙΤΕ ΜΟΝΟ ΤΟΥΣ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ)



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν πρέπει να επέμβουμε στο κύκλωμα! Φροντίζουμε μόνο να καταγράψουμε τη συνδεσμολογία με βάση τον γενικευμένο κλάδο όπως ορίστηκε στο μάθημα. (Εναλλακτικά, αν θέλουμε, μπορούμε να ορίσουμε άλλον διαφορετικό γενικευμένο κλάδο αλλά πρέπει να τον δηλώσουμε).

Έτσι, αφού ορίσουμε αυθαίρετα (αλλά βολικά...) φορές στα ρεύματα των κλάδων το κύκλωμα ξαναγράφεται:



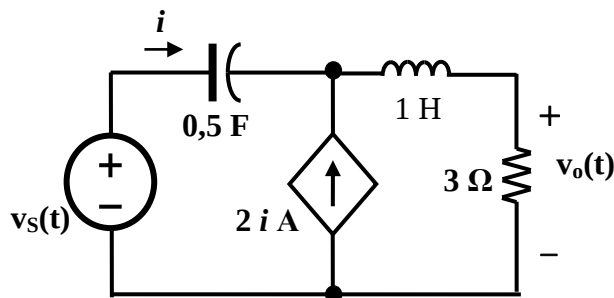
Οι απαιτούμενοι πίνακες είναι:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} G \\ D \\ S \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad V_s = \begin{pmatrix} v_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_f & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = \text{diag} \left(\frac{1}{r_s}, \frac{1}{R_1}, CD, \frac{1}{R_2} \right)$$

ΘΕΜΑ 3. [20 %]

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = V_o/V_s$ για το κύκλωμα στα δεξιά.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αφού περάσουμε στο πεδίο συχνότητας παίρνουμε κομβικές τάσεις για την τάση V του μοναδικού κόμβου:

$$-I - 2I + \frac{V}{s+3} = 0 \Rightarrow \frac{V}{s+3} = 3I$$

Επίσης

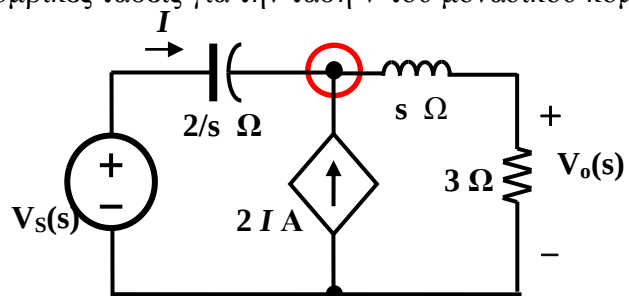
$$i = \frac{V_s - V}{\frac{1}{0.5s}} = s(V_s - V)/2$$

Συνδυάζοντας

$$\frac{V}{s+3} = 3s(V_s - V)/2 \Rightarrow \left(\frac{1}{s+3} + \frac{3s}{2} \right) V = \frac{3s}{2} V_s \Rightarrow V = \frac{3s(s+3)}{3s^2 + 9s + 2} V_s$$

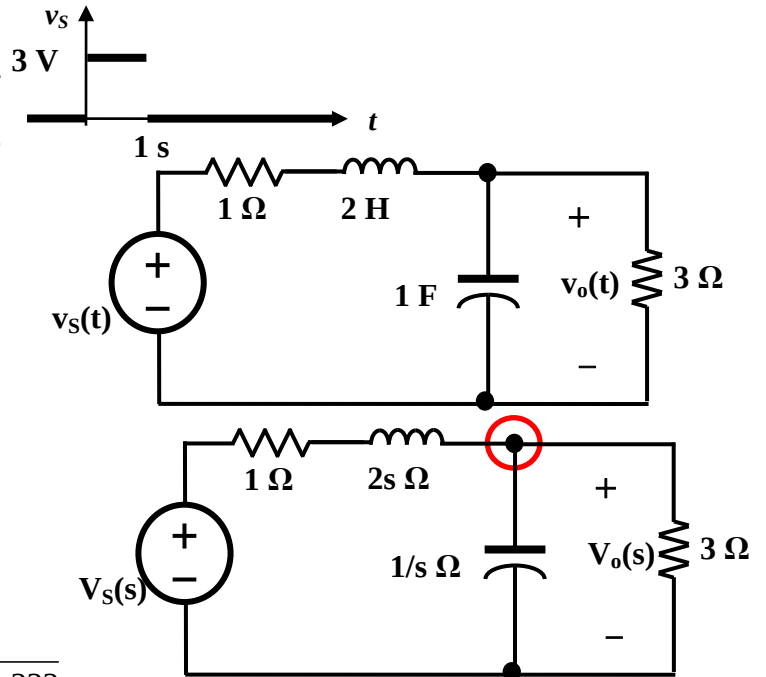
Επειδή (διαίρετης τάσης, π.χ.)

$$V_o = \frac{3}{s+3} V \Rightarrow V_o = \frac{3}{s+3} \cdot \frac{3s(s+3)}{3s^2 + 9s + 2} V_s \Rightarrow H(s) = \frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{9s}{3s^2 + 9s + 2}$$



ΘΕΜΑ 2. [20 %]

Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace για το σήμα v_s στα δεξιά (επάνω). Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα για να βρείτε την τάση $v_o(t)$ στο κύκλωμα στα δεξιά (κάτω).



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η παλμική γράφεται

$$v_s(t) = 3u(t) - 3u(t-1) \Rightarrow V_s(s) = \frac{3}{s} - \frac{3e^{-s}}{s}$$

Περνάμε στο πεδίο συχνότητας και παίρνουμε κομβικές τάσεις για τον μοναδικό κόμβο (ή π.χ. διαιρέτη τάσης):

$$\frac{V_o - V_s}{1 + 2s} + sV_o + \frac{V_o}{3} = 0 \Rightarrow V_o = \frac{V_s}{2s^2 + 1,667s + 1,333}$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{3(1 - e^{-s})}{s(2s^2 + 1,667s + 1,333)} \Rightarrow V_o = \frac{1,5(1 - e^{-s})}{s(s^2 + 0,833s + 0,667)}$$

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace χρειάζεται κάποια προετοιμασία. Αρχικά βλέπουμε ότι μπορούμε να δουλέψουμε μόνο με το πρώτο μέρος της εισόδου και μετά να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα για χρονική μετατόπιση. Επίσης, βλέπουμε ότι χρειάζεται να γίνει διάσπαση σε μερικά κλάσματα. Οπότε βρίσκουμε τις ρίζες του παρονομαστή, που είναι $\{0, -0,417 \pm j0,702\}$ και έχουμε:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1,5}{s(s^2 + 0,833s + 0,667)} \right\} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 0,417 + j0,702} + \frac{B^*}{s + 0,417 - j0,702}$$

Κατά τα γνωστά, υπολογίζουμε

$$A = 2,25 \quad B = -1,125 - j0,668 \quad B^* = -1,125 + j0,668$$

Οπότε

$$f(t) = \left[2,25 + (-1,125 - j0,668)e^{(-0,417 + j0,702)t} + (-1,125 + j0,668)e^{(-0,417 - j0,702)t} \right] u(t)$$

Η συνάρτηση που προκύπτει περιέχει όρους της μορφής $(\alpha + j\beta)e^{(\gamma + j\delta)t} + (\alpha - j\beta)e^{(\gamma - j\delta)t}$ που μπορούν εύκολα να απλοποιηθούν:

$$\begin{aligned} (\alpha + j\beta)e^{(\gamma + j\delta)t} + (\alpha - j\beta)e^{(\gamma - j\delta)t} &= 2e^{\gamma t} [\alpha \cos(\delta t) - \beta \sin(\delta t)] \\ &= 2e^{\gamma t} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos\left(\delta t - \arctan \frac{-\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

ώστε να πάρουμε

$$f(t) = \left[2,25 + 2,616 e^{-0,417t} \cos(0,702t + 30,69^\circ) \right] u(t)$$

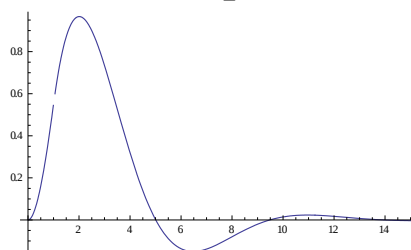
Αυτό όμως αφορά μόνο το «κομμάτι» του σήματος που αντιστοιχεί στη βηματική. Για την παλμική θα έχουμε τελικά ότι

$$v_o(t) = \left[2,25 + 2,616 e^{-0,417t} \cos(0,702t + 30,69^\circ) \right] [u(t) - u(t-1)]$$

ή με περισσότερη λεπτομέρεια

$$v_o(t) = \left[2,25 + 2,616 e^{-0,417t} \cos(0,702t + 30,69^\circ) \right] u(t) - \left[2,25 + 2,616 e^{-0,417(t-1)} \cos(0,702(t-1) + 30,69^\circ) \right] u(t-1)$$

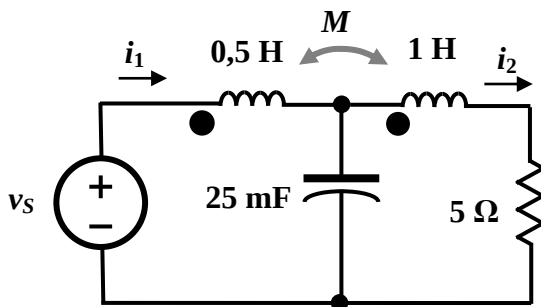
που έχει την εξής αναπαράσταση



ΘΕΜΑ 4. [25 %]

Στο κύκλωμα στα δεξιά, $M = 0,2 \text{ H}$ και $v_s(t) = 120 \cos(10t) \text{ V}$. Βρείτε τα i_1 και i_2 για τη μόνιμη κατάσταση.

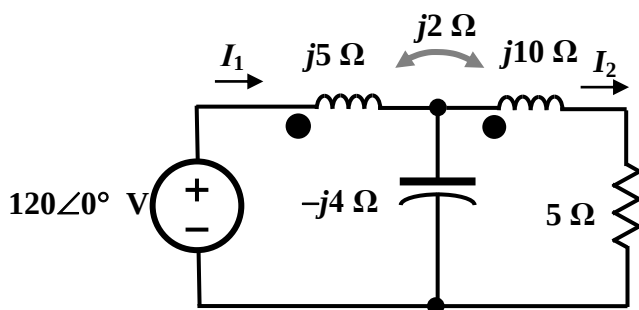
Πόση ενέργεια είναι αποθηκευμένη στα πηνία όταν $t = 1 \text{ s}$;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εδώ δεν πρόκειται για μετασχηματιστή (όπως θεώρησαν λανθασμένα κάποιοι) αλλά για την πιο απλή περίπτωση δυο πηνίων που η λειτουργία τού ενός επηρεάζει το άλλο. Ο καλύτερος τρόπος λοιπόν είναι να καταγράψουμε την επί πλέον τάση που επάγεται.

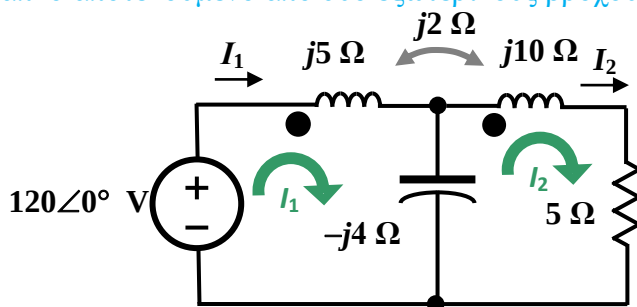
Πριν προχωρήσουμε, παρατηρούμε ότι η ερώτηση αφορά μόνιμη κατάσταση και η είσοδος είναι ημιτονοειδής, άρα έχουμε την πιο απλή περίπτωση ανάλυσης και θα χρησιμοποιήσουμε φάσορες (κάποιοι δεν παρατήρησαν αυτό το γεγονός και έψαχναν ακόμα και για αρχικές συνθήκες). Περνώντας λοιπόν στο πεδίο συχνότητας παίρνουμε το κύκλωμα:



Η τάση σε κάθε πηνίο θα είναι

$$v = j\omega LI \pm j\omega MI_{\text{άλλου πηνίου}}$$

Επειδή ζητούνται τα ρεύματα I_1 και I_2 , ο καλύτερος τρόπος επίλυσης είναι οι βροχικές εντάσεις, που μάλιστα επειδή το κύκλωμα είναι πολύ απλό αποτελούμενο από δυο εξωτερικούς βρόχους, συμπίπτουν με τα ζητούμενα ρεύματα. Έτσι:



Είναι φανερό ότι με τις δεδομένες φορές των ρευμάτων, η αμοιβαία επαγωγή M είναι θετική και

$$-120 + [j5I_1 + j2I_2] - j4(I_1 - I_2) = 0 \quad jI_1 + j6I_2 = 120$$

$$[j10I_2 + j2I_1] + 5I_2 - j4(I_1 - I_2) = 0 \Rightarrow j6I_1 + (5 + j6)I_2 = 0$$

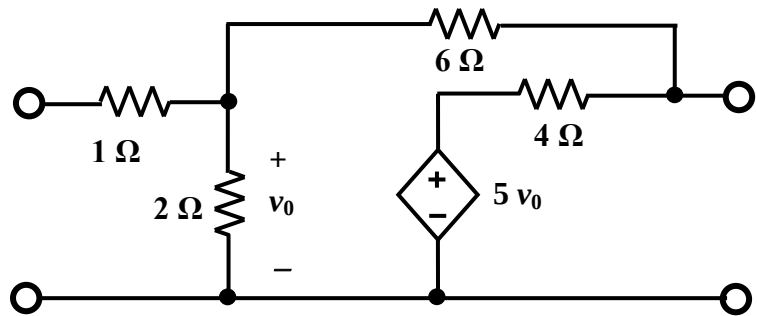
με λύση $I_1 = 23,35 + j20,11 \text{ A} = 30,82 \angle 40,73^\circ$ και $I_2 = -3,89 - j23,35 \text{ A} = 23,67 \angle -99,46^\circ$ ή $i_1(t) = 30,82 \cos(10t + 40,73^\circ) \text{ A}$ και $i_2(t) = 23,67 \cos(10t - 99,46^\circ) \text{ A}$

Η ενέργεια στο σύστημα των πηνίων θα είναι $\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$. Στον χρόνο $t = 1 \text{ s}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 &= \frac{1}{2} \times 0,5 \times [30,82 \cos(10 \times 180 / \pi + 40,73^\circ)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 1 \times [23,67 \cos(10 \times 180 / \pi - 99,46^\circ)]^2 \\ &\quad + 0,2 \times [30,82 \cos(10 \times 180 / \pi + 40,73^\circ)] \times [23,67 \cos(10 \times 180 / \pi - 99,46^\circ)] \\ &= 79,6 \text{ J} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5. [20 %]

Βρείτε τις παραμέτρους μεταφοράς για το δίθυρο που απεικονίζεται στα δεξιά.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

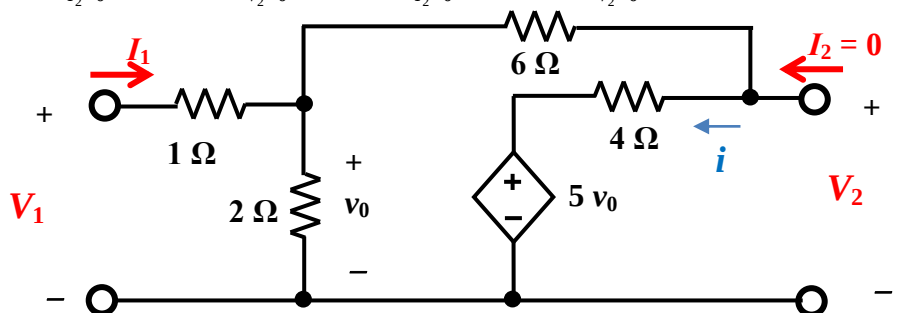
Δεδομένης της ύπαρξης της εξαρτημένης πηγής, δεν μπορούμε να τεμαχίσουμε το δίθυρο σε μικρότερα πολύ εύκολα κομμάτια (εκτός κι αν αποφασίσουμε να ασχοληθούμε με τον τελευταίο δεξιά πιο πολύπλοκο κλάδο).

Με τους βασικούς ορισμούς, θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}, \quad B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}, \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}, \quad D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$$

Ξεκινάμε θέτοντας $I_2 = 0$. Τότε με χρήση π.χ. κομβικών τάσεων ή απλά από την ισορροπία ρευμάτων στον αριστερό κόμβο

$$\frac{v_0 - V_1}{1} + \frac{v_0}{2} + \frac{v_0 - 5v_0}{10} = 0 \Rightarrow V_1 = 1,1v_0$$



Επίσης, αν i είναι το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 4 Ω,

$$i = \frac{V_2 - 5v_0}{4} \Rightarrow V_2 = 5v_0 + 4i \Rightarrow V_2 = 5v_0 + 4\left(\frac{v_0 - 5v_0}{10}\right) \Rightarrow V_2 = 5v_0 + 4(-0,4v_0) \Rightarrow V_2 = 3,4v_0$$

Με βάση τα παραπάνω

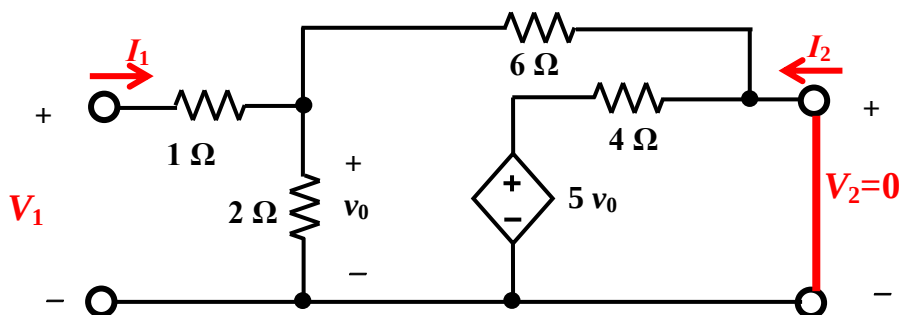
$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} \Rightarrow A = \frac{1,1v_0}{3,4v_0} \Rightarrow A = \frac{1,1}{3,4} = 0,3235$$

Ισχύει ότι

$$I_1 = \frac{V_1 - v_0}{1} = 1,1v_0 - v_0 = 0,1v_0 \quad \text{οπότε} \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} \Rightarrow C = \frac{0,1v_0}{3,4v_0} \Rightarrow C = \frac{0,1}{3,4} = 0,02941 \text{ S}$$

Συνεχίζουμε θέτοντας $V_2 = 0$. Τότε έχουμε με παρόμοιο τρόπο όπως και πριν

$$\frac{v_0 - V_1}{1} + \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{6} = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{10}{6}v_0 = \frac{5}{3}v_0$$



Στον άλλο κόμβο

$$I_2 = -\frac{5v_0}{4} - \frac{v_0}{6} \Rightarrow I_2 = -\frac{17}{12}v_0$$

ενώ έχουμε επίσης ότι $V_1 = I_1 \times 1 + v_0 \Rightarrow I_1 = V_1 - v_0 = 4/6 v_0$

Συνθέτοντας τα παραπάνω

$$B = \frac{V_1}{-I_2} = \frac{5/3 v_0}{17/12 v_0} \Rightarrow B = 1,176 \Omega$$

$$D = \frac{I_1}{-I_2} = \frac{4/6 v_0}{17/12 v_0} \Rightarrow D = 0,4706$$