

# ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

# ΜΕΡΟΣ Α: ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

# ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

- Όπως και με όλους τους μετασχηματισμούς, ο σκοπός είναι να «μεταφερθεί» το πρόβλημα σε ένα πιο ευνοϊκό περιβάλλον για την επίλυσή του
- Για να διευκολυνθεί η μεταφορά, απαιτείται ο επανορισμός των στοιχείων που συνθέτουν το πρόβλημα στο νέο περιβάλλον
- Για τα ηλεκτρικά κυκλώματα η διαδικασία είναι απλή και περιλαμβάνει τρία βήματα

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Κάθε στοιχείο τού ηλεκτρικού κυκλώματος, συμπεριλαμβανομένων και των σημάτων εισόδου, μετασχηματίζεται στο πεδίο συχνότητας (ουσιαστικά, η σχέση τάσης-ρεύματος)
2. Χρησιμοποιώντας τις γνωστές τεχνικές (κομβικές τάσεις, βροχικές εντάσεις και οτιδήποτε άλλο χρειαστεί) επιλύεται το κύκλωμα
3. Οι λύσεις (τάσεις ή/και ρεύματα που μας ενδιαφέρουν) μετασχηματίζονται στο πεδίο τού χρόνου με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

*ΠΡΟΕΙΔΟΠΟΙΗΣΗ*

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΠΡΟΕΙΔΟΠΟΙΗΣΗ ΓΙΑ ΑΠΟΦΥΓΗ ΛΑΘΩΝ

- Ο όρος «ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ» χρησιμοποιήθηκε ήδη στα πλαίσια τής Μόνιμης Ημιτονοειδούς Κατάστασης (ΜΗΚ), με το γνωστό  $j\omega$
- Ο μετ/μός Laplace, με μεταβλητή  $s = \sigma + j\omega$ , είναι προφανώς μια γενίκευση (οποιαδήποτε διέγερση και όχι μόνο στη μόνιμη κατάσταση)
- Άρα, η ανάλυση σε ΜΗΚ είναι ειδική περίπτωση της ανάλυσης με Laplace
  - ❑ **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Η μόνιμη κατάσταση για ένα κύκλωμα με 10.000 ημιτονοειδείς πηγές και μια μπαταρία **ΔΕΝ** μπορεί να προσδιοριστεί με ΜΗΚ αλλά **μόνο με Laplace**

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ-R

## ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

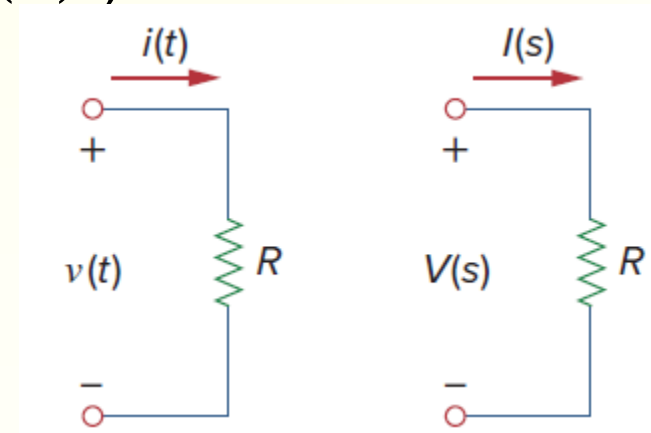
1. Κάθε στοιχείο τού ηλεκτρικού κυκλώματος ... μετασχηματίζεται στο πεδίο συχνότητας

- Θα βασιστούμε στη σχέση τάσης-ρεύματος στο πεδίο τού χρόνου
- Ξεκινάμε από την αντίσταση  $R$

$$v(t) = R i(t) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{R i(t)\} = R \mathcal{L}\{i(t)\} \Rightarrow$$

$$V(s) = R I(s)$$



# ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ-L

- Συνεχίζουμε με την αυτεπαγωγή  $L$

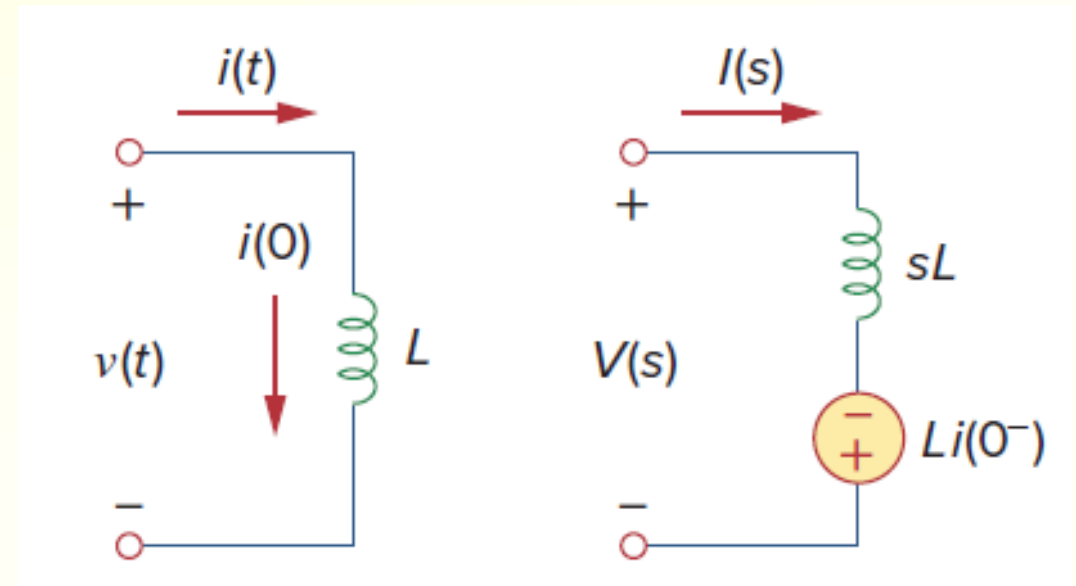
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\left\{L \frac{di(t)}{dt}\right\} = L[sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - Li(0^-) \Rightarrow$$

$$V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$$

$sL$ : «αντίσταση»  $\Omega$

: γενικευμένη σύνθετη αντίσταση



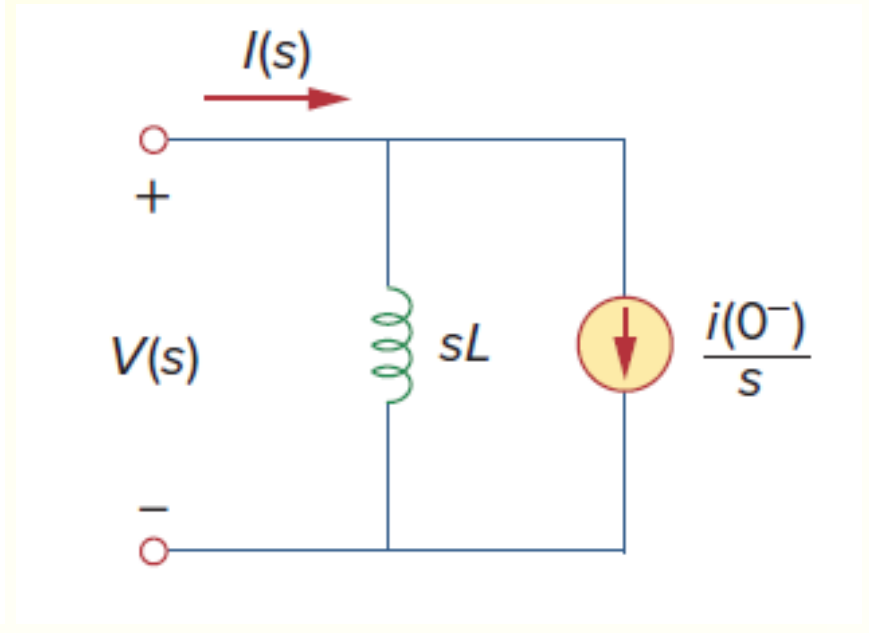
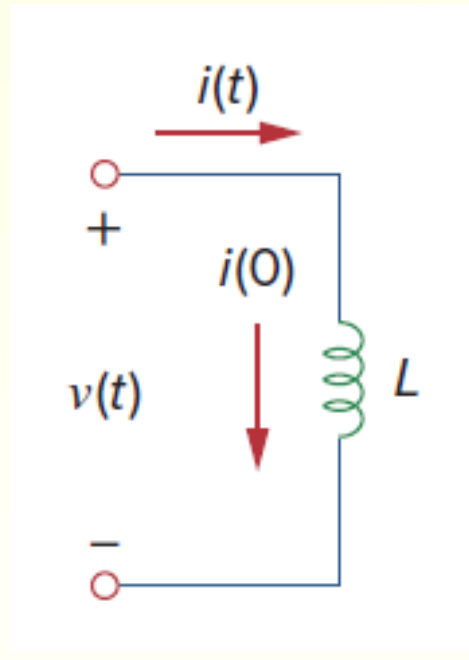
Προσοχή στις πολικότητες και τις φορές των ρευμάτων!

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ-L

- Ισχύει επίσης ότι

$$V(s) = sLI(s) - Li(0^-) \Rightarrow$$

$$I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$



**Προσοχή στις πολικότητες και τις φορές των ρευμάτων!**

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ-C

- Συνεχίζουμε με τη χωρητικότητα  $C$

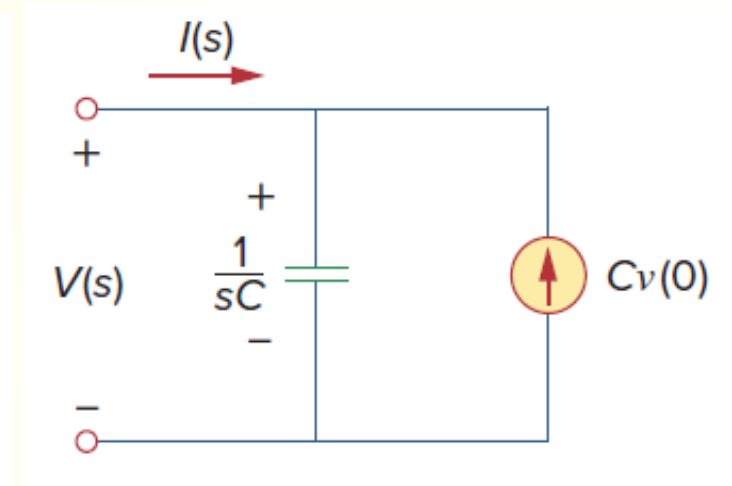
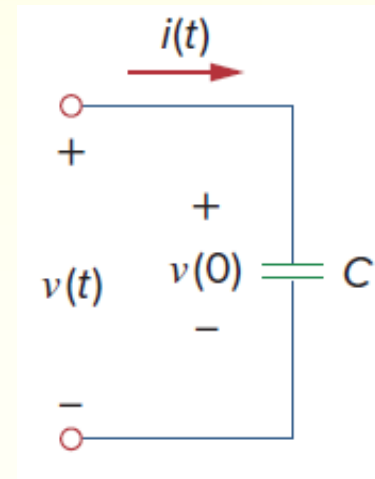
$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \mathcal{L}\left\{C \frac{dv(t)}{dt}\right\} = C[sV(s) - v(0^-)] = sCV(s) - Cv(0^-) \Rightarrow$$

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0^-)$$

$sC$ : «αγωγιμότητα»  $S$

: γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα



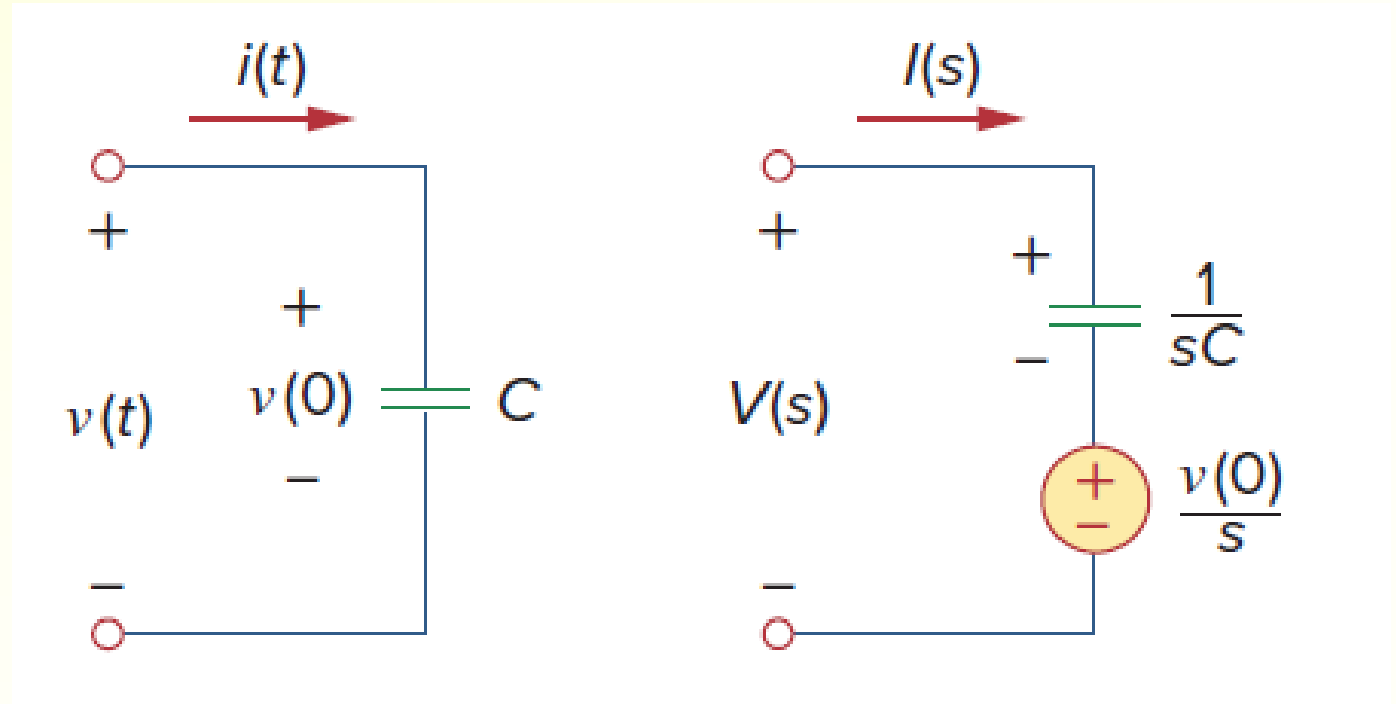
*Προσοχή στις πολικότητες και τις φορές των ρευμάτων!*

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ-C

- Ισχύει επίσης ότι

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0^-) \Rightarrow$$

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

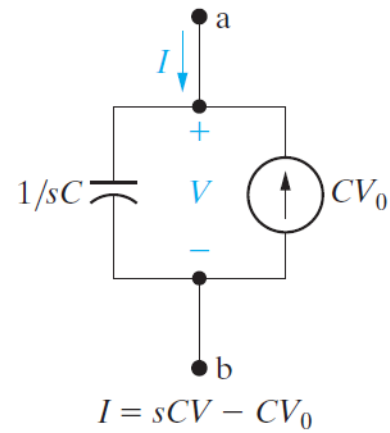
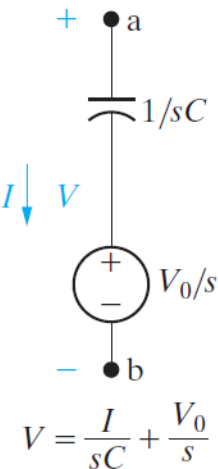
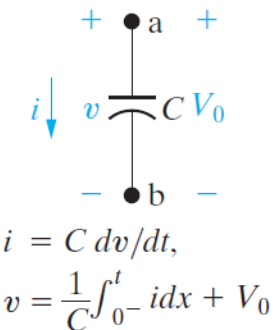
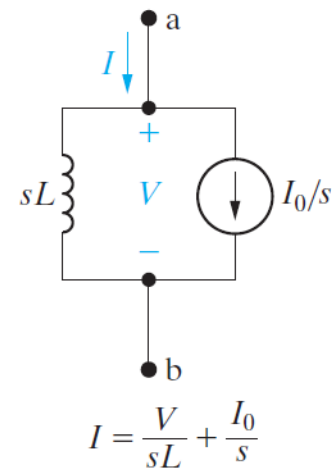
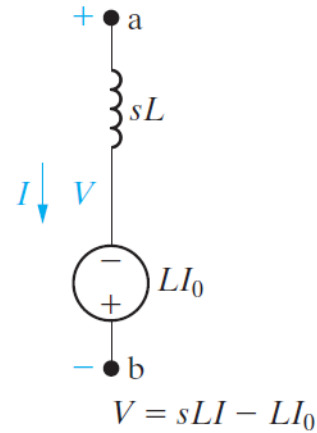
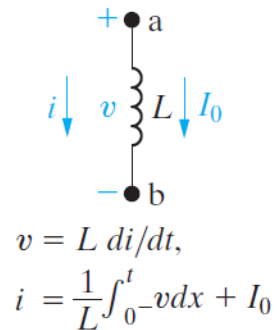
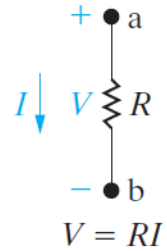
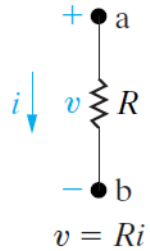


**Προσοχή στις πολικότητες και τις φορές των ρευμάτων!**

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

TIME DOMAIN

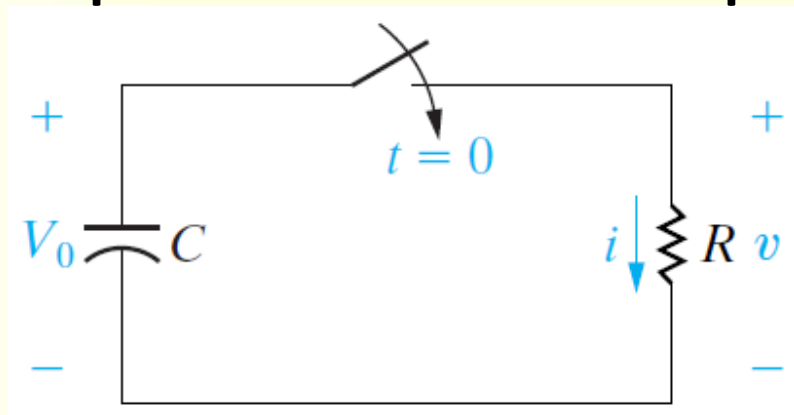
FREQUENCY DOMAIN



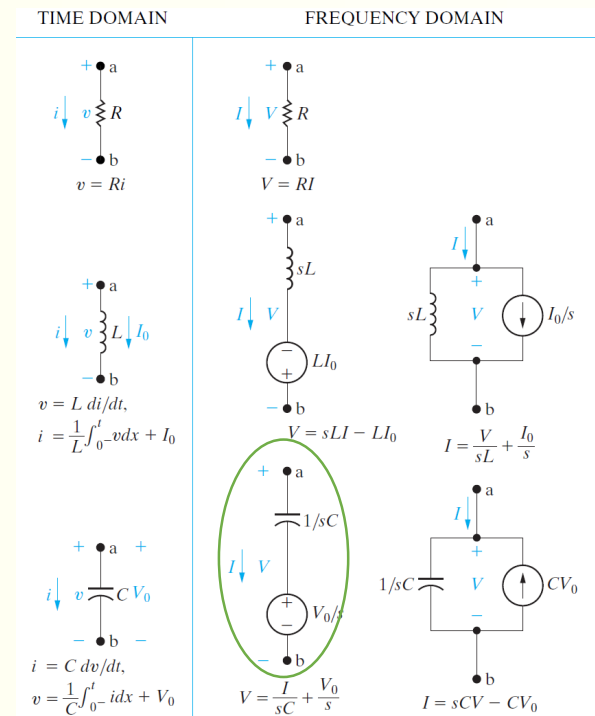
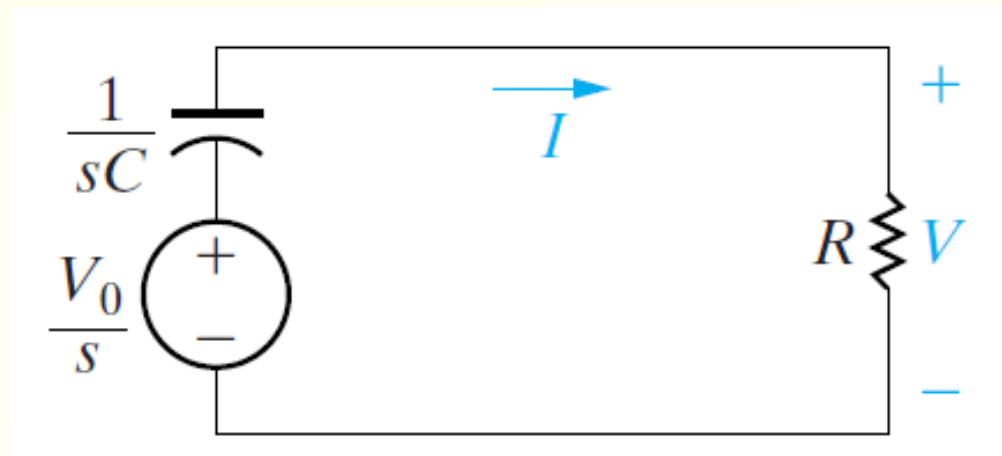
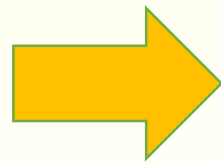
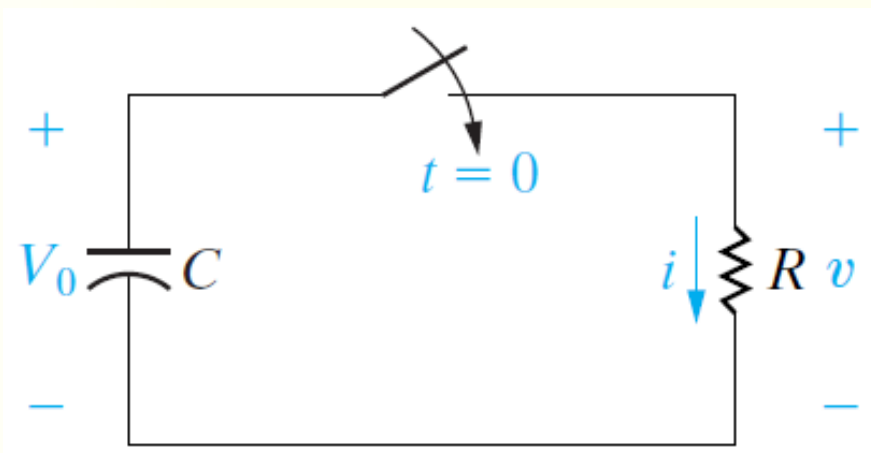
**Προσοχή στις πολικότητες και τις φορές των ρευμάτων!**

# ΚΥΚΛΩΜΑ RC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Θέλουμε να υπολογίσουμε το ρεύμα  $i$  και την τάση  $v$  σε ένα κύκλωμα RC



- Περνάμε στο πεδίο τής συχνότητας

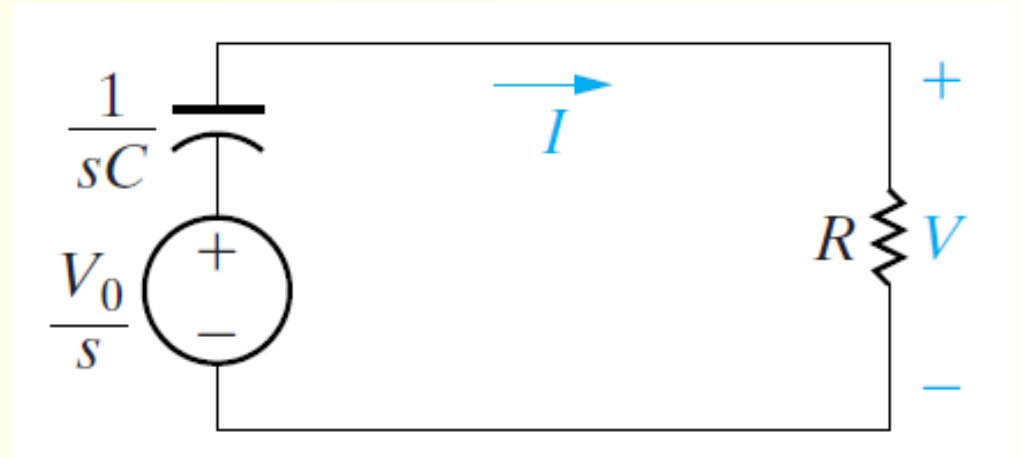


Προσοχή στις πολικότητες και τις φορές των ρευμάτων!

# ΚΥΚΛΩΜΑ RC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Επιλύουμε το κύκλωμα

$$\frac{V_0}{s} = \frac{1}{sC}I + RI$$



- Για το ρεύμα:

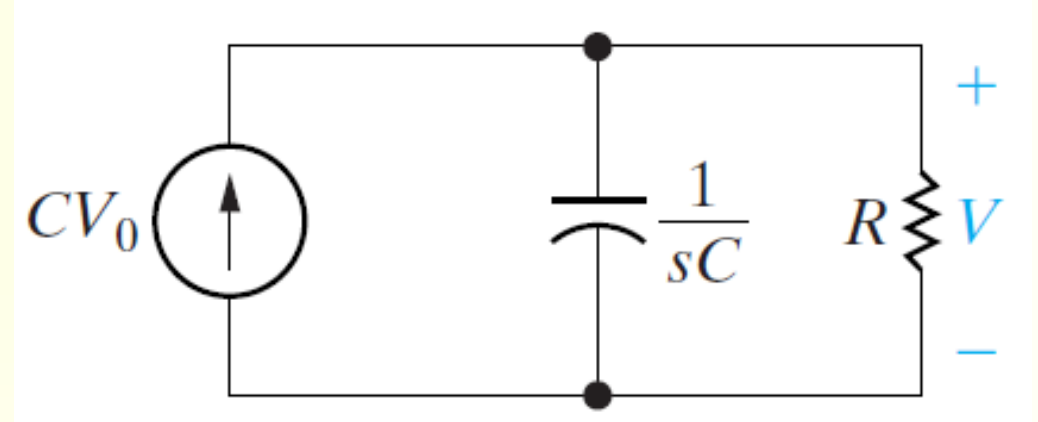
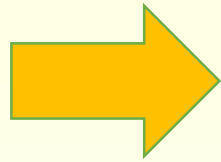
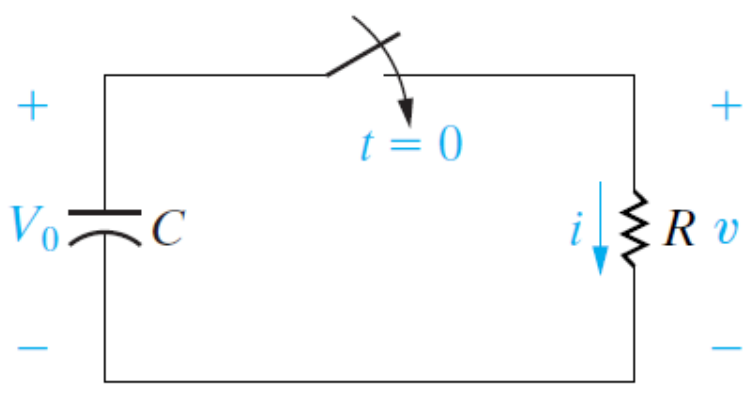
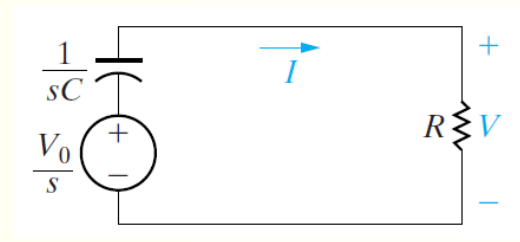
$$I = \frac{CV_0}{RCs + 1} = \frac{V_0/R}{s + (1/RC)}$$

- Οπότε, με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$i = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}u(t) \quad \longrightarrow \quad v = Ri = V_0e^{-t/RC}u(t)$$

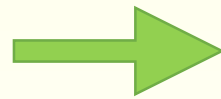
# ΚΥΚΛΩΜΑ RC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Αν θέλαμε μόνο την τάση, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε διαφορετική αναπαράσταση:



- Από την κομβική τάση:

$$\frac{V}{R} + sCV = CV_0$$



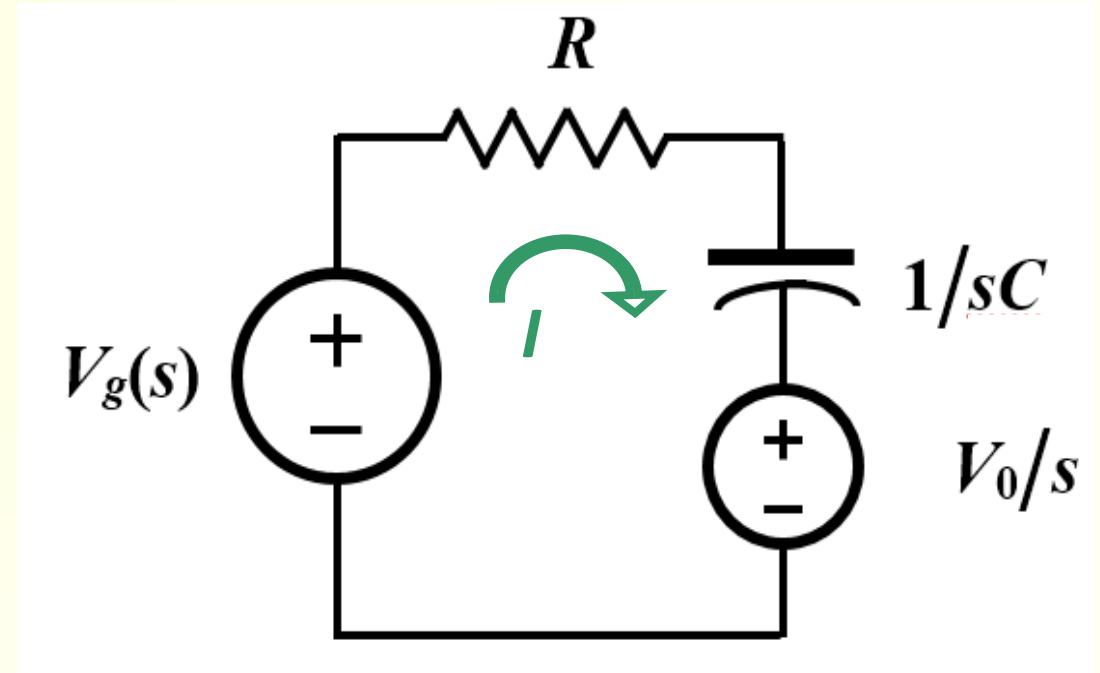
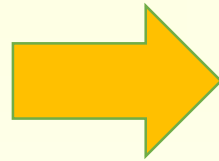
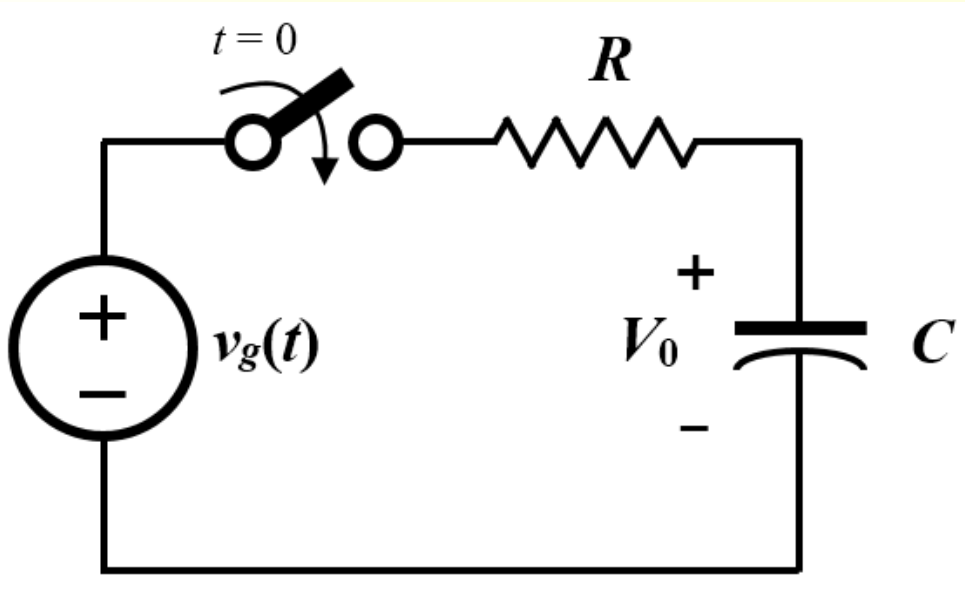
$$V = \frac{V_0}{s + (1/RC)}$$

- Οπότε, με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$v = V_0 e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/\tau} u(t)$$

# ΚΥΚΛΩΜΑ RC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

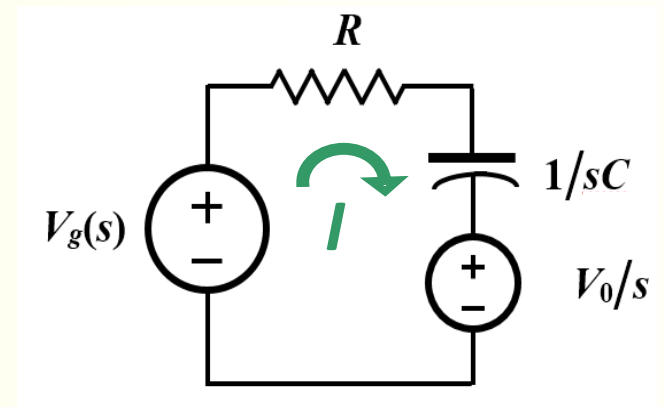
- Ας δούμε και την πλήρη απόκριση:



**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Το  $V_g(s)$  πρέπει υποχρεωτικά να συμπεριλάβει και τον διακόπτη, άρα ξεκινάμε από το  $v_g(t)$   $u(t)$

# ΚΥΚΛΩΜΑ RC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Επιλύουμε:



$$V_g(s) - \frac{V_0}{s} = RI(s) + \frac{1}{sC} I(s) \Rightarrow I(s) = \frac{sV_g(s) - V_0}{s \left( R + \frac{1}{sC} \right)} = \frac{sV_g(s) - V_0}{Rs + \frac{1}{C}} \Rightarrow$$

$$I(s) = \frac{sV_g(s) - V_0}{R \left( s + \frac{1}{RC} \right)}$$

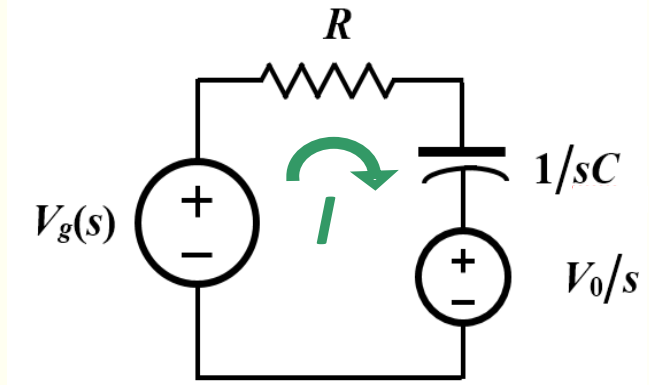
# ΚΥΚΛΩΜΑ RC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Τι καταφέρουμε;
- Γνωρίζουμε το ρεύμα (στο πεδίο συχνότητας) για **οποιοδήποτε** σήμα εφαρμοστεί στην είσοδο!
- Π.χ., για σταθερή πηγή dc («μπαταρία») στα  $v_1$  volt:

$$v_g(t) = v_1 u(t) \Rightarrow V_g(s) = v_1 \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$I(s) = \frac{s v_1 \frac{1}{s} - V_0}{R \left( s + \frac{1}{RC} \right)} = \frac{v_1 - V_0}{R \left( s + \frac{1}{RC} \right)} \Rightarrow$$

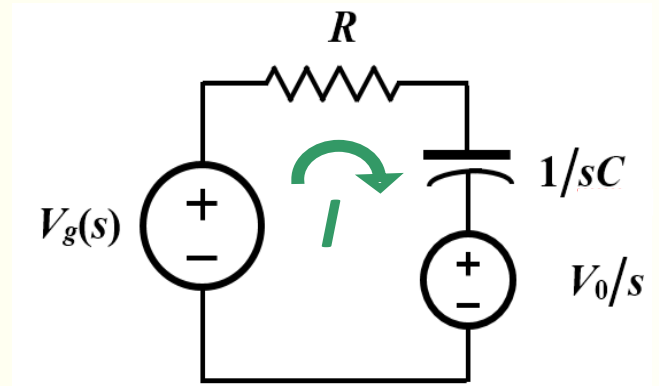
$$i(t) = \frac{v_1 - V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



# ΚΥΚΛΩΜΑ RC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Π.χ., για ράμπα με κλίση  $v_2$ :

$$v_g(t) = v_2 t u(t) \Rightarrow V_g(s) = v_2 \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$



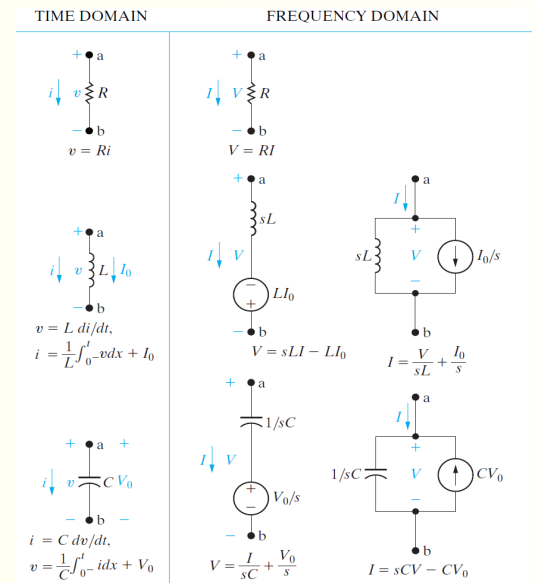
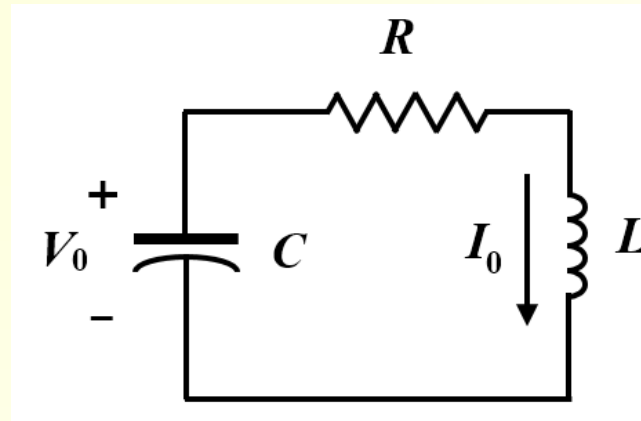
$$I(s) = \frac{s v_2 \frac{1}{s^2} - V_0}{R \left( s + \frac{1}{RC} \right)} = \frac{\frac{v_2}{s} - V_0}{R \left( s + \frac{1}{RC} \right)} = \frac{v_2}{s R \left( s + \frac{1}{RC} \right)} - \frac{V_0}{R \left( s + \frac{1}{RC} \right)}$$

$$= \frac{Cv_2}{s} - \frac{Cv_2}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{\frac{V_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{Cv_2}{s} + \frac{-Cv_2 - \frac{V_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \Rightarrow$$

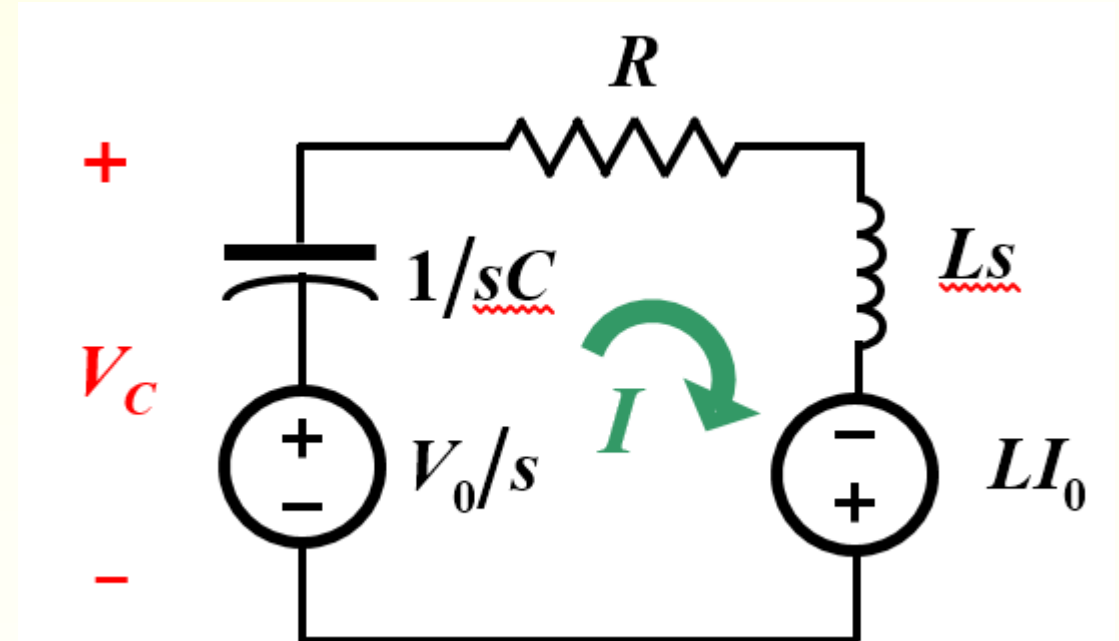
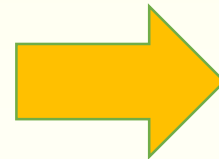
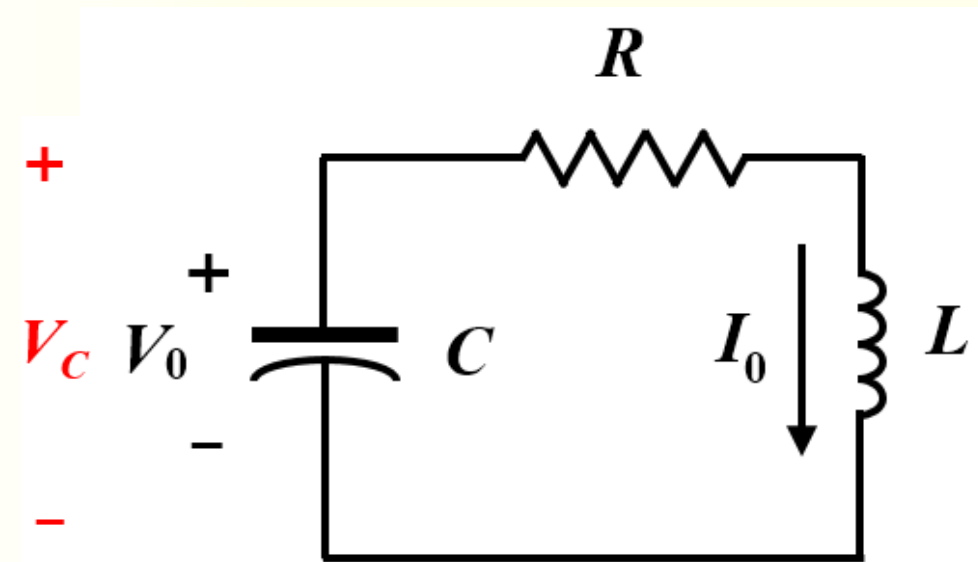
$$i(t) = \left[ Cv_2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) - \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right] u(t)$$

# ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- ΑΜΔ για σειριακό RLC:



- Θέλουμε την τάση τού πυκνωτή  $V_C(s)$



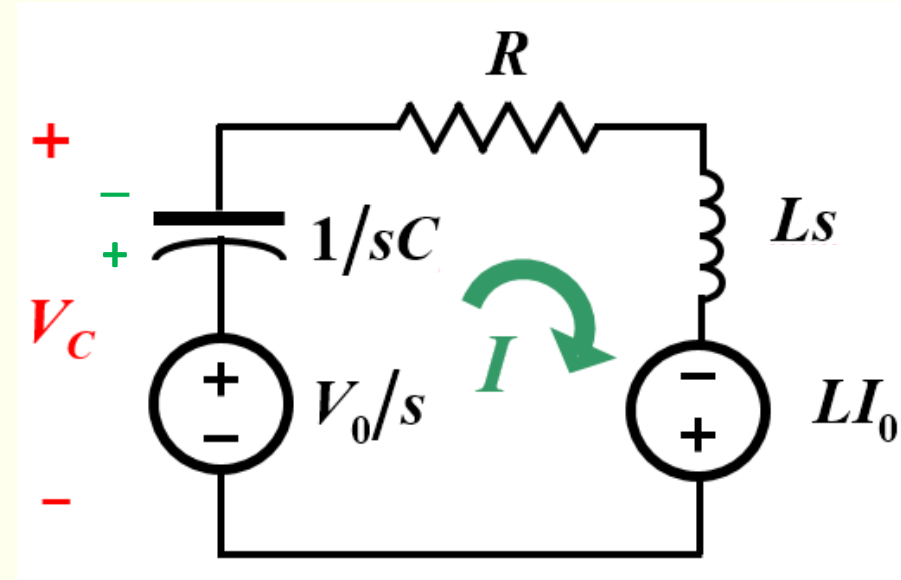
# ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Επιλύουμε για την τάση του πυκνωτή  $V_C(s)$  με την ενδεικνυόμενη φορά στο ρεύμα

$$RI(s) + sLI(s) - LI_0 - \frac{V_0}{s} + \frac{1}{sC}I(s) = 0$$

$$I(s) = \frac{C(I_0 Ls + V_0)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

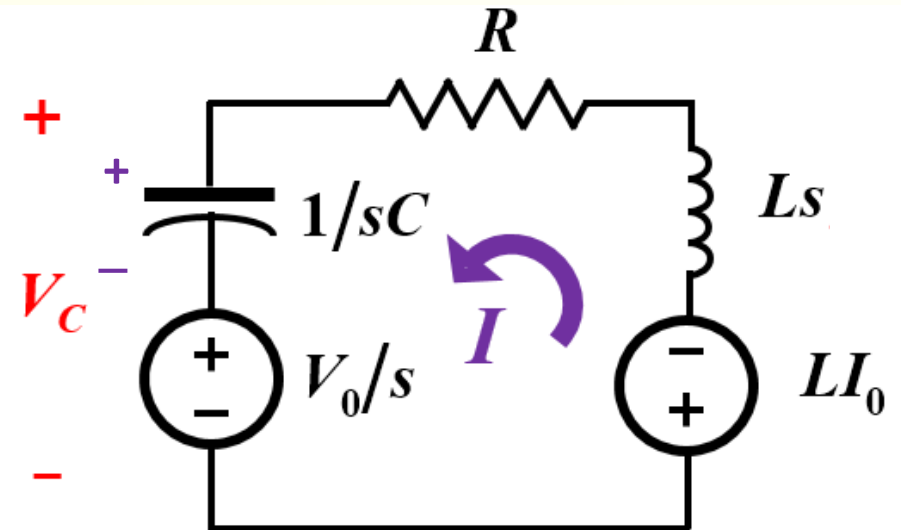
$$V_C(s) = -\frac{1}{sC}I(s) + \frac{V_0}{s} = \frac{-I_0 L + CV_0(R + Ls)}{LCs^2 + RCs + 1}$$



$$RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{V_0}{s} + LI_0 + sLI(s) = 0$$

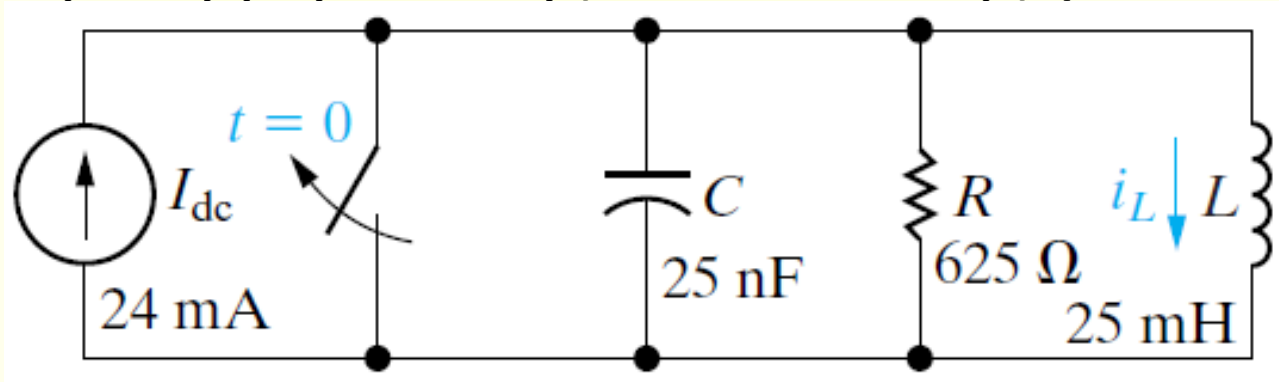
$$I(s) = -\frac{C(I_0 Ls + V_0)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{V_0}{s} = \frac{-I_0 L + CV_0(R + Ls)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

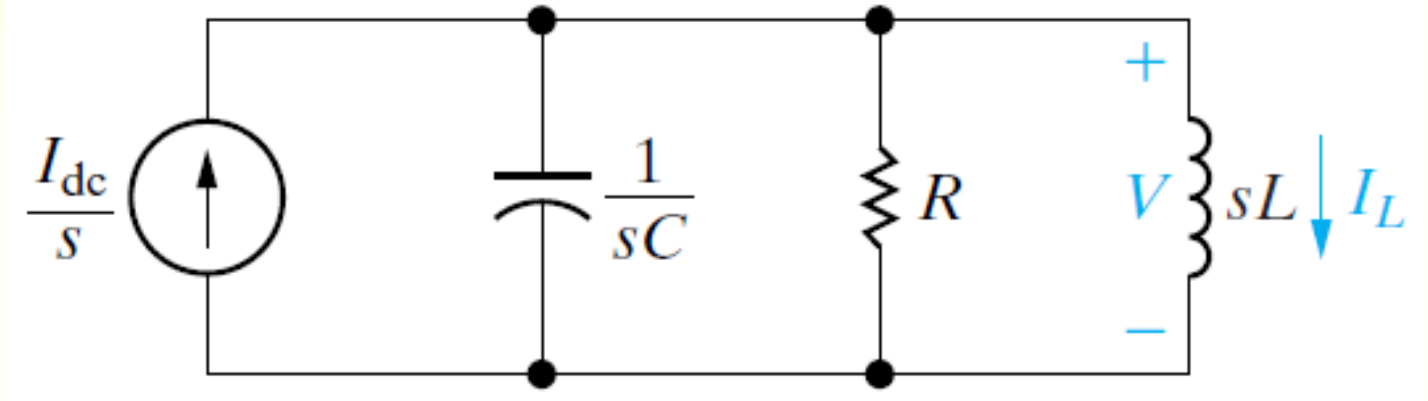
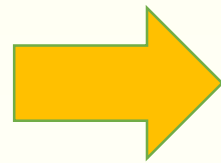
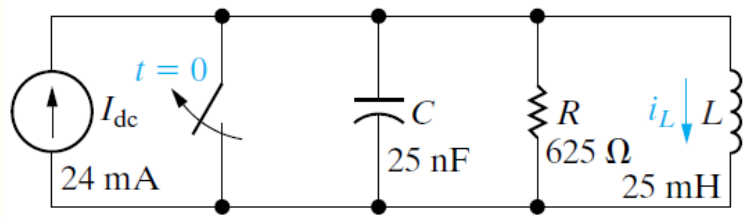


# ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης για παράλληλο RLC:



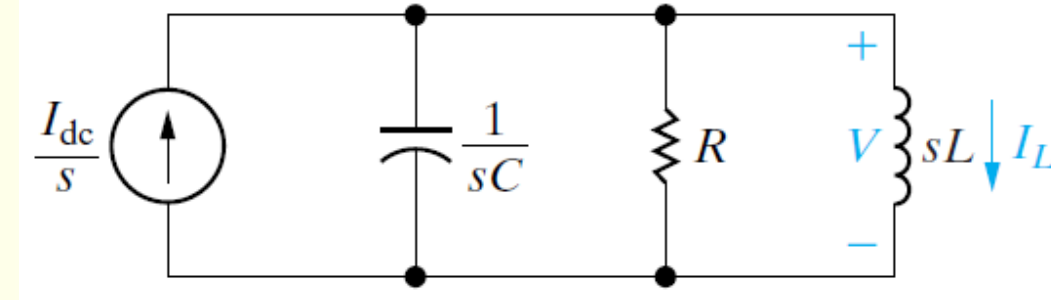
- Θέλουμε το ρεύμα τού πηνίου  $i_L(t)$
- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας



# ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Το ρεύμα  $I_L$  μπορεί να υπολογιστεί σαν

$$I_L = \frac{V}{sL}$$



- Οπότε επιλύουμε για την τάση  $V$

- Με NPK: 
$$sCV + \frac{V}{R} + \frac{V}{sL} = \frac{I_{dc}}{s}$$

$$I_L = \frac{I_{dc}/LC}{s[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}$$

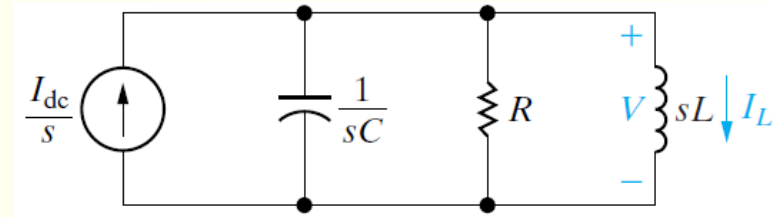
- Παίρνουμε

$$V = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s^2 + 64\,000s + 16 \times 10^8)}$$

# ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Συνεχίζοντας



$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s + 32\,000 - j24\,000)(s + 32\,000 + j24\,000)}$$

$$I_L = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 32\,000 - j24\,000} + \frac{K_2^*}{s + 32\,000 + j24\,000}$$

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \times 10^{-3}$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5}{(-32\,000 + j24\,000)(j48\,000)} = 20 \times 10^{-3} \angle 126.87^\circ$$

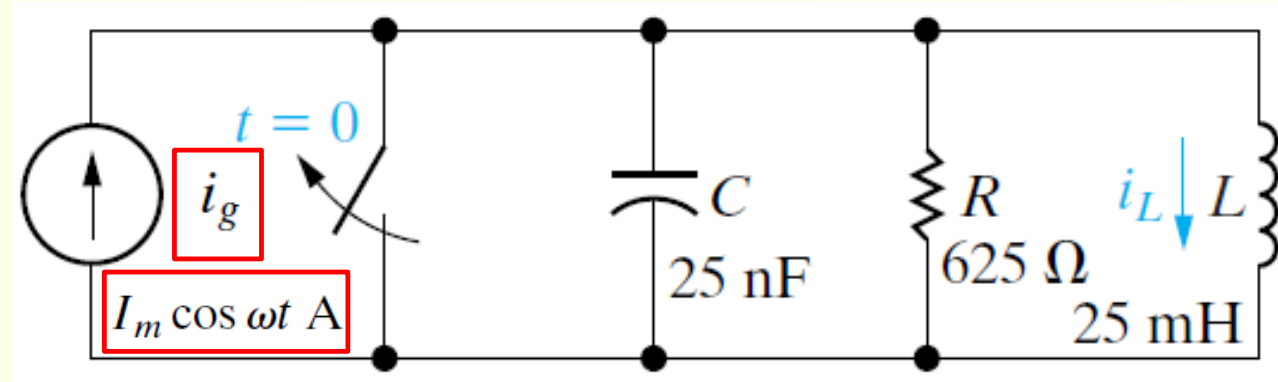
- Και παίρνουμε

$$i_L = [24 + 40e^{-32\,000t} \cos(24\,000t + 126.87^\circ)]u(t)\text{mA}$$

# ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ-ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟ

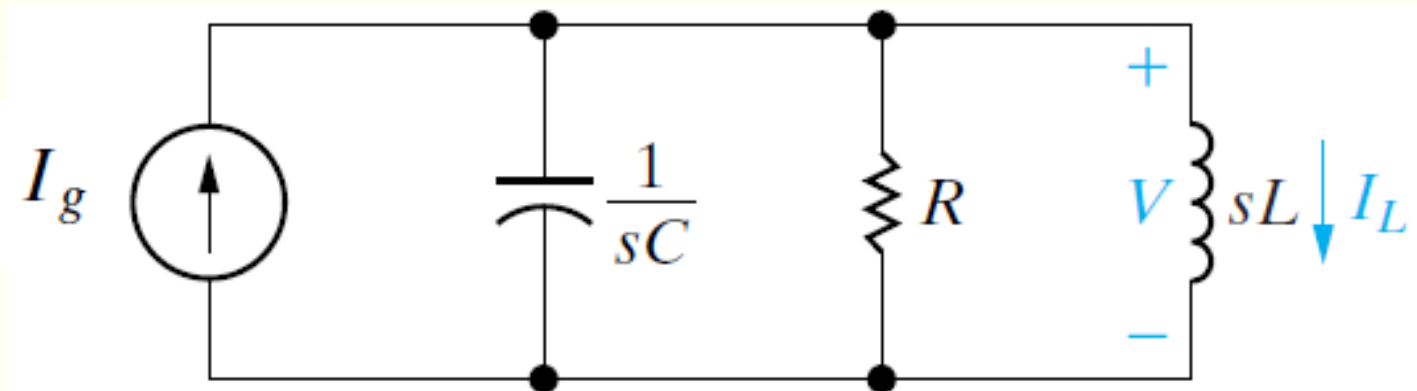
- Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς για (το ίδιο) παράλληλο RLC:

$$\begin{aligned}i_g(t) &= I_m \cos \omega t \\ &= 24 \cos 40\,000t \text{ mA}\end{aligned}$$



- Θέλουμε πάλι το ρεύμα τού πηνίου  $i_L(t)$
- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας

$$I_g = \frac{sI_m}{s^2 + \omega^2}$$



# ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ-ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟ

- Όπως και προηγουμένως με ΝΡΚ θα πάρουμε:

$$V = \frac{(I_g/C)s}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \longrightarrow V = \frac{(I_m/C)s^2}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}$$

- Και

$$I_L = \frac{V}{sL} = \frac{(I_m/LC)s}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}$$

- Με τα δεδομένα:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s^2 + 16 \times 10^8)(s^2 + 64\,000s + 16 \times 10^8)}$$

# ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ-ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟ

- Ξεκινάμε τη διαδικασία για τον αντίστροφο ML:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s^2 + 16 \times 10^8)(s^2 + 64\,000s + 16 \times 10^8)}$$

$$\omega = 40\,000$$

$$\alpha = 32\,000$$

$$\beta = 24\,000$$

- Και

$$I_L = \frac{K_1}{s - j40\,000} + \frac{K_1^*}{s + j40\,000} + \frac{K_2}{s + 32\,000 - j24\,000} + \frac{K_2^*}{s + 32\,000 + j24\,000}$$

- Βρίσκουμε:

$$K_1 = 7.5 \times 10^{-3} \angle -90^\circ$$

$$K_2 = 12.5 \times 10^{-3} \angle 90^\circ$$

# ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ-ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟ

- Τελικά, για το ρεύμα τού πηνίου  $i_L(t)$ :

$$i_L = [15 \cos (40\,000t - 90^\circ) + 25e^{-32\,000t} \cos (24\,000t + 90^\circ)] \text{ mA}$$

- ή

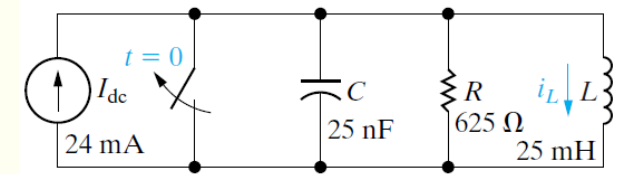
$$i_L = (15 \sin 40\,000t - 25e^{-32\,000t} \sin 24\,000t)u(t) \text{ mA}$$

Με φάσορες θα  
βρίσκαμε αυτό

Μεταβατικό

# ΣΗΜΕΙΩΣΗ

- Είναι καλή ιδέα να ελέγχουμε κάπως το πρώτο βασικό αποτέλεσμα που παίρνουμε, δηλ. το ζητούμενο μέγεθος στο πεδίο συχνότητας
- Σε αυτό βοηθάει το **θεώρημα τελικής τιμής**
- Π.χ. στο προτελευταίο κύκλωμα



$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s^2 + 64\,000s + 16 \times 10^8)}$$



$$\lim_{s \rightarrow 0} sI_L = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \text{ mA} \quad \checkmark$$

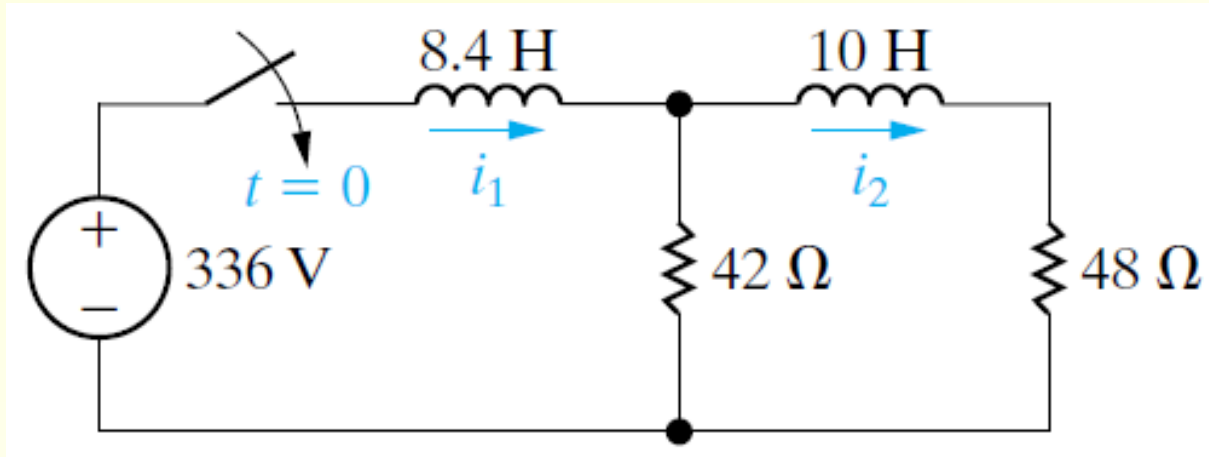
- **Αντίθετα**, στο τελευταίο κύκλωμα με την ημιτονοειδή είσοδο

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s^2 + 16 \times 10^8)(s^2 + 64\,000s + 16 \times 10^8)}$$

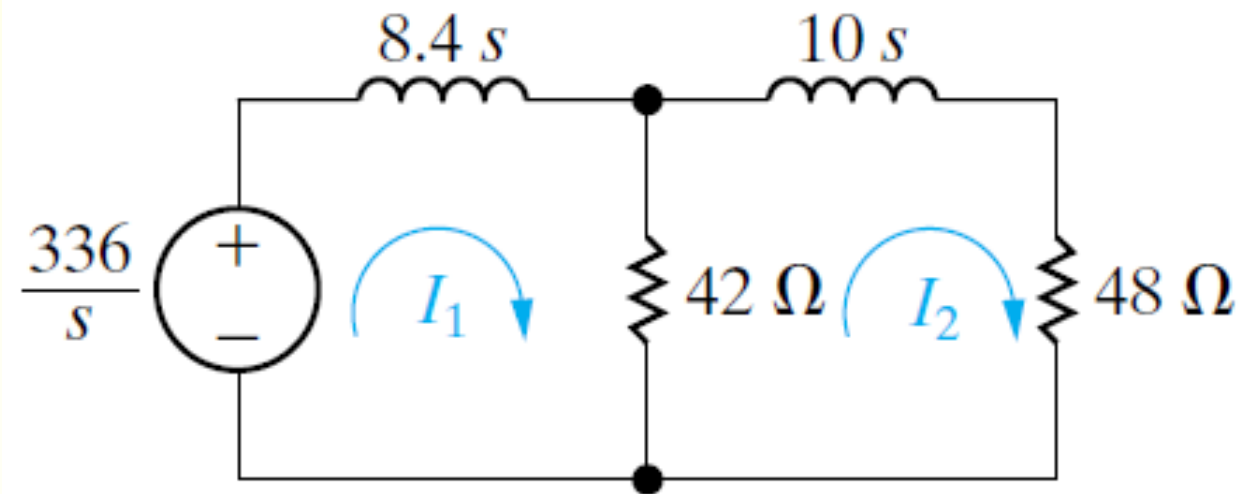
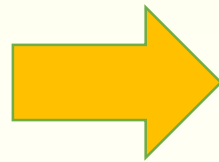
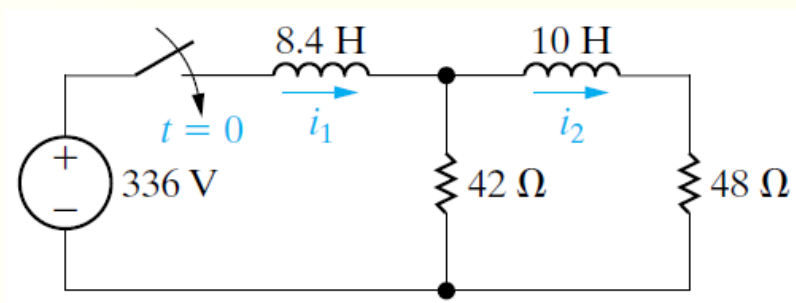
- Το  $I_L$  περιλαμβάνει πόλους στον φανταστικό άξονα ( $\pm j40000$ ) και **δεν μπορούμε** να εφαρμόσουμε το θεώρημα τελικής τιμής

# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Θέλουμε τα ρεύματα  $i_1(t)$  και  $i_2(t)$



- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας

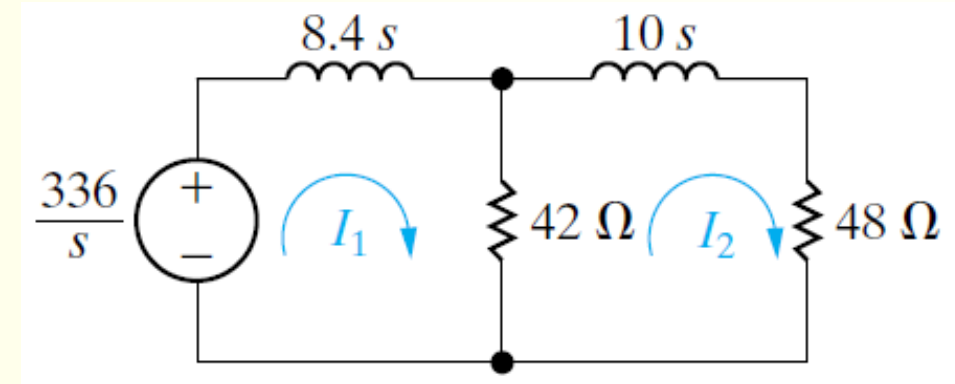


# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Επιλύουμε για τα βροχικά ρεύματα  $I_1(s)$  και  $I_2(s)$  που συμπίπτουν με τα ζητούμενα

$$\frac{336}{s} = (42 + 8.4s)I_1 - 42I_2$$

$$0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2$$



- Θα πάρουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 42 + 8.4s & -42 \\ -42 & 90 + 10s \end{vmatrix} = 84(s^2 + 14s + 24) = 84(s + 2)(s + 12)$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 336/s & -42 \\ 0 & 90 + 10s \end{vmatrix} = \frac{3360(s + 9)}{s}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 42 + 8.4s & 336/s \\ -42 & 0 \end{vmatrix} = \frac{14\,112}{s}$$

Προετοιμασία για το επόμενο στάδιο



$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta} = \frac{40(s + 9)}{s(s + 2)(s + 12)}$$

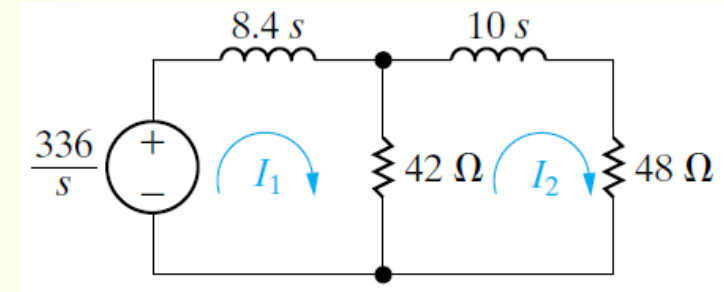
$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta} = \frac{168}{s(s + 2)(s + 12)}$$

# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Συνεχίζοντας τη διαδικασία (διάσπαση σε απλά κλάσματα):

$$I_1 = \frac{15}{s} - \frac{14}{s+2} - \frac{1}{s+12}$$

$$I_2 = \frac{7}{s} - \frac{8.4}{s+2} + \frac{1.4}{s+12}$$



- Θα πάρουμε τελικά

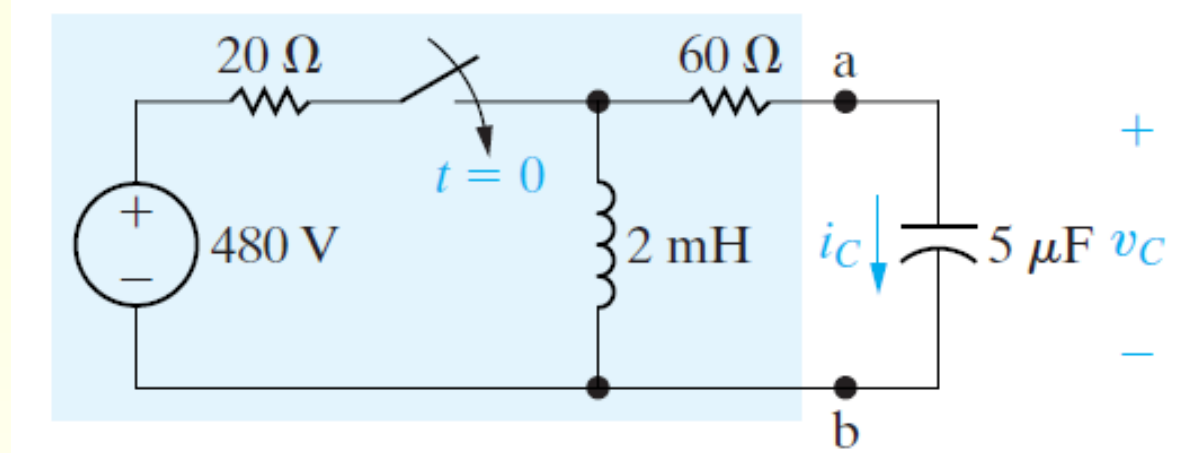
$$i_1 = (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t})u(t) \text{ A}$$

$$i_2 = (7 - 8.4e^{-2t} + 1.4e^{-12t})u(t) \text{ A}$$

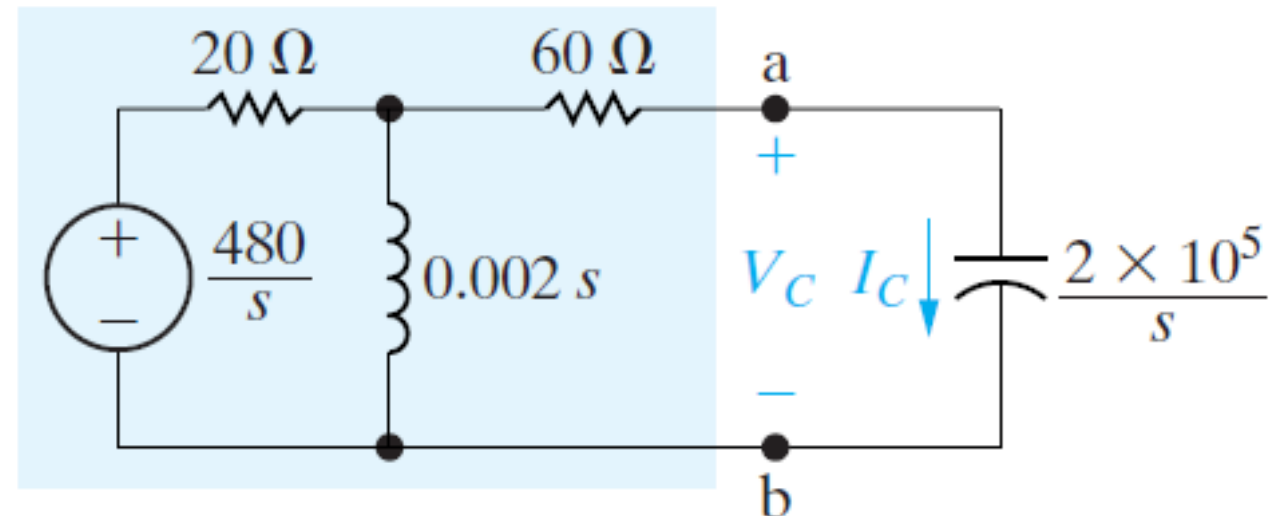
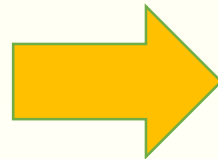
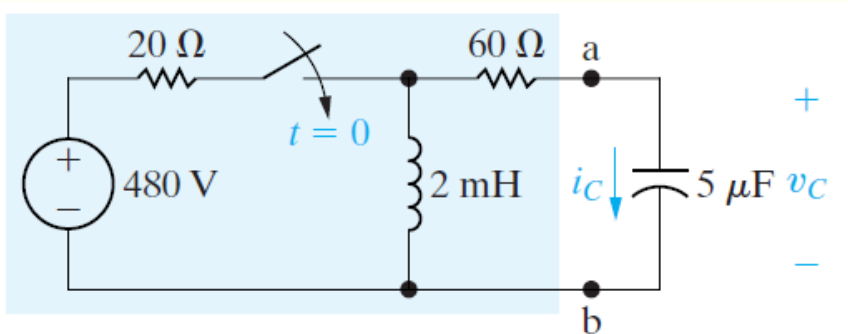
# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ THEVENIN

- Από τα a και b, δηλ., πώς «βλέπει» ο πυκνωτής το (γαλάζιο) κύκλωμα



- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας



# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ THEVENIN

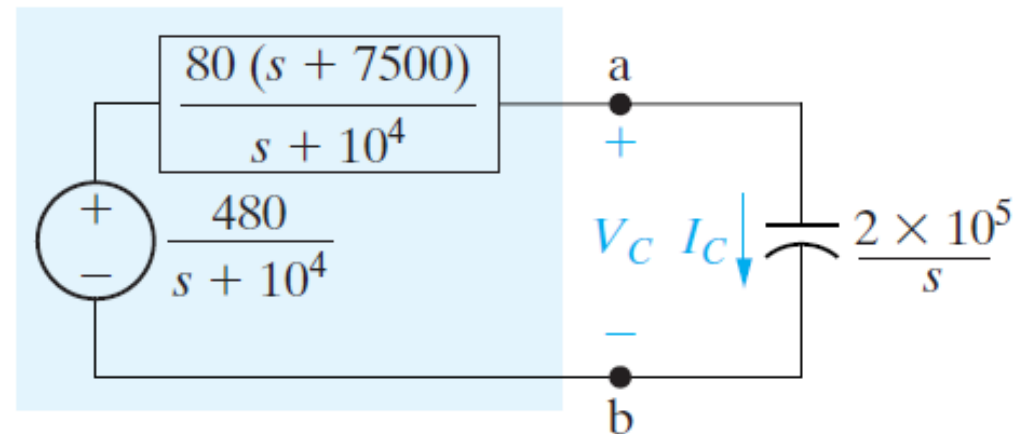
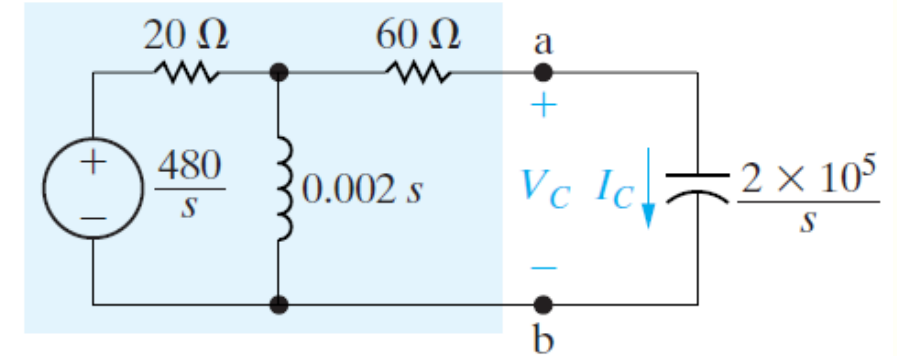
- Από διαιρέτη τάσης (60 Ω χωρίς ρεύμα)

$$V_{Th} = \frac{(480/s)(0.002s)}{20 + 0.002s} = \frac{480}{s + 10^4}$$

- $Z_{Th}$ : εξουδετέρωση πηγής και  $(0.002s \parallel 20) + 60$

$$Z_{Th} = 60 + \frac{0.002s(20)}{20 + 0.002s} = \frac{80(s + 7500)}{s + 10^4}$$

- Τελικά το ισοδύναμο είναι:



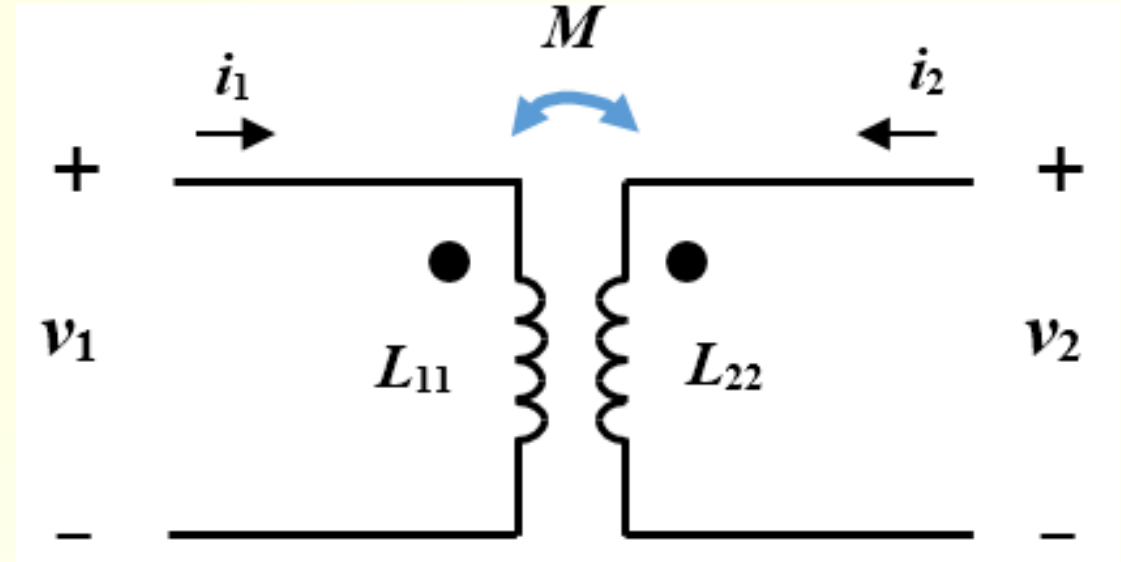
# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Από τις βασικές σχέσεις

$$v_1(t) = L_{11} \frac{d i_1(t)}{dt} + M \frac{d i_2(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = M \frac{d i_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{d i_2(t)}{dt}$$



- Περνάμε (μαθηματικά) στο πεδίο συχνότητας

$$V_1(s) = sL_{11}I_1(s) - L_{11}i_1(0^-) + sMI_2(s) - Mi_2(0^-)$$

$$V_2(s) = sL_{22}I_2(s) - L_{22}i_2(0^-) + sMI_1(s) - Mi_1(0^-)$$

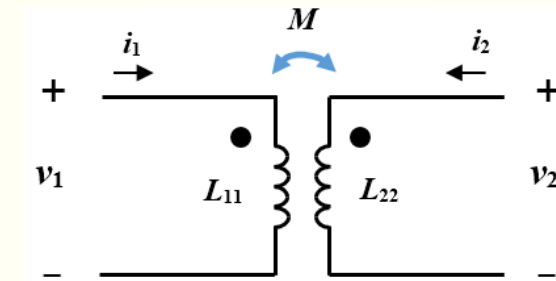
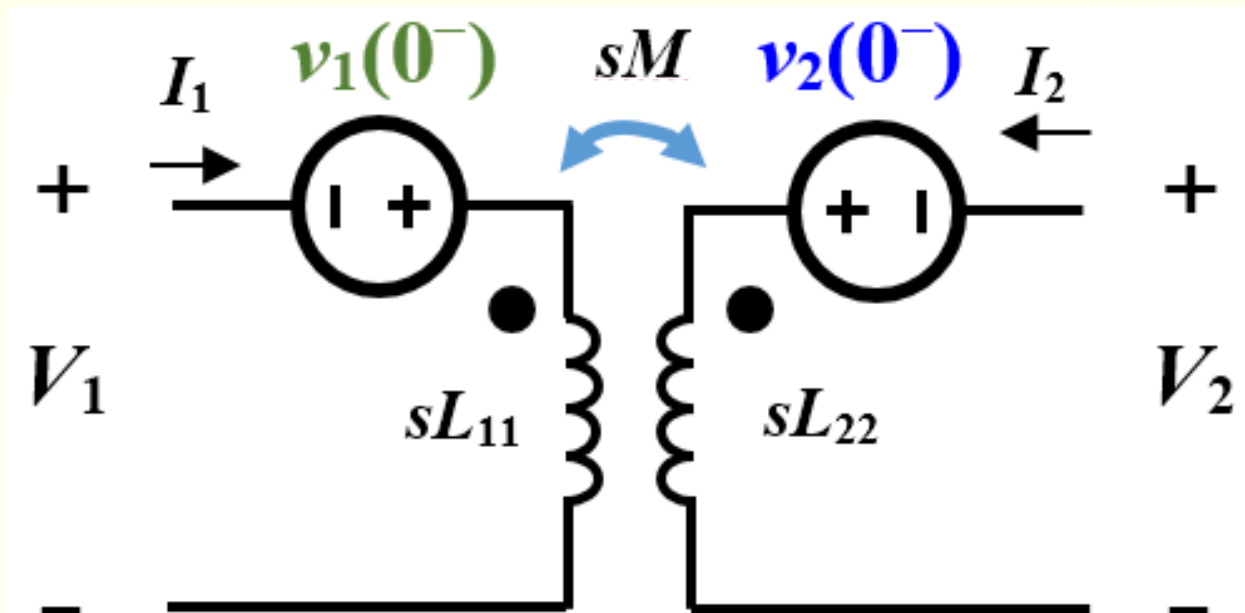
# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

$$V_1(s) = sL_{11}I_1(s) + sMI_2(s) - \underbrace{\left[ L_{11}i_1(0^-) + Mi_2(0^-) \right]}_{v_1(0^-)}$$

$$V_2(s) = sL_{22}I_2(s) + sMI_1(s) - \underbrace{\left[ L_{22}i_2(0^-) + Mi_1(0^-) \right]}_{v_2(0^-)}$$

- Από τα μαθηματικά στο ηλεκτρικό κύκλωμα:

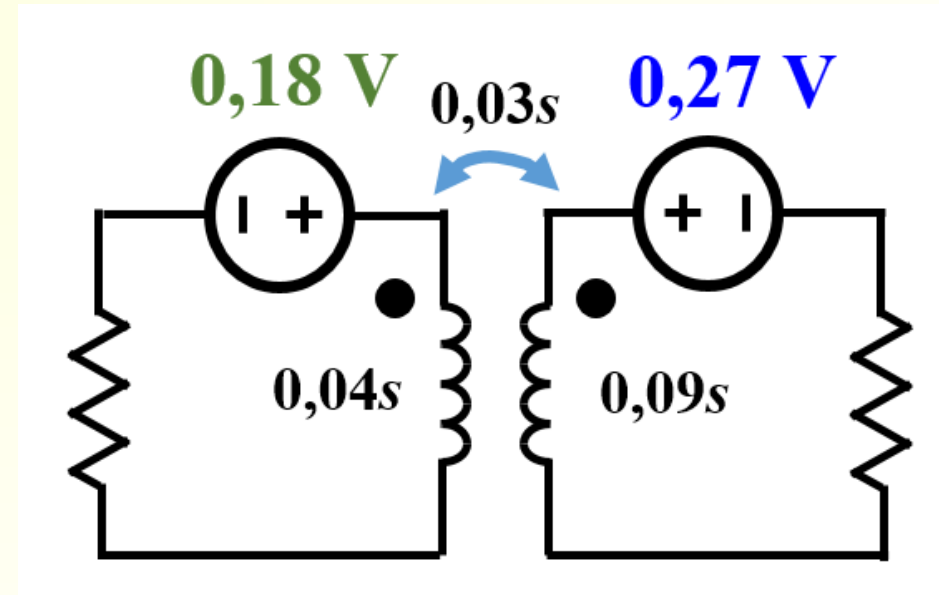
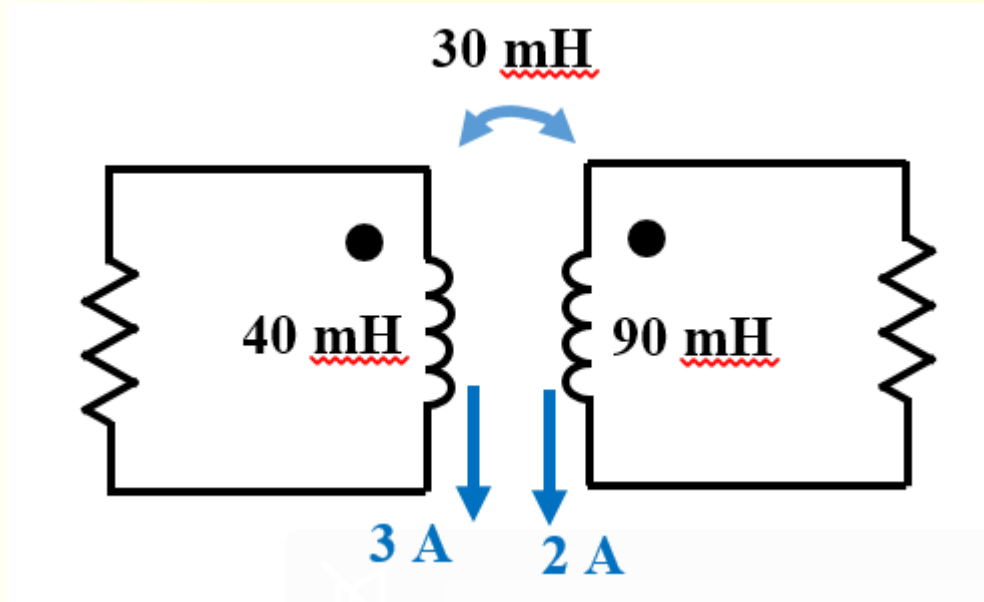
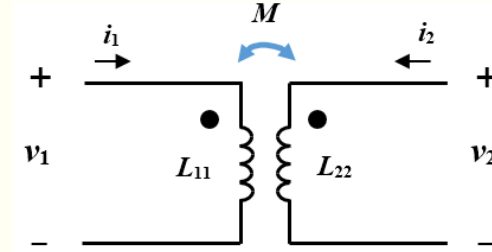


Η παρουσία αρχικού ρεύματος στο ένα πηνίο θα δημιουργήσει μια τάση εξ επαγωγής στο άλλο πηνίο όταν αυτό «ξεκινήσει» να λειτουργεί στο  $t = 0$

# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Παράδειγμα:



$$0,04 \times 3 + 0,03 \times 2 = 0,18$$

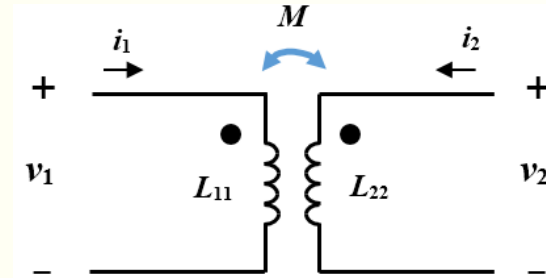
$$0,09 \times 2 + 0,03 \times 3 = 0,27$$

# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

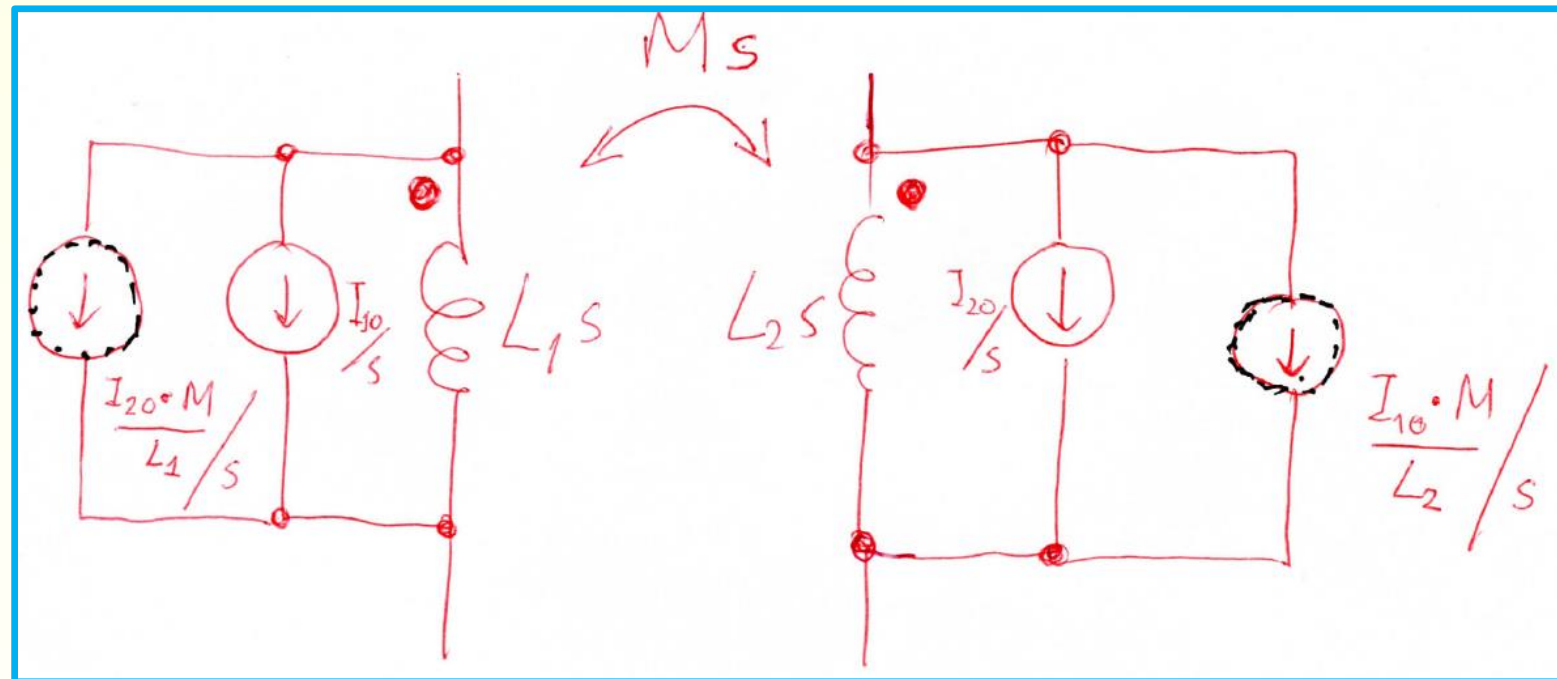
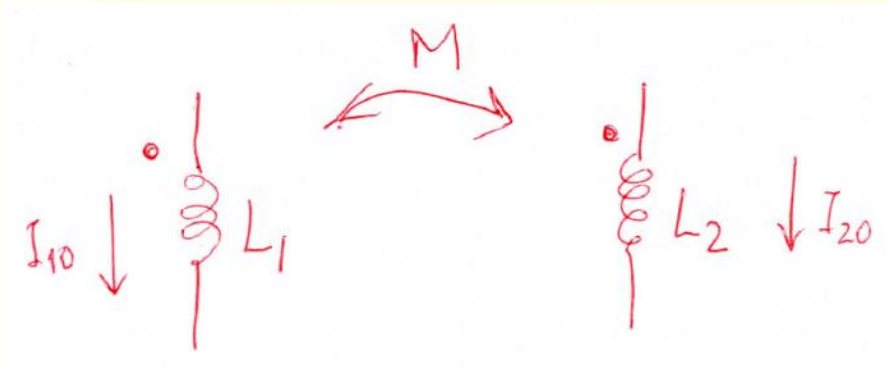
## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

$$V_1(s) = sL_{11}I_1(s) + sMI_2(s) - L_{11}i_1(0^-) - Mi_2(0^-)$$

$$V_2(s) = sL_{22}I_2(s) + sMI_1(s) - L_{22}i_2(0^-) - Mi_1(0^-)$$



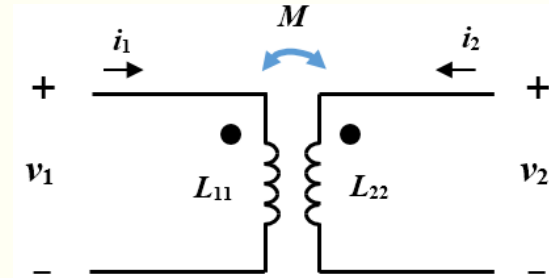
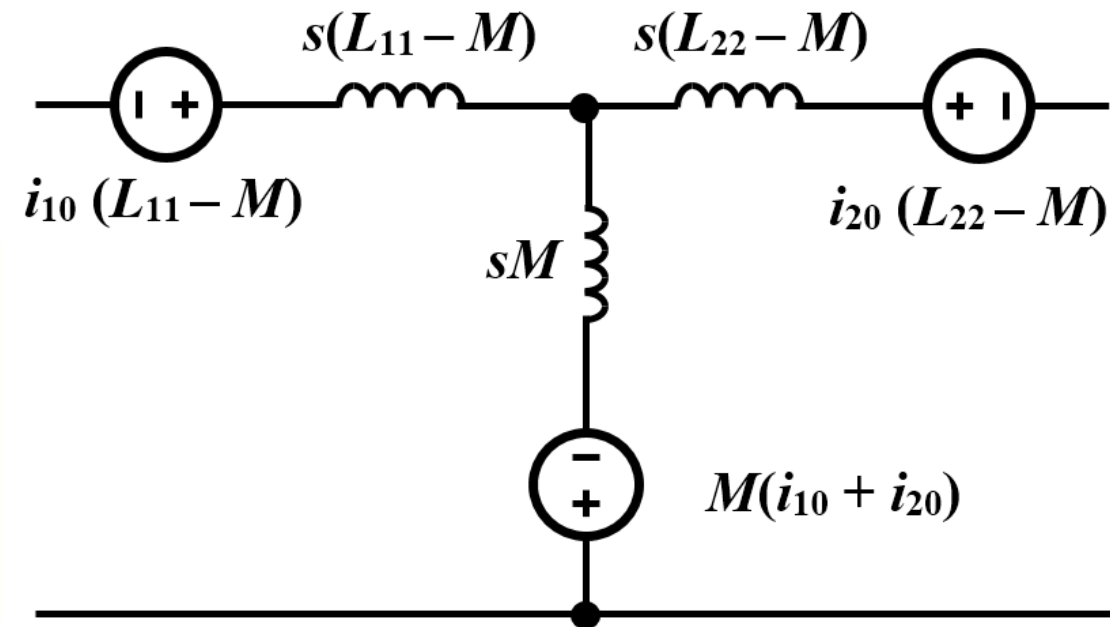
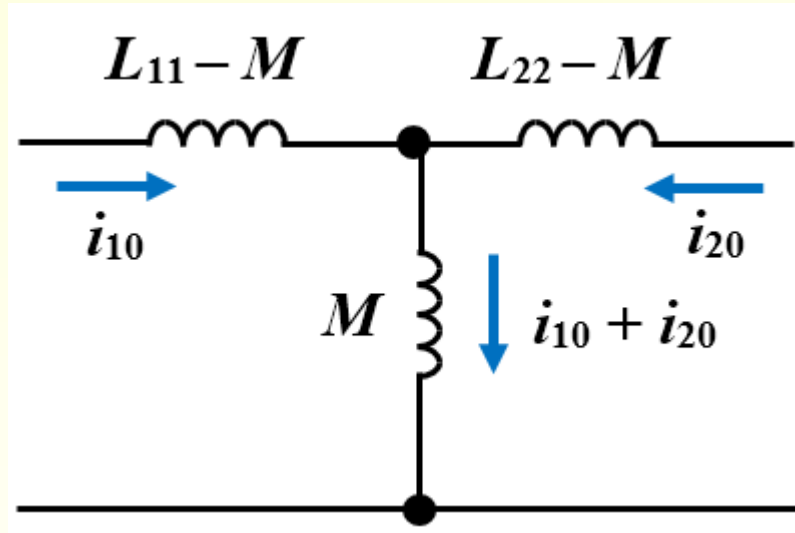
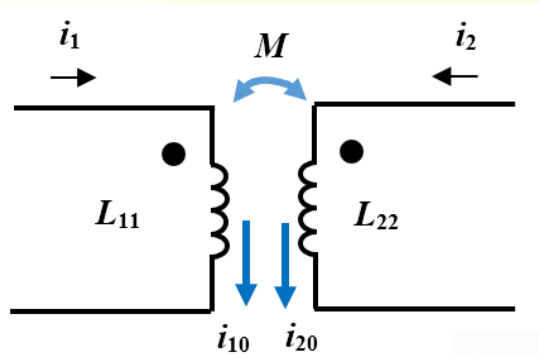
- Αν θέλουμε την αναπαράσταση με τις πηγές ρεύματος



# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

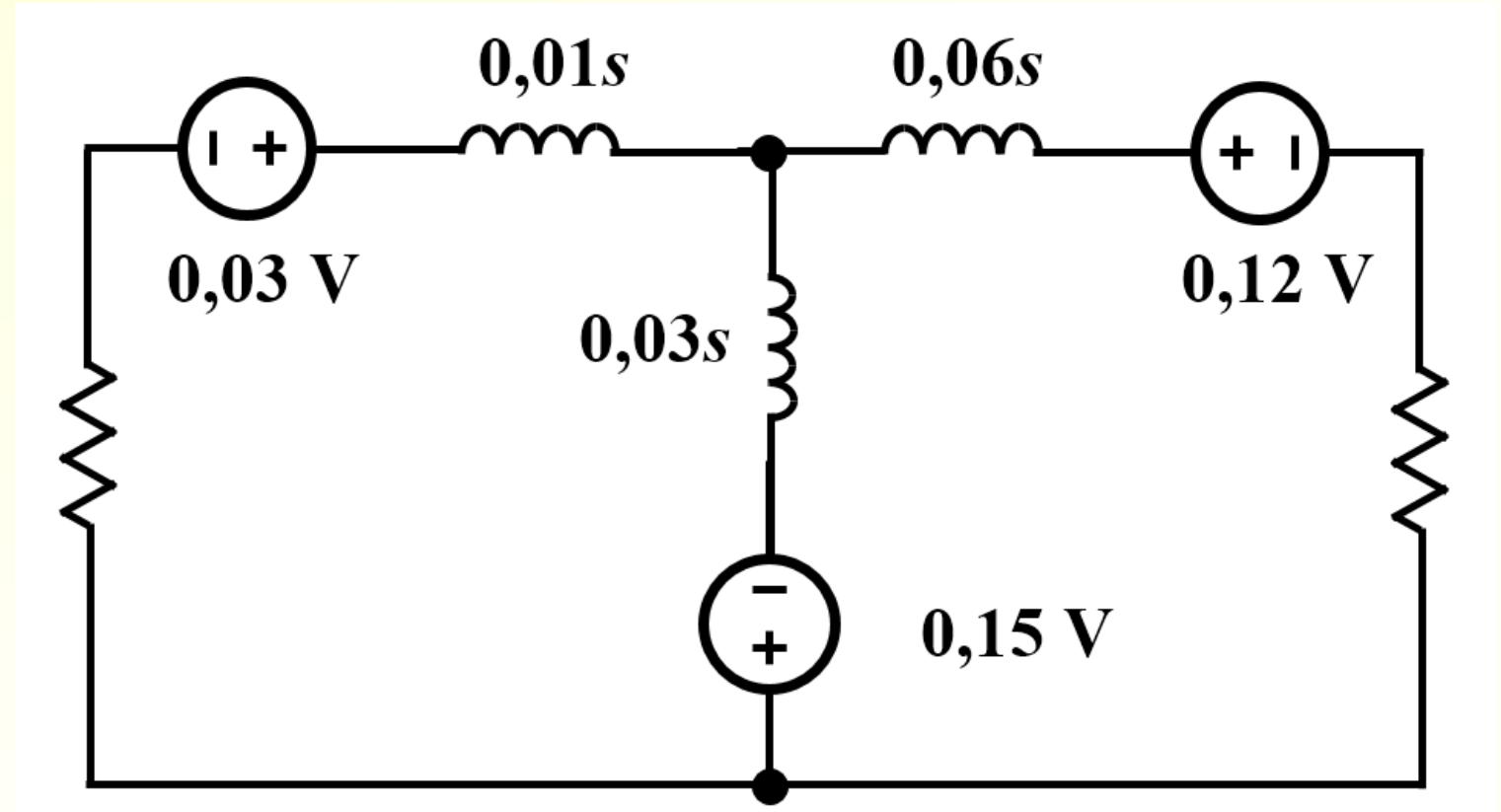
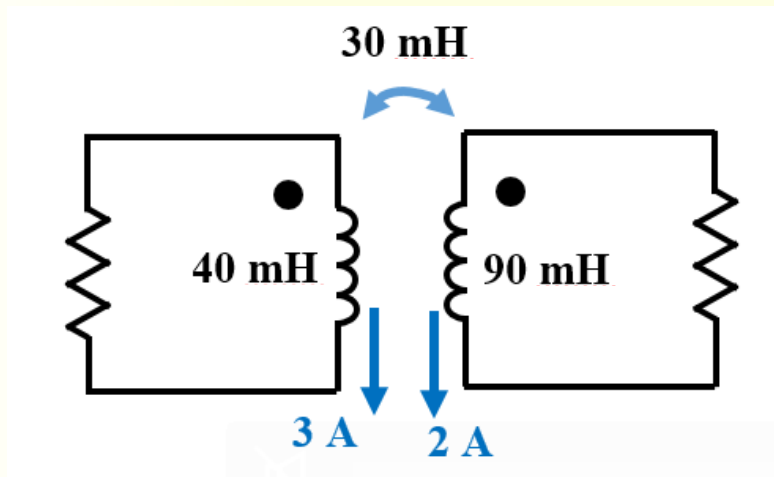
- Για το ισοδύναμο αστέρα:



# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

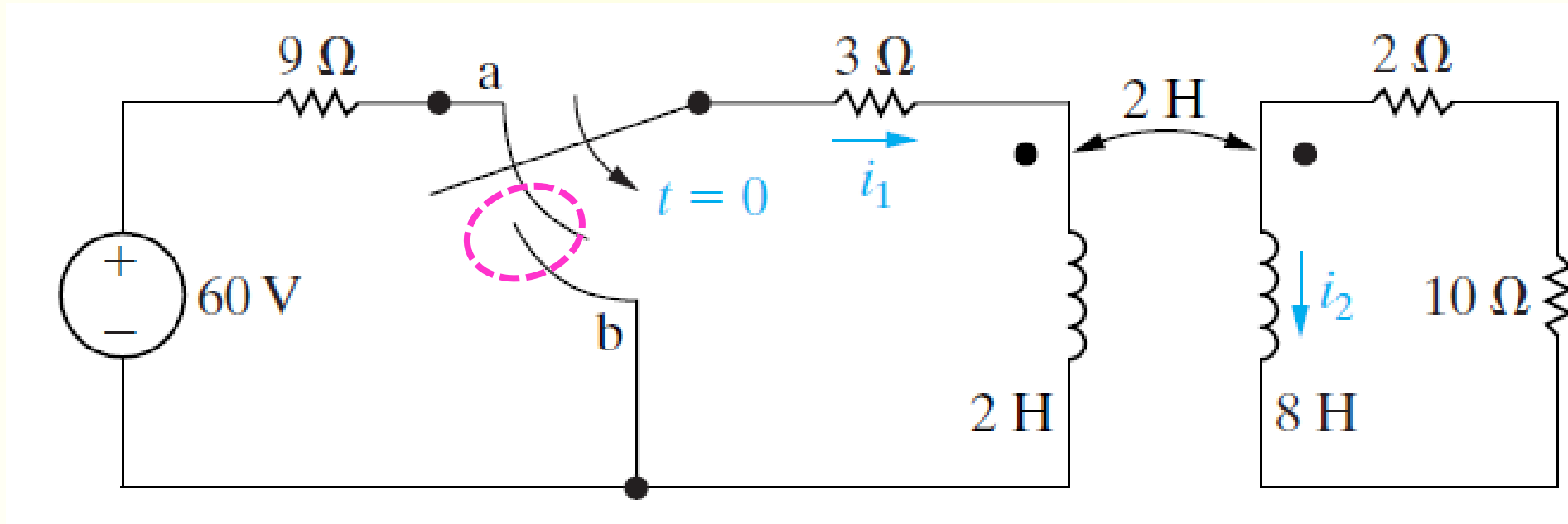
- Παράδειγμα για το ισοδύναμο αστέρα (από το προηγούμενο):



# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Ο διακόπτης βρίσκεται για πολύ χρόνο στο a και μεταβαίνει ακαριαία στο b όταν  $t = 0$
- Θέλουμε να υπολογίσουμε το  $i_2(t)$ ,  $t \geq 0$ :



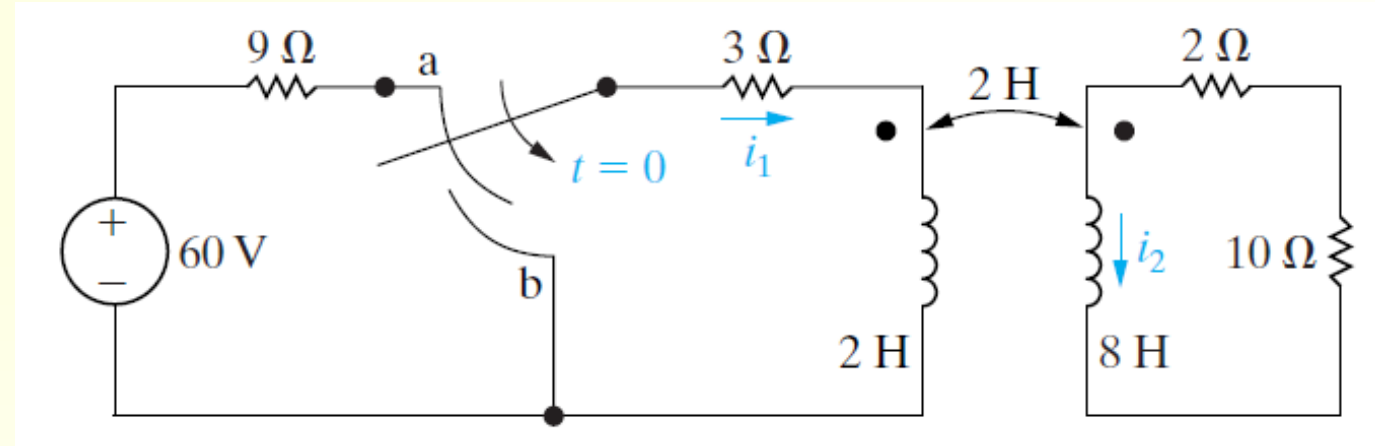
# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

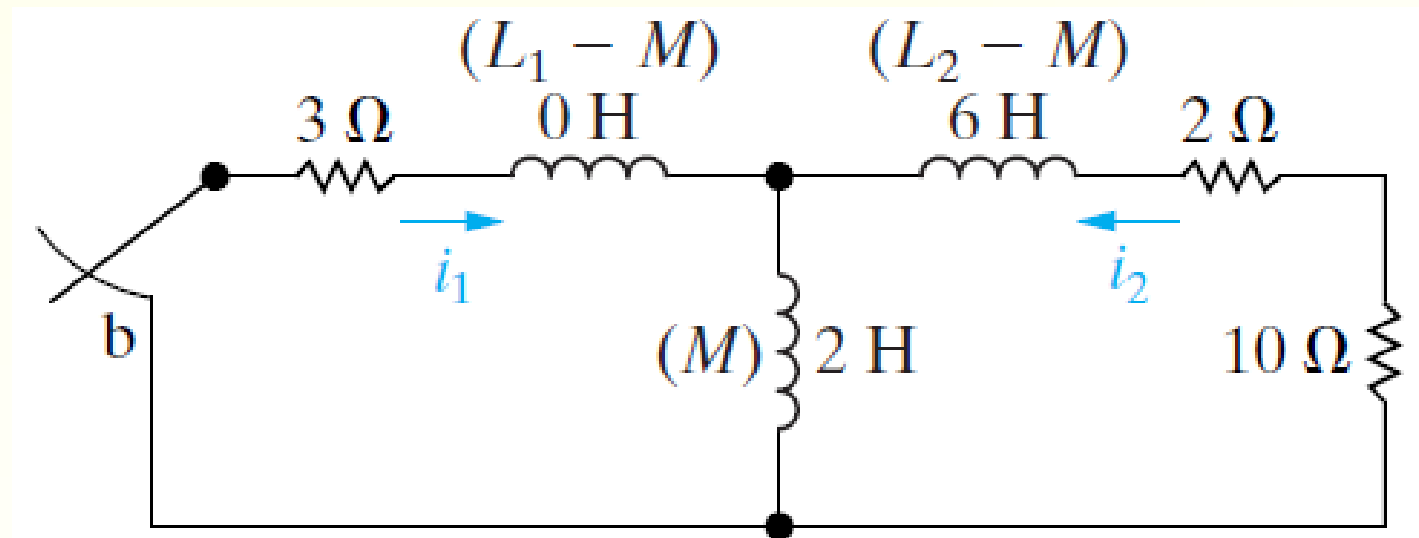
- **ΠΡΙΝ** ( $t = 0^-$ ):

$$i_1(0^-) = \frac{60}{9 + 3} = 5 \text{ A}$$

$$i_2(0^-) = 0 \text{ A}$$



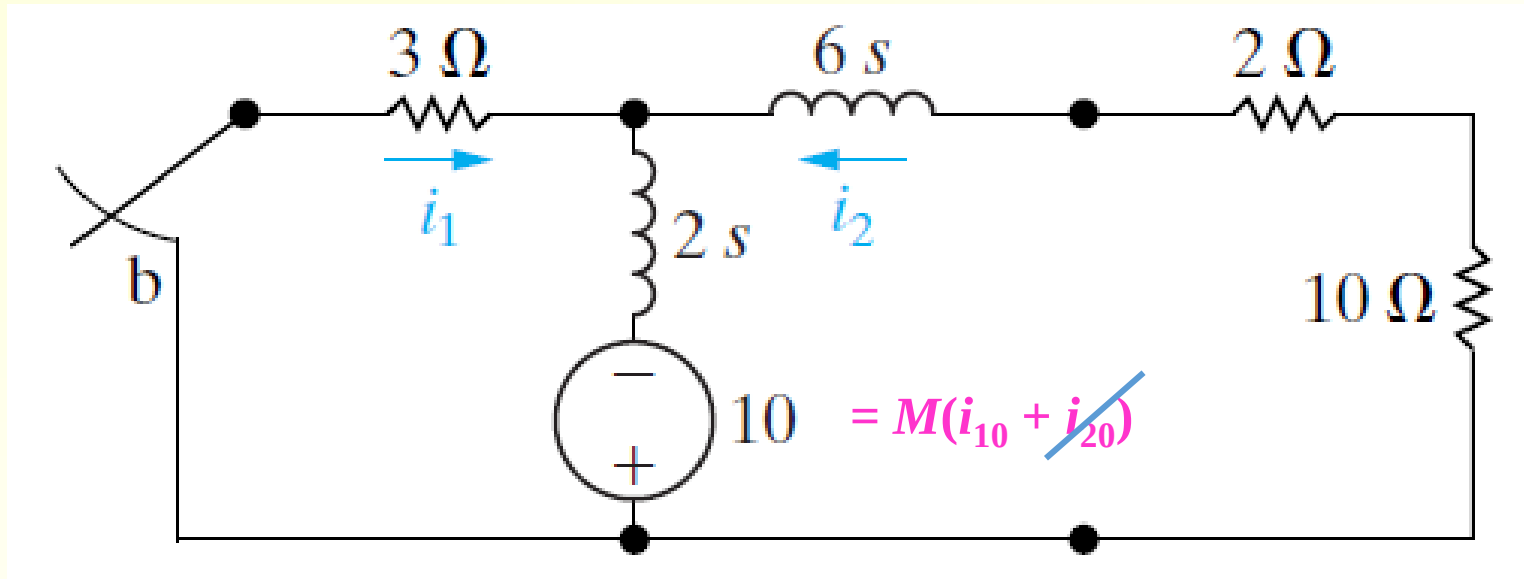
- **ΜΕΤΑ** ( $t \geq 0^+$ ) και χρήση ισοδύναμου αστέρα:



# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας:



- Επιλύουμε με βροχικές εντάσεις:

$$(3 + 2s)I_1 + 2sI_2 = 10$$

$$2sI_1 + (12 + 8s)I_2 = 10$$

# ΓΕΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

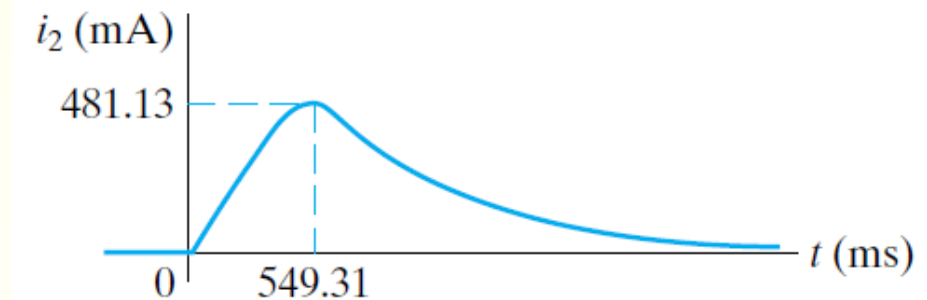
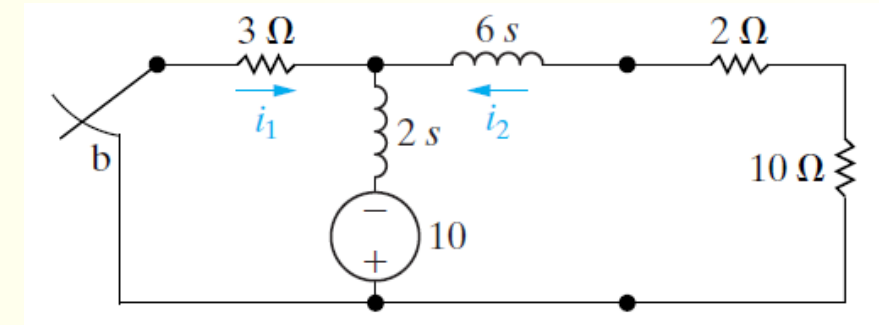
## ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Και βρίσκουμε ότι:

$$I_2 = \frac{2.5}{(s + 1)(s + 3)}$$

$$I_2 = \frac{1.25}{s + 1} - \frac{1.25}{s + 3}$$

$$i_2 = (1.25e^{-t} - 1.25e^{-3t})u(t) \text{ A}$$



# ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΩΣ ΕΔΩ

1. Καλύψαμε **τα μαθηματικά** τού μετασχηματισμού Laplace:
  - Ορισμός—Ιδιότητες—Θεωρήματα—Ανάλυση σε απλά κλάσματα
2. Χρησιμοποιήσαμε τον μετασχηματισμό Laplace για να ορίσουμε μια **νέα αναπαράσταση των ηλεκτρικών στοιχείων** (γενικευμένη σύνθετη αντίσταση:  $R$ ,  $sL$ ,  $1/sC$ )
3. Διαπιστώσαμε ότι μπορούμε να επιλύσουμε οποιοδήποτε κύκλωμα στο πεδίο συχνότητας χρησιμοποιώντας τις ήδη γνωστές τεχνικές (ΚΤ, ΒΕ, κλπ.)

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον μετασχηματισμό Laplace για βαθύτερη ανάλυση