

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ Β: ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΥΘΑΙΡΕΤΗ ΕΙΣΟΔΟ

- Θα ξεκινήσουμε από την απόκριση ηλεκτρικού κυκλώματος που διεγείρεται από **αυθαίρετη είσοδο** $i_s(\cdot)$ που εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή t_0 με το κύκλωμα να βρίσκεται σε μηδενική αρχική κατάσταση (**ΑΜΚ**)
- Θεωρούμε ότι $i_s(t) = 0$ για $t < t_0$
- Θεωρούμε σαν **απόκριση** (ΑΜΚ) την τάση $v(\cdot)$
- Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα θα πρέπει να προσεγγίσουμε κατάλληλα την κυματομορφή $i_s(\cdot)$

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΑΥΘΑΙΡΕΤΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ

- Προσέγγιση της $i_s(\cdot)$: Διαιρούμε το χρονικό διάστημα (t_0, t) σε μεγάλο αριθμό n υποδιαστημάτων ίσης διάρκειας Δ έτσι ώστε

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdots = t_k - t_{k-1} = \cdots = t - t_{n-1} = \Delta \quad (t_n = t)$$

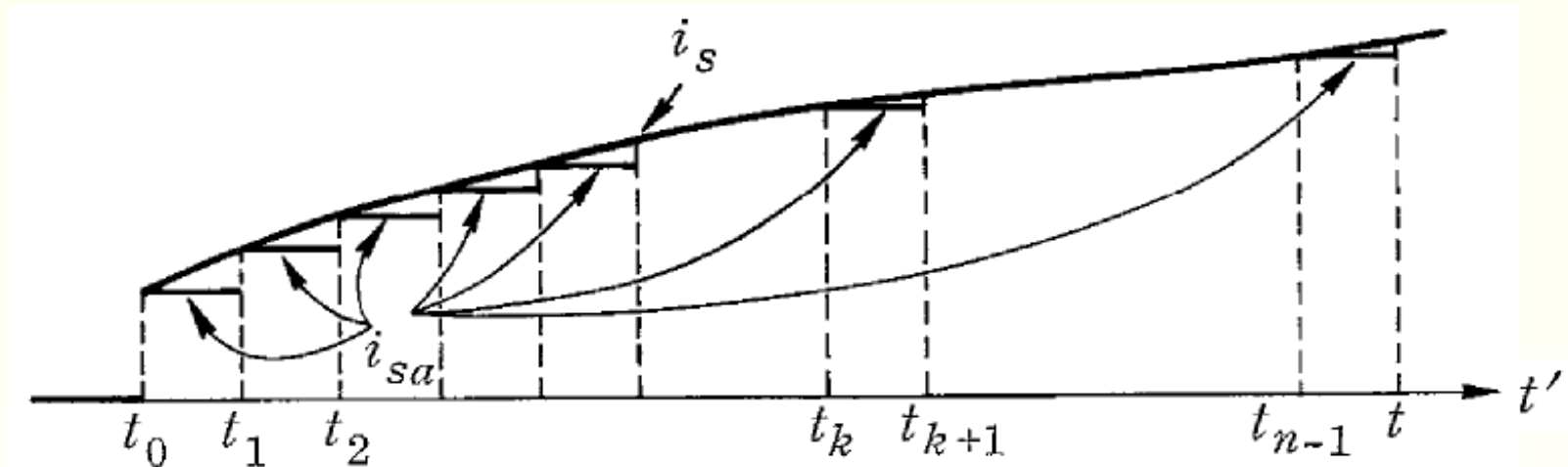
- Στη συνέχεια θεωρούμε μια **βηματική** προσέγγιση της $i_s(\cdot)$

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΑΥΘΑΙΡΕΤΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ

- Η προσέγγιση της $i_s(\cdot)$ θα πάρει τη μορφή:

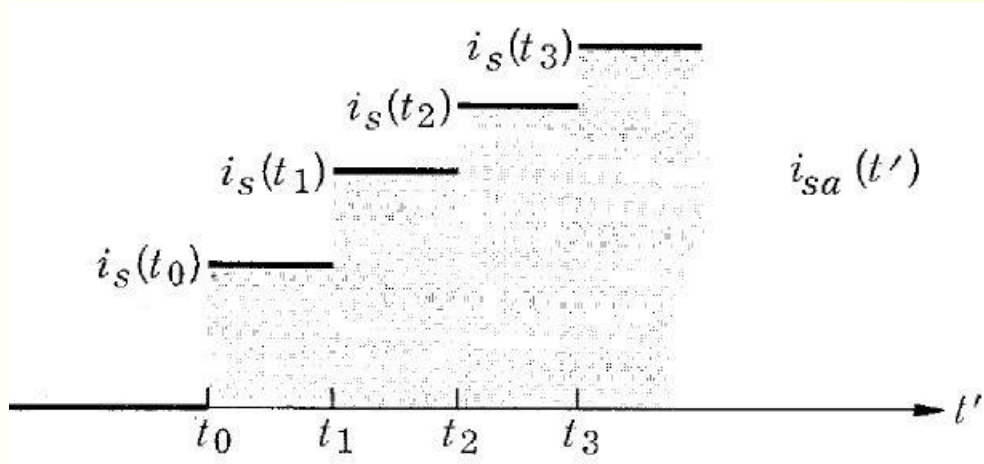
$$i_{sa}(t') = \begin{cases} i_s(t_0) & t_0 \leq t' < t_1 \\ i_s(t_1) & t_1 \leq t' < t_2 \\ \dots & \dots \\ i_s(t_k) & t_k \leq t' < t_{k+1} \\ \dots & \dots \\ i_s(t_{n-1}) & t_{n-1} \leq t' < t_n = t \end{cases}$$

1. Για μη παθολογικές κυματομορφές, θα ισχύει ότι
 $i_{sa}(\cdot) \rightarrow i_s(\cdot)$ καθώς $n \rightarrow \infty$
2. Το «ρολόι» μας είναι το t'
3. Ο χρόνος παρατήρησης είναι το t



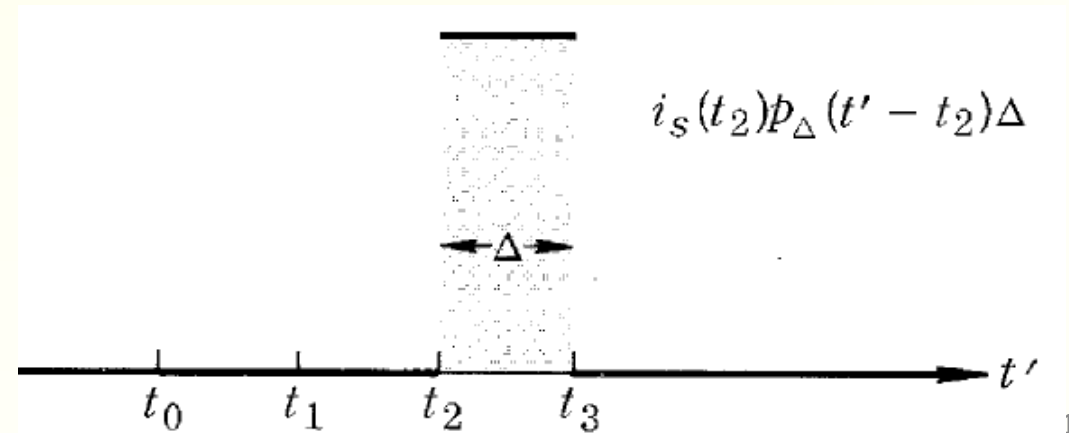
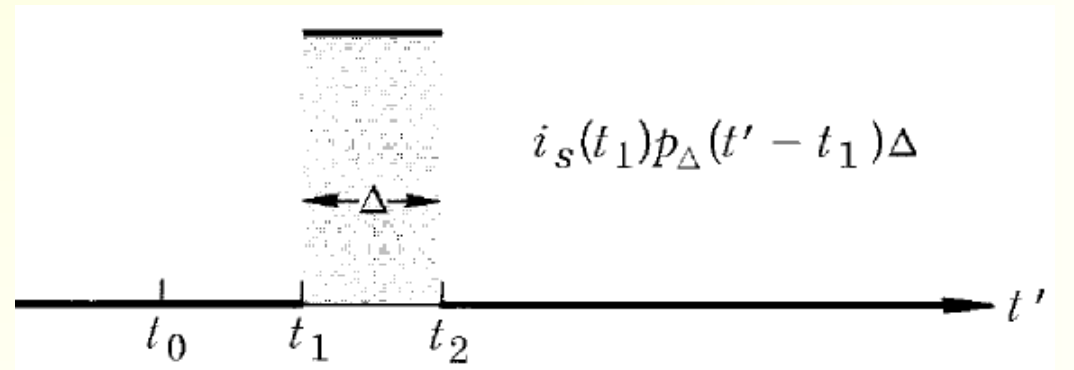
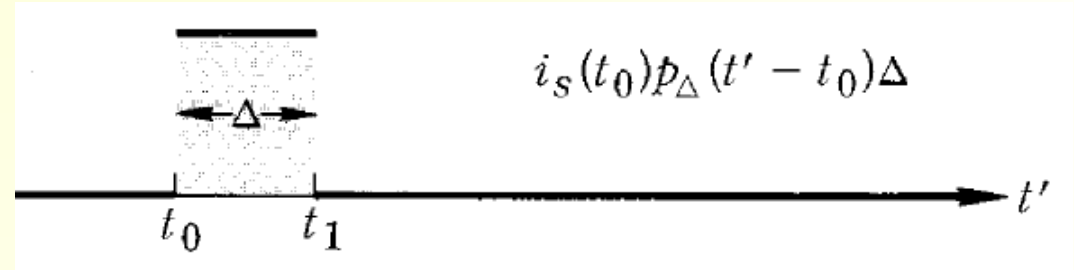
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΑΥΘΑΙΡΕΤΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ

- Παρατηρούμε ότι η $i_{sa}(\cdot)$ είναι μια συλλογή από παλμικές:



$$p_{\Delta}(t') = \begin{cases} 0 & t' \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t' < \Delta \\ 0 & \Delta \leq t' \end{cases}$$

$$p_{\Delta}(t' - t_k) = \begin{cases} 0 & t' \leq t_k \\ \frac{1}{\Delta} & t_k < t' < t_k + \Delta \\ 0 & t_k + \Delta \leq t' \end{cases}$$



ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΑΥΘΑΙΡΕΤΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ

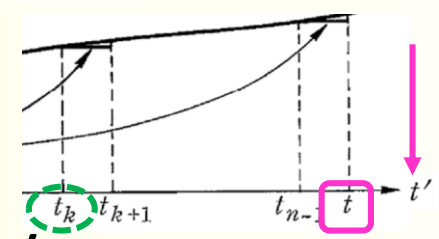
- Τελικά λοιπόν η $i_{sa}(\cdot)$ θα μπορεί να γραφεί σαν

$$i_{sa}(t') = i_s(t_0) p_{\Delta}(t' - t_0) \Delta + i_s(t_1) p_{\Delta}(t' - t_1) \Delta + i_s(t_2) p_{\Delta}(t' - t_2) \Delta + \dots \\ + i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta + \dots + i_s(t_{n-1}) p_{\Delta}(t' - t_{n-1}) \Delta$$

- Τώρα, επειδή το κύκλωμα είναι γραμμικό και ισχύει η αρχή της επαλληλίας, η ΑΜΚ $v(\cdot)$ στο αρχικό σήμα είναι το άθροισμα των ΑΜΚ σε κάθε παλμική χωριστά
- Δηλαδή, το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στην εύρεση της απόκρισης σε μια παλμική, έστω στην $(k + 1)$ που είναι η

$$i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ



- Αποκαλώντας h_{Δ} την απόκριση ΑΜΚ σε μια παλμική p_{Δ} , τότε με τη γραμμικότητα και το χρονικό αμετάβλητο της διέγερσης:

$$\text{ΑΜΚ σε } i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta = i_s(t_k) h_{\Delta}(t - t_k) \Delta$$

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** ο παλμός $p_{\Delta}(t' - t_k)$ εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή t_k και ο χρόνος παρατήρησης είναι ο t , οπότε έχουν παρέλθει ακριβώς $(t - t_k)$ δευτερόλεπτα από την εφαρμογή τής εισόδου
- Γενικά, η απόκριση θα έχει μια μορφή σαν $g(t, t_k)$ όμως επειδή υπάρχει γραμμικότητα και το χρονικό αμετάβλητο της διέγερσης, θα ισχύει ότι $g(t, t_k) = g(t + T, t_k + T)$ για κάθε μετατόπιση T
- Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $(t - t_k)$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

- Η ίδια παρατήρηση για τη χρονική μετατόπιση ισχύει και για όλους τούς υπόλοιπους παλμούς, οπότε η ΑΜΚ $v(\cdot)$ στο $i_{sq}(\cdot)$ είναι:

$$v(t) = i_s(t_0)h_{\Delta}(t-t_0)\Delta + i_s(t_1)h_{\Delta}(t-t_1)\Delta + i_s(t_2)h_{\Delta}(t-t_2)\Delta + \dots$$

$$+ i_s(t_k)h_{\Delta}(t-t_k)\Delta + \dots + i_s(t_{n-1})h_{\Delta}(t-t_{n-1})\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k)h_{\Delta}(t-t_k)\Delta$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

- Στο σημείο αυτό μπορούμε να αφήσουμε το n να πάει στο άπειρο:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta = \frac{t - t_0}{n} \rightarrow 0$$

- Καθώς το Δ εκμηδενίζεται, συμβαίνουν τα ακόλουθα:

$$i_{sa}(\cdot) \rightarrow i_s(\cdot)$$

$$h_{\Delta}(\cdot) \rightarrow h(\cdot)$$

$h(t)$: Κρουστική απόκριση

$$\sum \rightarrow \int$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k) h_{\Delta}(t - t_k) \Delta \rightarrow \int_{t_0}^t i_s(t') h(t - t') dt'$$

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

- Και συνολικά:

$$v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt', \quad t \geq t_0$$

- Αυτό είναι το **ολοκλήρωμα της συνέλιξης** (convolution integral) που μας δίνει την απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου κυκλώματος (ή συστήματος, γενικότερα) σε αυθαίρετη είσοδο/διέγερση, αρκεί να μάς είναι γνωστή η κρουστική απόκριση h αυτού τού κυκλώματος (ή συστήματος)
- Δεν χρειαζόμαστε πια διαφορικές εξισώσεις!

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ-ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

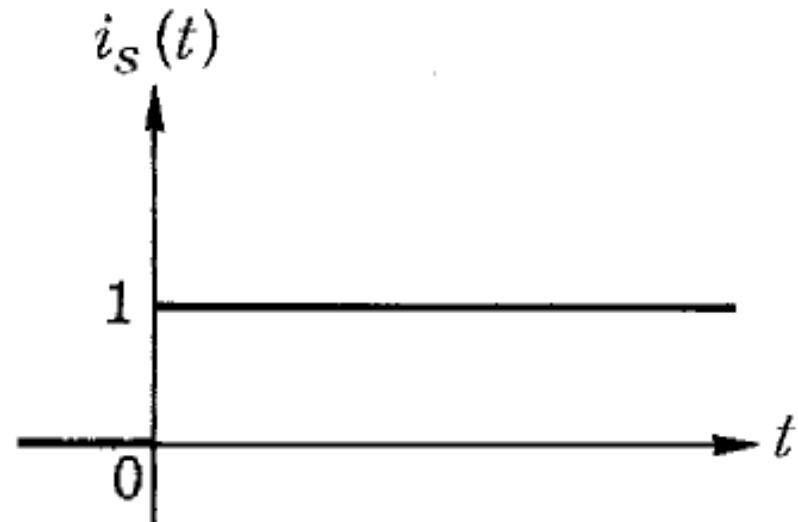
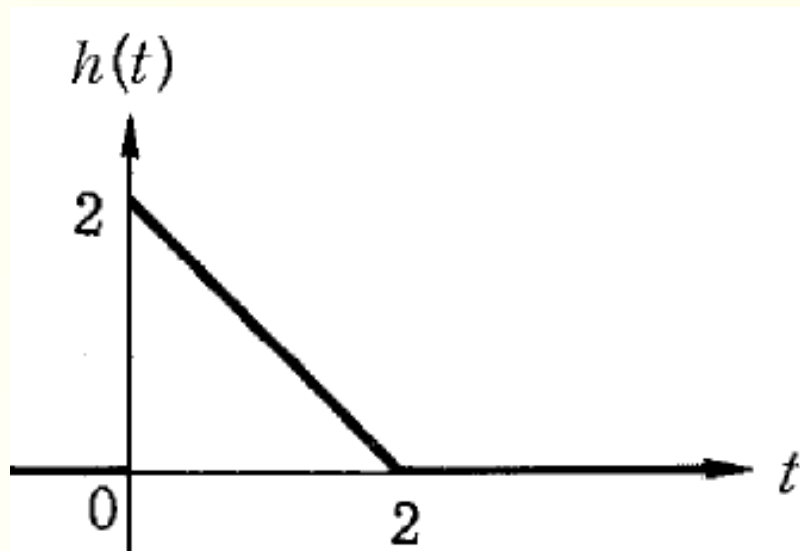
$$v(t) = \int_{t_0}^t h(t - t') i_s(t') dt', \quad t \geq t_0$$

- Η ολοκλήρωση αρχίζει από το t_0 και σταματάει στο t ακριβώς
- Εξάρτηση από το t : Ο χρόνος παρατήρησης t δίνει και το ανώτατο χρονικό όριο ισχύος για το ολοκλήρωμα
- Εξάρτηση από το t : Κάθε φορά που αλλάζει το t , πρέπει να υπολογίζουμε εκ νέου το ολοκλήρωμα
- Αν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση του κυκλώματος δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε διαφορικές εξισώσεις

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

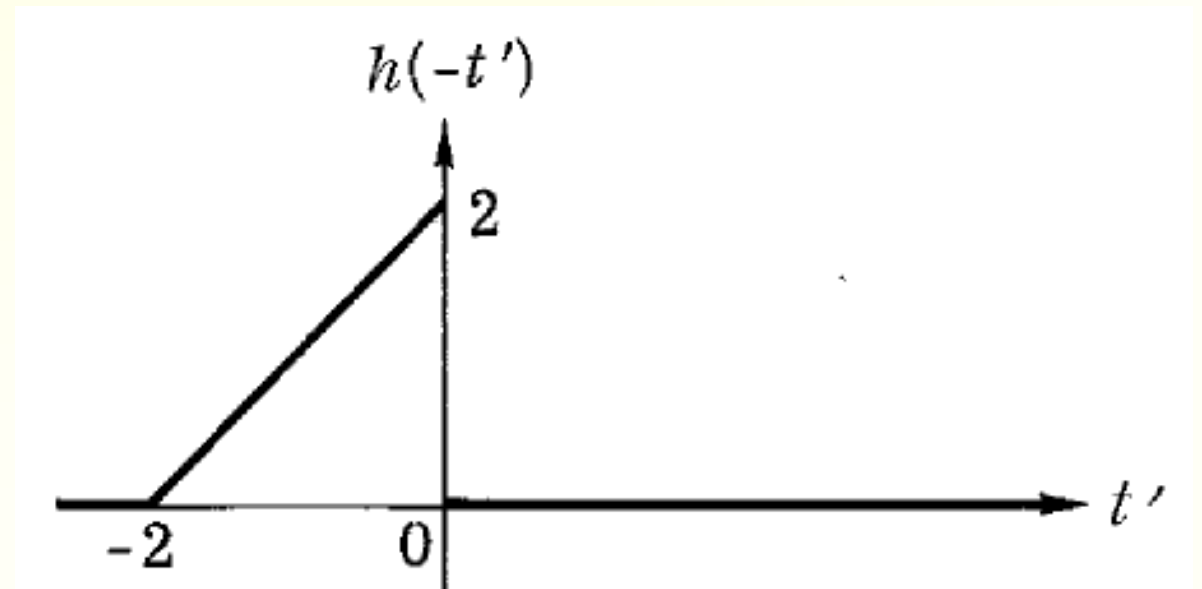
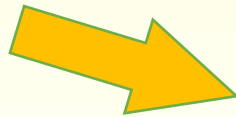
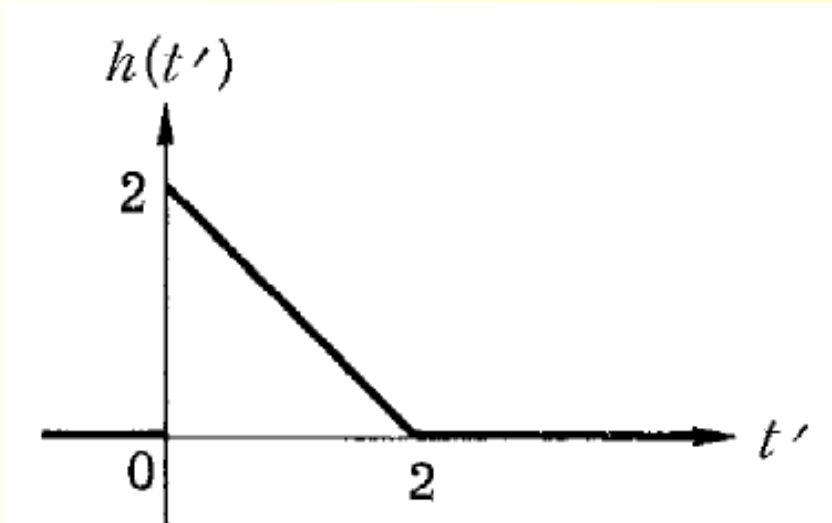
$$\int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt', \quad t \geq t_0$$

- Ο υπολογισμός τού ολοκληρώματος μπορεί να γίνει με γραφικό τρόπο
- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα συνέλιξης για τις συναρτήσεις ($t_0 = 0$)



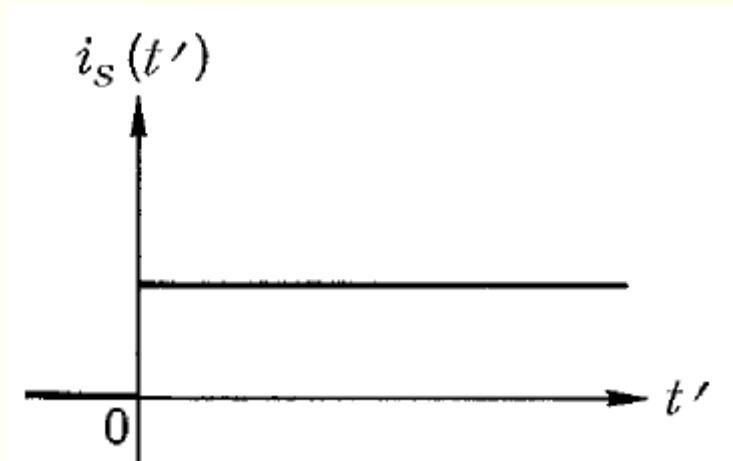
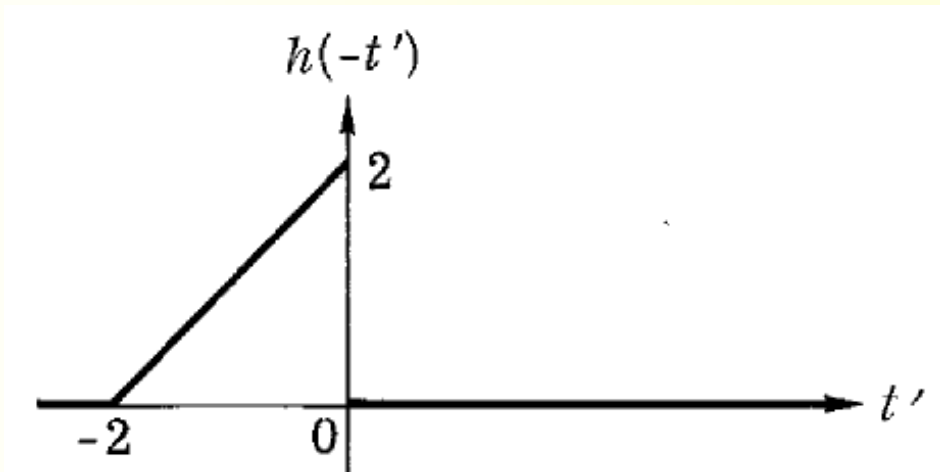
ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\int_0^t h(t-t') i_s(t') dt'$$



ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\int_0^t h(t-t') i_s(t') dt'$$



$$t = 0$$

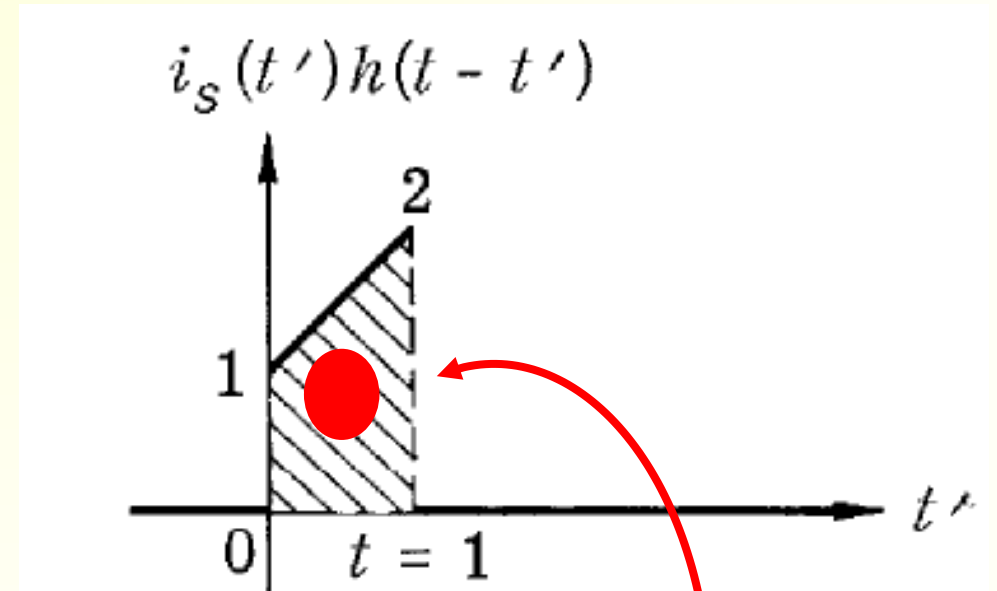
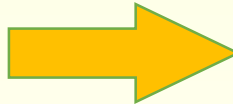
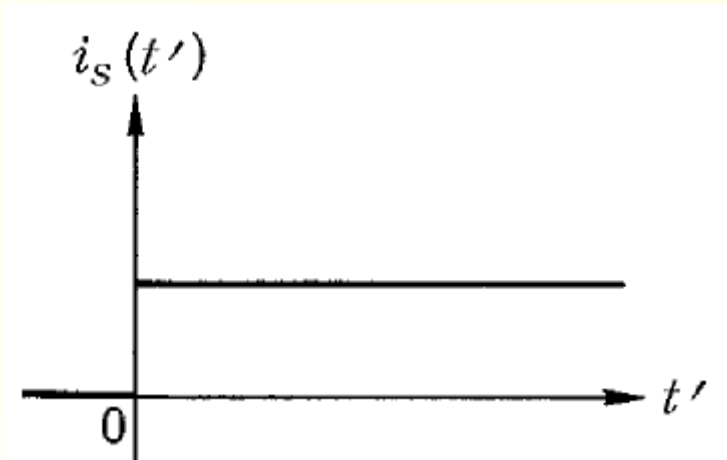
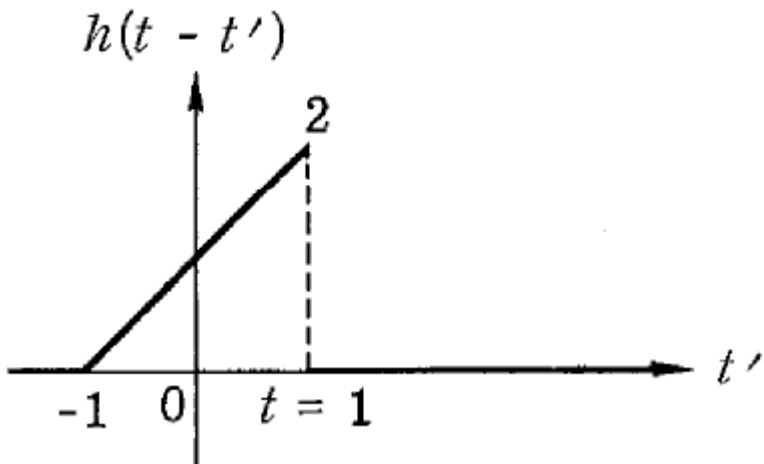
➡ $\int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' = 0, \quad t > 0$

$$\int_0^0 h(t-t') i_s(t') dt' = 0$$

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

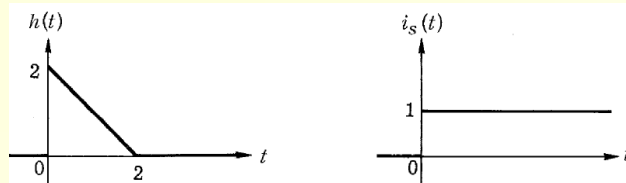
$$\int_0^t h(t-t') i_s(t') dt'$$

$$t = 1$$



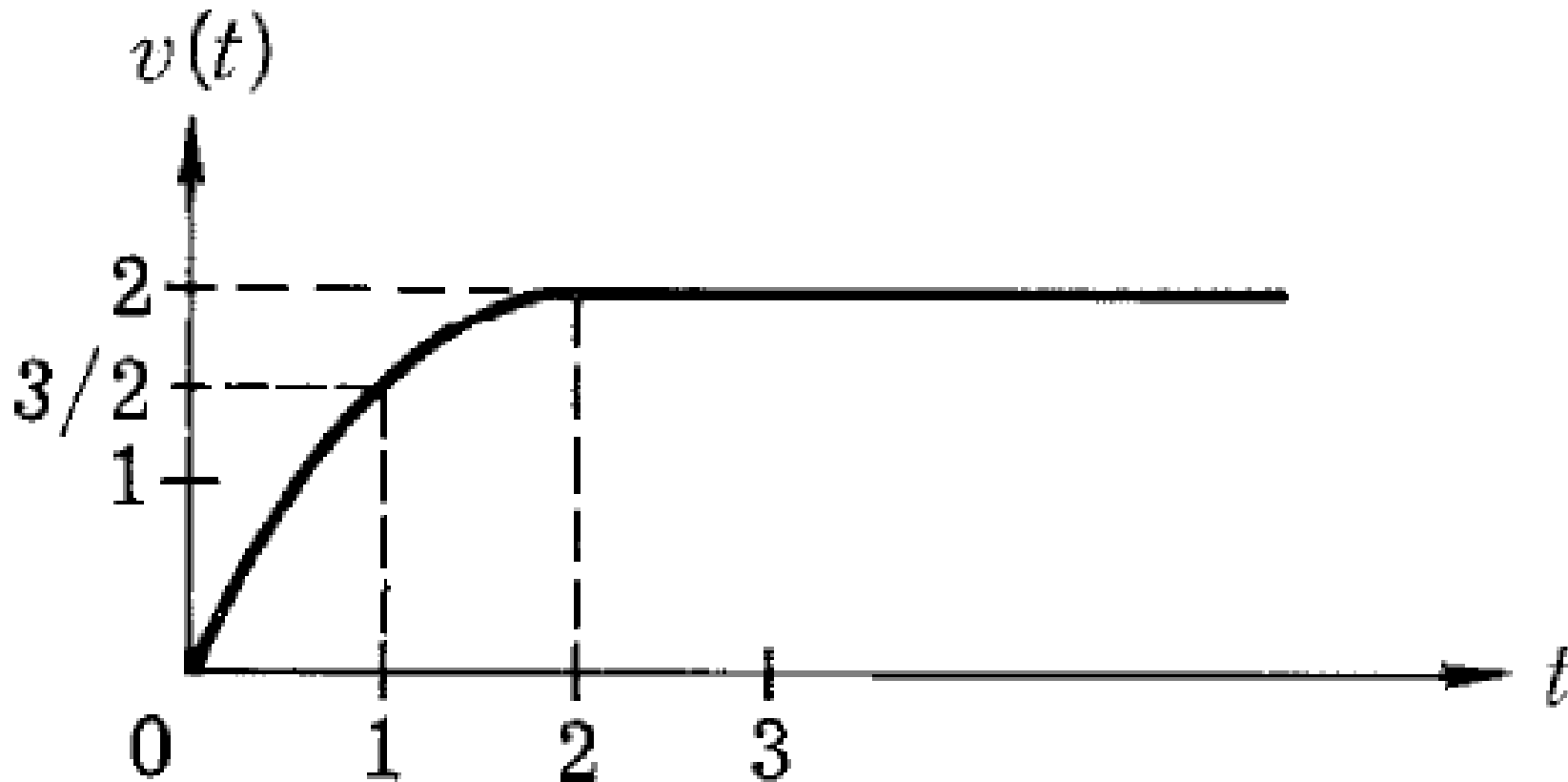
$$\int_0^1 h(1-t') i_s(t') dt' = \frac{3}{2}$$

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ



$$\int_0^t h(t-t') i_s(t') dt'$$

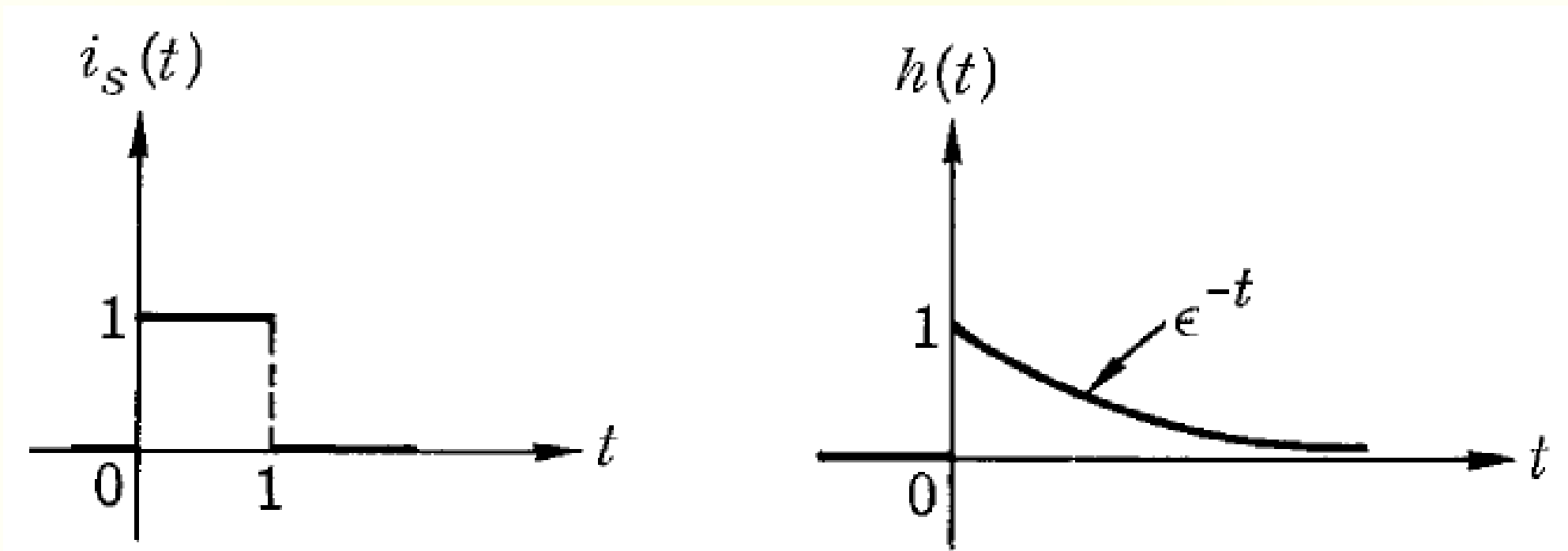
- Τελικά:



ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

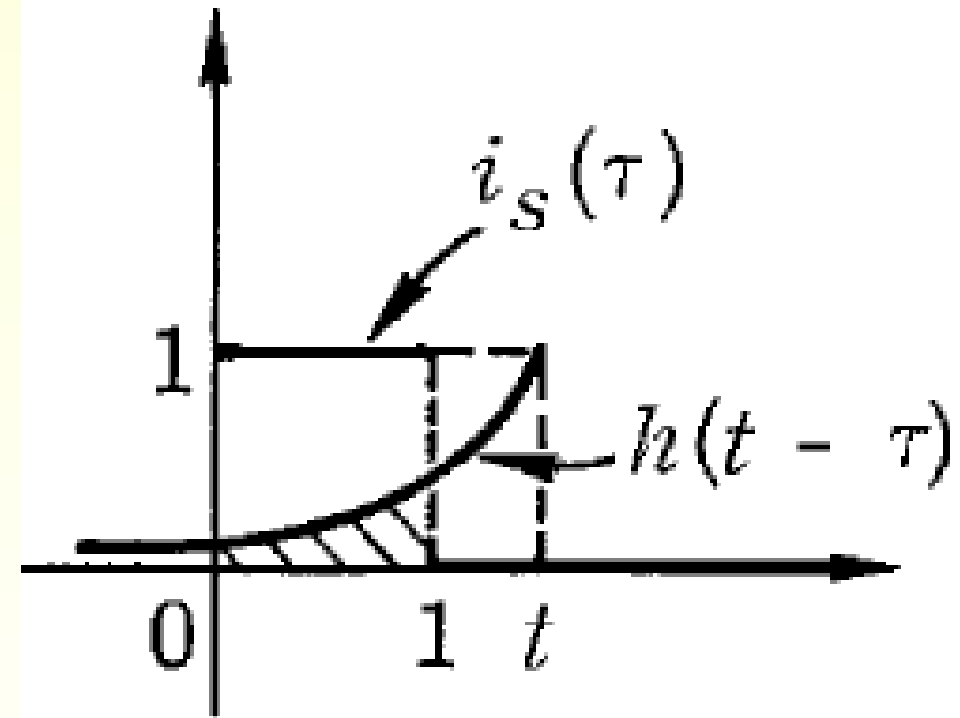
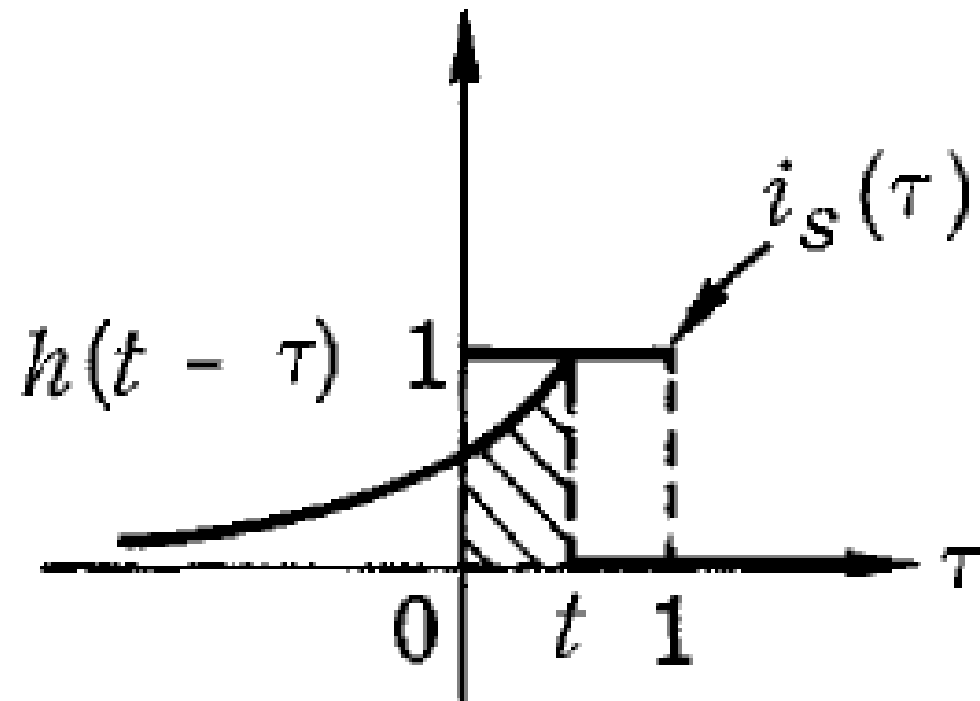
$$\int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt', \quad t \geq t_0$$

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα συνέλιξης για τις συναρτήσεις ($t_0 = 0$)



ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

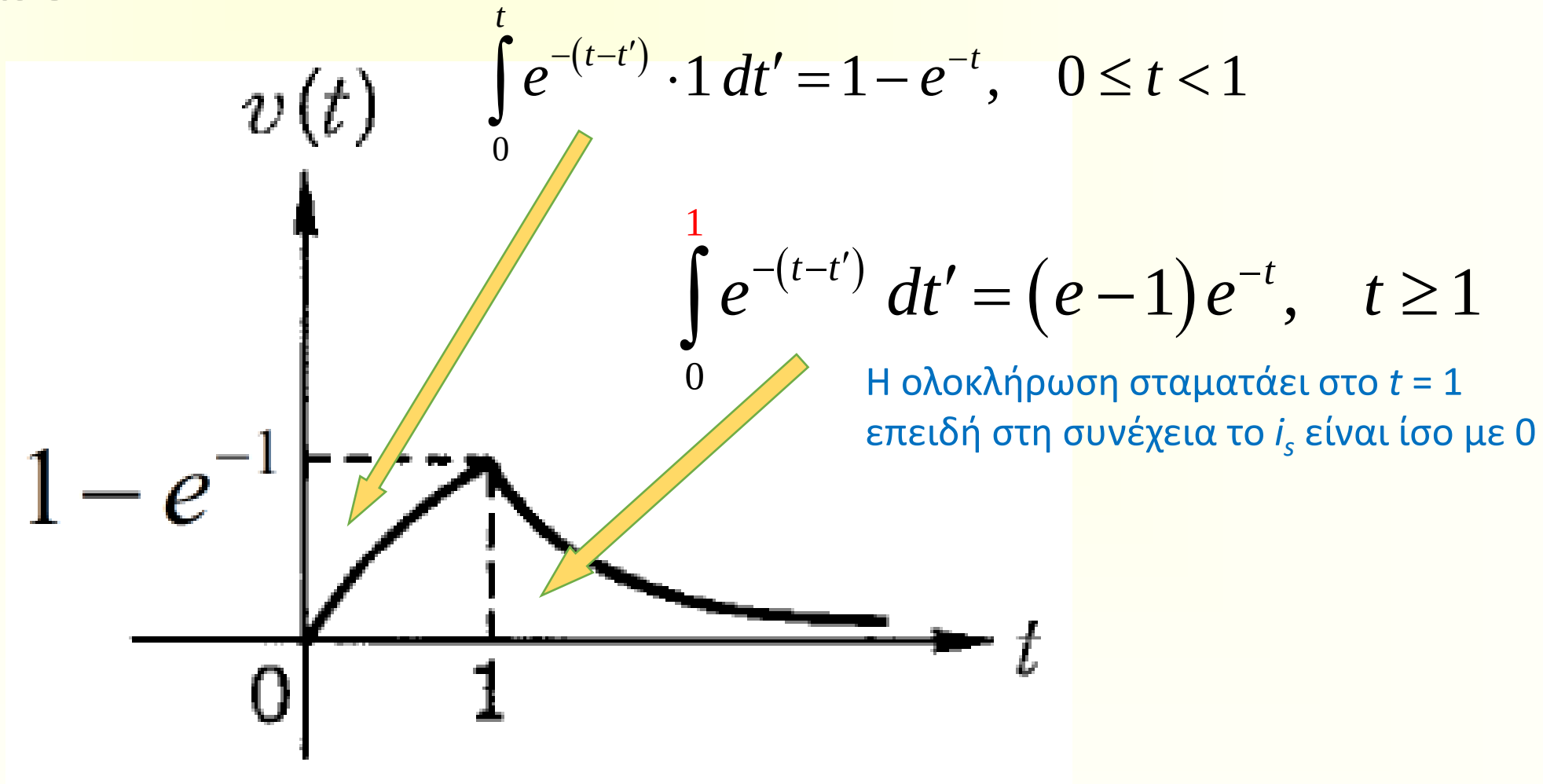
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2



ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

• Τελικά:



ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

- **ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ** (CONVOLUTION THEOREM)

- Με $h(t) = g(t) = 0$ για $t < 0$ και $h(0) = g(0) = 0$, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\{h(t) * g(t)\} = H(s)G(s)$$

«Συνέλιξη στο πεδίο τού χρόνου ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό στο πεδίο τής συχνότητας»

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ—ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\mathcal{L}\{h(t) * g(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^t h(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

- Επειδή $h(t-\tau) = 0$ όταν $\tau > t$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το πάνω όριο στο εσωτερικό ολοκλήρωμα (συνέλιξης) με ∞ :

$$\mathcal{L}\{h(t) * g(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} h(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

- Κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής:

$$v = t - \tau \Rightarrow t = v + \tau \Rightarrow dt = dv + d\tau = dv$$

(επειδή το τ είναι σταθερό σε σχέση με το t)

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ—ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Οπότε:

$$\mathcal{L}\{h(t) * g(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \int_{0^-}^{\infty} h(v) g(\tau) d\tau e^{-s\tau} e^{-sv} dv$$

Θεώρημα Fubini

$$= \int_{0^-}^{\infty} h(v) e^{-sv} dv \int_{0^-}^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= H(s) G(s)$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ + ΘΕΩΡΗΜΑ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- **ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ:**

$$f(t) * g(t) = \int_{0^-}^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

$$z = t - \tau \Rightarrow \tau = t - z \Rightarrow d\tau = -dz$$

$$= - \int_t^{0^-} f(z) g(t - z) dz$$

$$= \int_{0^-}^t g(t - z) f(z) dz = g(t) * f(t)$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ + ΘΕΩΡΗΜΑ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- **ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ:**

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$

- **ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ:**

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$$

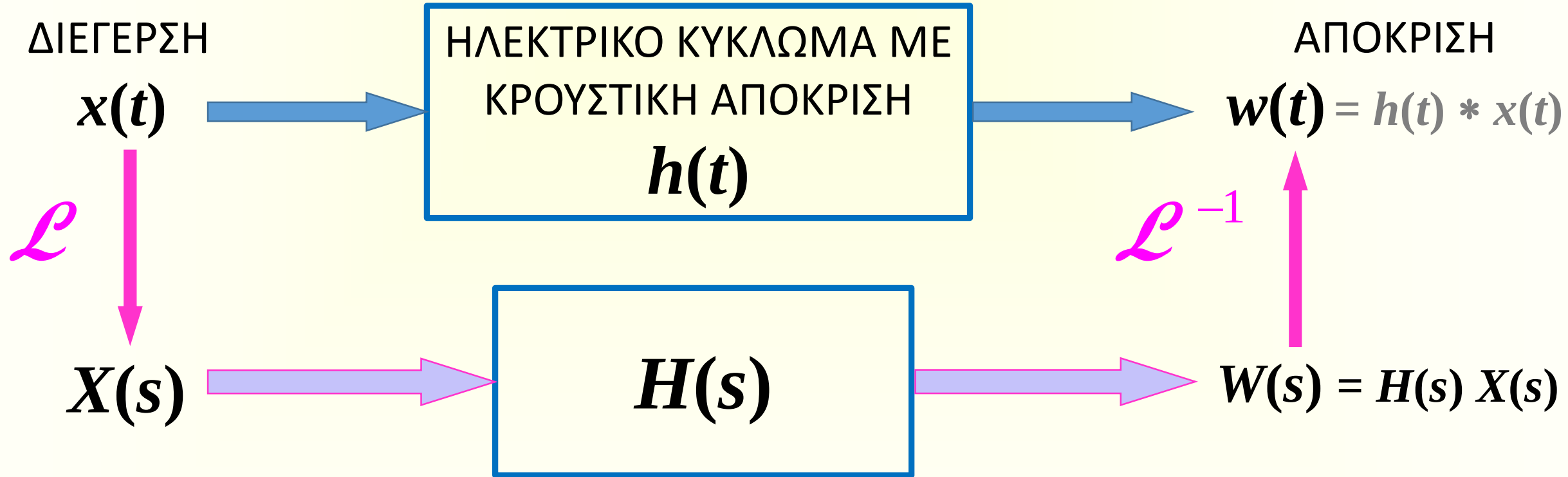
- **ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ**

$$f_1(t) * f_2(t) = c(t) \Rightarrow$$

$$f_1(t) * f_2(t - T) = f_1(t - T) * f_2(t) = c(t - T)$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ (+ ΘΕΩΡΗΜΑ) ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



- Η $H(s)$ αναφέρεται «χαλαρά» σαν **Συνάρτηση Μεταφοράς** (Transfer Function)
- Θα επανέλθουμε με αυστηρότερο ορισμό αυτού τού όρου

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Παράλληλο RC



$$h_{RC_{\text{παρ}}}(t) = \frac{1}{C} e^{\frac{-t}{RC}} u(t)$$

$$H_{RC_{\text{παρ}}}(s) = \frac{1}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

- Έστω $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

- Τότε:

$$A \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}} \longrightarrow \frac{A}{C} \cdot \left(\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$

$\boxed{W(s)}$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Παράλληλο RC
- Έχουμε υπολογίσει το $W(s)$, οπότε το $w(t)$ θα είναι:

$$A \left(-\frac{C e^{-\frac{t}{RC}} R (\cos[\phi] + C R \omega \sin[\phi])}{1 + C^2 R^2 \omega^2} + \frac{C R \cos[\phi] \cos[t \omega] + C^2 R^2 \omega \cos[t \omega] \sin[\phi] + C^2 R^2 \omega \cos[\phi] \sin[t \omega] - C R \sin[\phi] \sin[t \omega]}{1 + C^2 R^2 \omega^2} \right)$$

C

- Και μετά από απλοποιήσεις

$$w(t) = \frac{-AR(\cos \varphi + RC\omega \sin \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} + AR[\cos(\omega t + \varphi) + RC\omega \sin(\omega t + \varphi)]}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

- Ας θεωρήσουμε ένα κύκλωμα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και ημιτονοειδή είσοδο: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
- Θέλουμε να υπολογίσουμε την **απόκριση στη ΜΗΚ**

- Όπως και προηγουμένως

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow A \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} = X(s)$$

- Και η απόκριση θα είναι

$$W(s) = X(s)H(s) = A \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} H(s)$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

- Που σημαίνει ότι:

$$W(s) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega} + \sum \text{όροι που οφείλονται στους πόλους τής } H(s)$$

- Όλοι οι όροι που προέρχονται από τους πόλους τής $H(s)$ θα εμπεριέχουν εκθετικά με αρνητικό εκθέτη, δηλαδή θα «σβήσουν» με το πέρασμα του χρόνου και δεν θα συνεισφέρουν στη μόνιμη κατάσταση
- Ας υπολογίσουμε τώρα τον άγνωστο συντελεστή K_1

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

$$\begin{aligned} K_1 &= H(s) A \left. \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s + j\omega} \right|_{s=j\omega} \\ &= H(j\omega) A \frac{j\omega \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{2j\omega} \\ &= \frac{1}{2} H(j\omega) A e^{j\varphi} \end{aligned}$$

- Επειδή η $H(j\omega)$ είναι μιγαδική ποσότητα, θα έχουμε

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\vartheta(\omega)} \quad \vartheta(\omega) \triangleq \angle H(j\omega)$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

- Και θα πάρουμε

$$K_1 = \frac{A}{2} |H(j\omega)| e^{j[\vartheta(\omega) + \varphi]}$$

- Η μόνιμη κατάσταση θα δοθεί από τον αντίστροφο ΜΛ τής $W(s)$ αγνοώντας οτιδήποτε προέρχεται από τους πόλους τής $H(s)$

$$\begin{aligned} y_{MHK}(t) &= A |H(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi + \vartheta(\omega)] \\ &= A |H(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi + \angle H(j\omega)] \end{aligned}$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

- Το **μέτρο τής απόκρισης σε ΜΗΚ** ενός κυκλώματος με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και ημιτονοειδή είσοδο $A\cos(\omega t + \varphi)$, είναι ίσο με **$A|H(j\omega)|$**
- Η **φάση τής απόκρισης σε ΜΗΚ** ενός κυκλώματος με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και ημιτονοειδή είσοδο $A\cos(\omega t + \varphi)$, είναι ίση με **$[\varphi + \angle H(j\omega)]$**

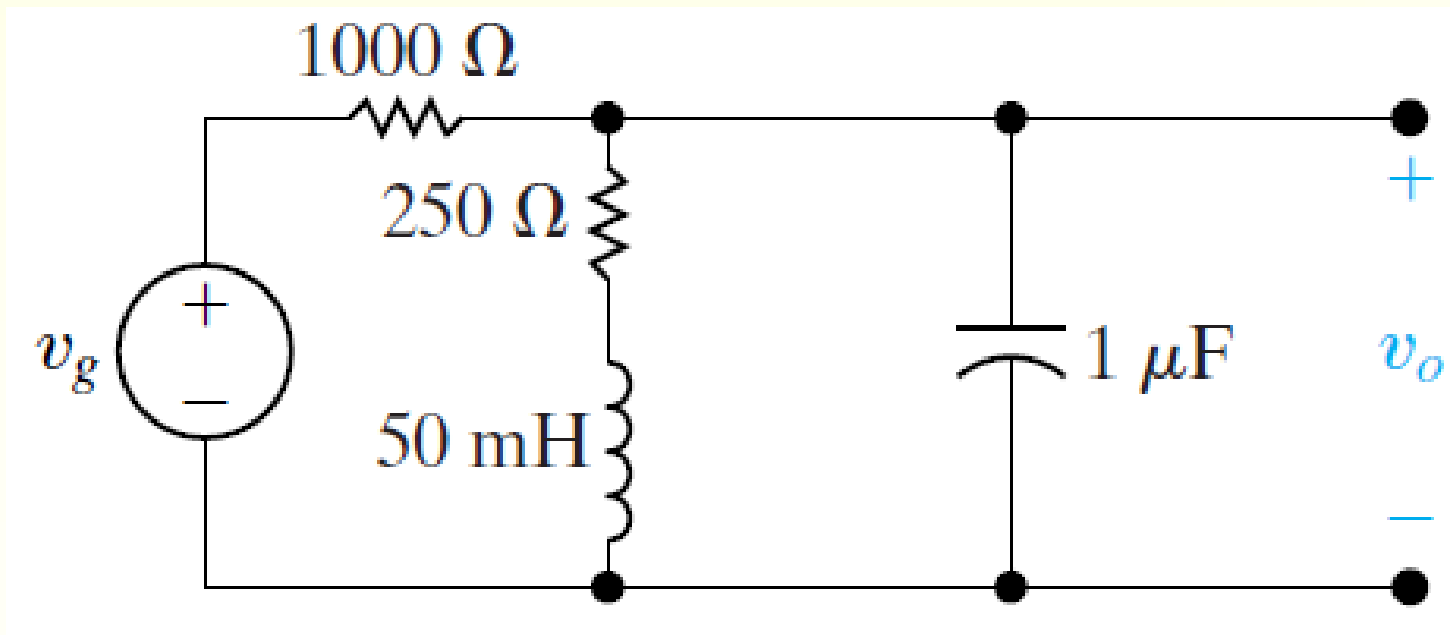
ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

- Για τη ΜΗΚ: **$H(s) \rightarrow H(j\omega)$** και **$\{A, \varphi\}$**

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Η είσοδος είναι $v_g = 120 \cos(5000t + 30^\circ)$ V και θέλουμε να υπολογίσουμε το v_o στη μόνιμη κατάσταση



ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

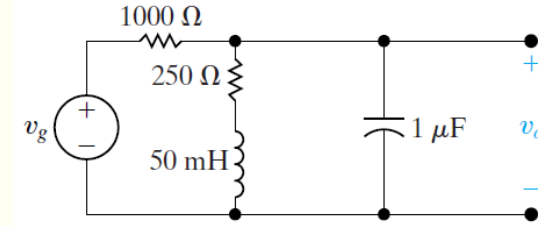
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται σαν

$$H(s) = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}$$

- Οπότε

$$\begin{aligned} H(j5000) &= \frac{1000(5000 + j5000)}{-25 \times 10^6 + j5000(6000) + 25 \times 10^6} \\ &= \frac{1 + j1}{j6} = \frac{1 - j1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6} \angle -45^\circ \end{aligned}$$



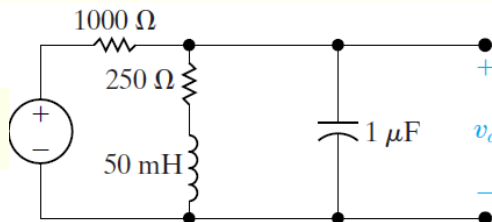
ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Και σύμφωνα με τα παραπάνω

$$v_g = 120 \cos(5000t + 30^\circ)$$



$$H(j5000) = \frac{1000(5000 + j5000)}{-25 \times 10^6 + j5000(6000) + 25 \times 10^6}$$

$$= \frac{1 + j1}{j6} = \frac{1 - j1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6} \angle -45^\circ$$

$A|H(j\omega)|$

$$v_o = \frac{(120)\sqrt{2}}{6} \cos(5000t + 30^\circ - 45^\circ)$$

$\varphi + \angle H(j\omega)$

$$= 20\sqrt{2} \cos(5000t - 15^\circ) \text{ V}$$

- [Την ίδια ακριβώς απάντηση θα παίρναμε αν είχαμε χρησιμοποιήσει **φάσορες**]

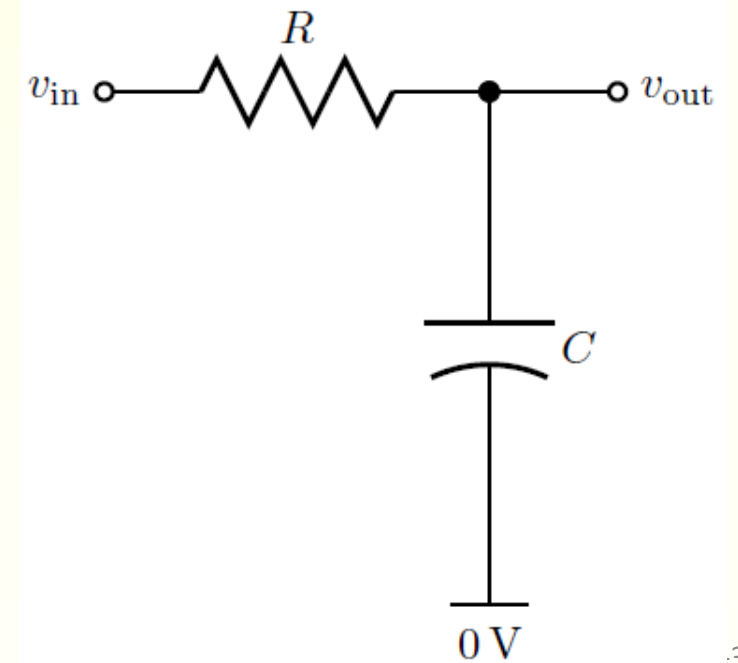
ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ-ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΟ ΧΑΜΗΛΟΔΙΑΒΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

- Το απλό κύκλωμα RC μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα χαμηλοδιαβατό (low-pass) φίλτρο
- Η συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει από τον διαιρέτη τάσης

$$H(s) \triangleq \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1}$$



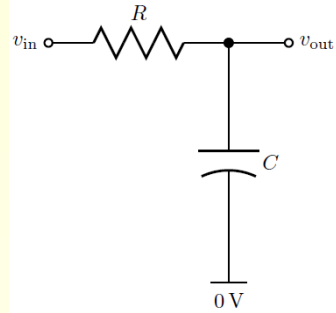
ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ-ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΟ ΧΑΜΗΛΟΔΙΑΒΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

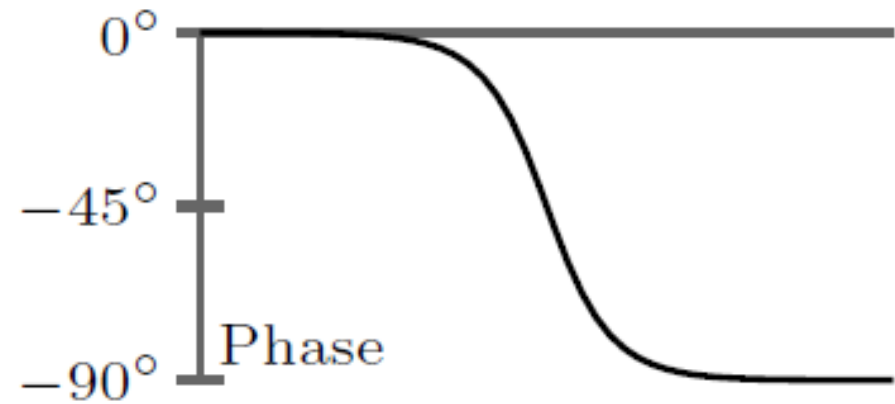
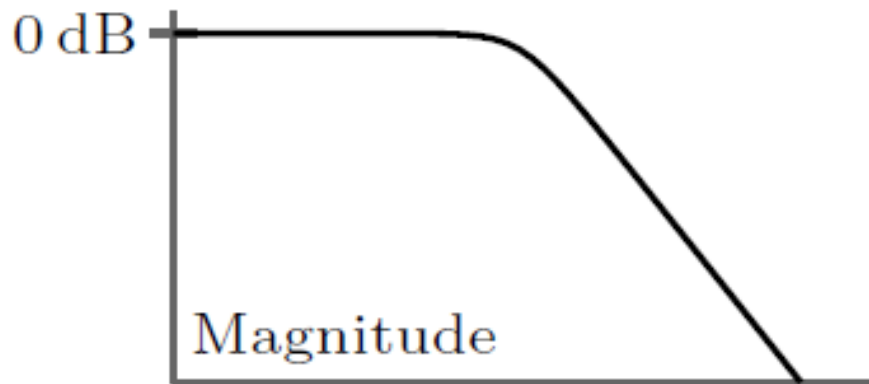
- Πιο αναλυτικά η H :

$$H(s) \triangleq \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1}$$



$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

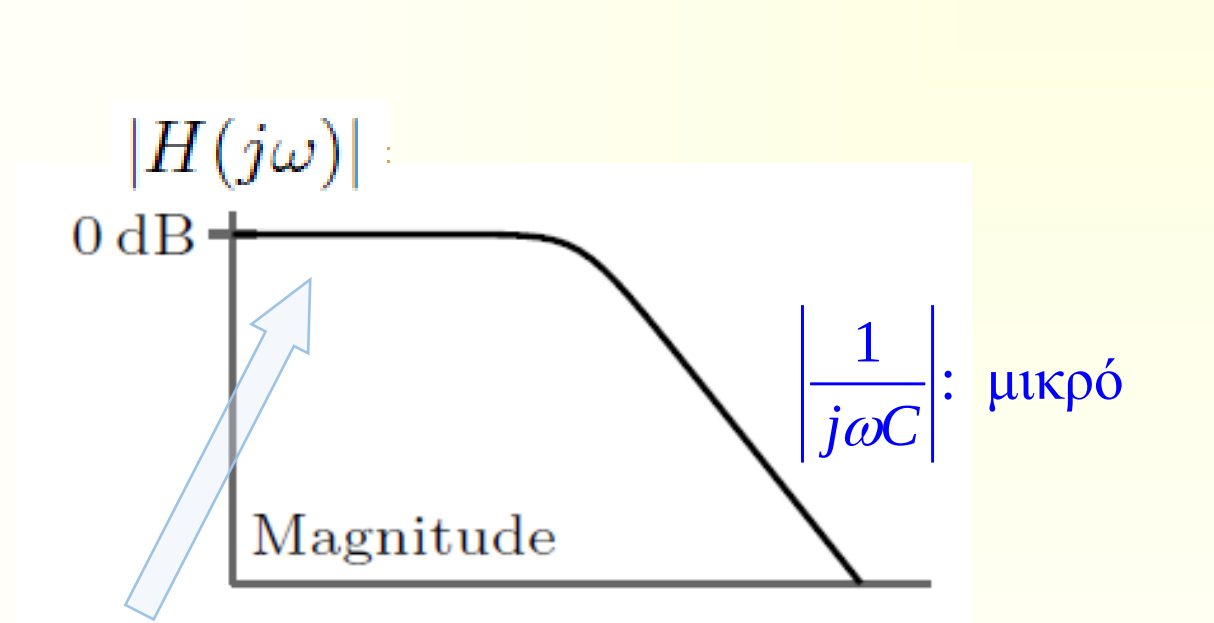
$$\angle H(j\omega) = -\arctan(\omega RC)$$



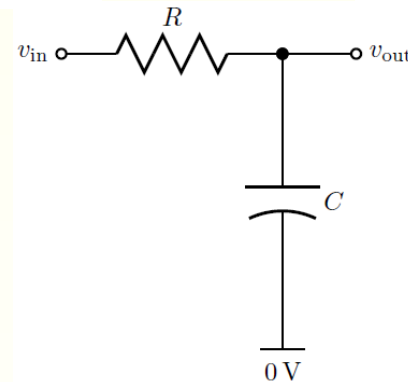
ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ-ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΟ ΧΑΜΗΛΟΔΙΑΒΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

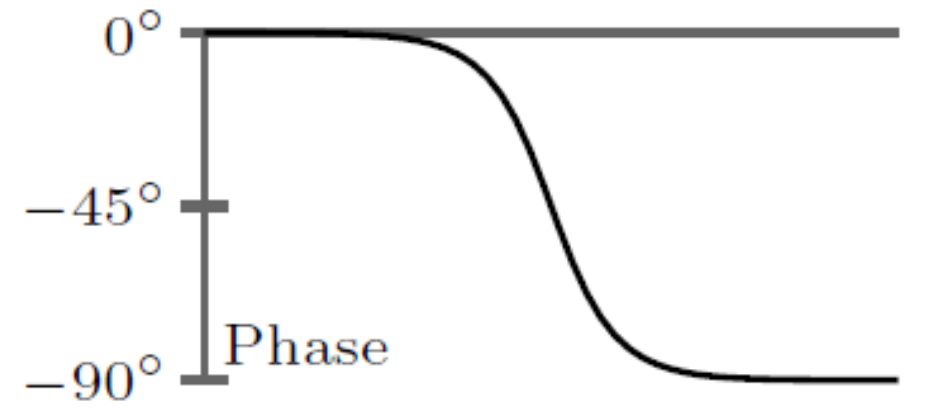


$\left|\frac{1}{j\omega C}\right|$: μεγάλο



$$v_{\text{out}} \approx v_{\text{in}}$$

$C \approx$ ανοιχτό
κύκλωμα



$C \approx$ βραχυκύκλωμα

$$i_C = v_{\text{in}}/R$$

$$v_{\text{out}} = v_C = \int i_C(t)/C$$

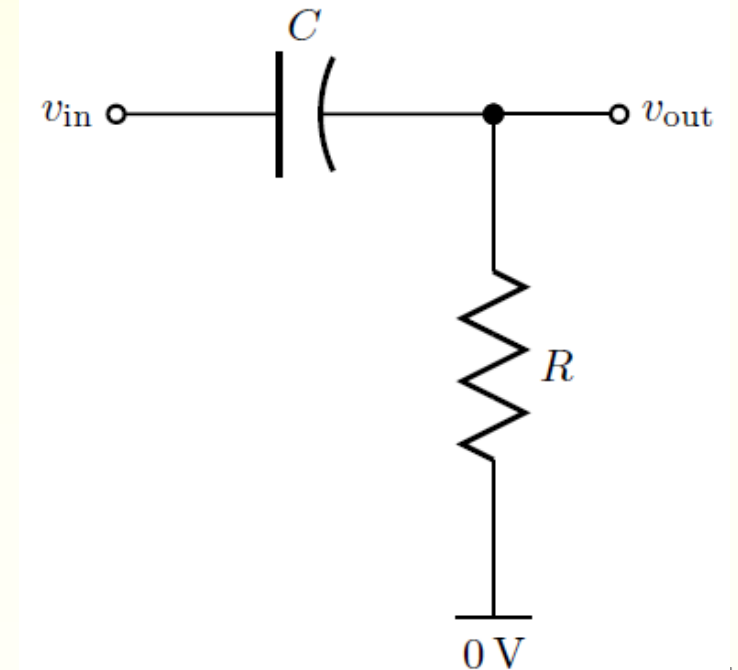
ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ-ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΟ ΥΨΗΛΟΔΙΑΒΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

- Το απλό κύκλωμα RC μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα υψηλοδιαβατό (high-pass) φίλτρο
- Η συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει από τον διαιρέτη τάσης

$$H(s) \triangleq \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{sRC + 1}$$



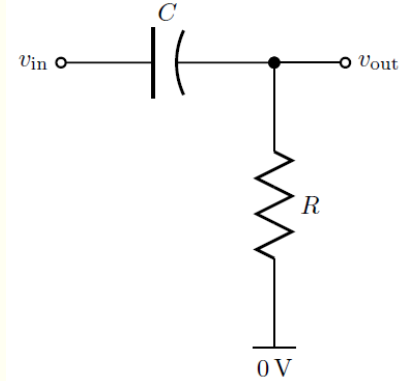
ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ-ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΟ ΥΨΗΛΟΔΙΑΒΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

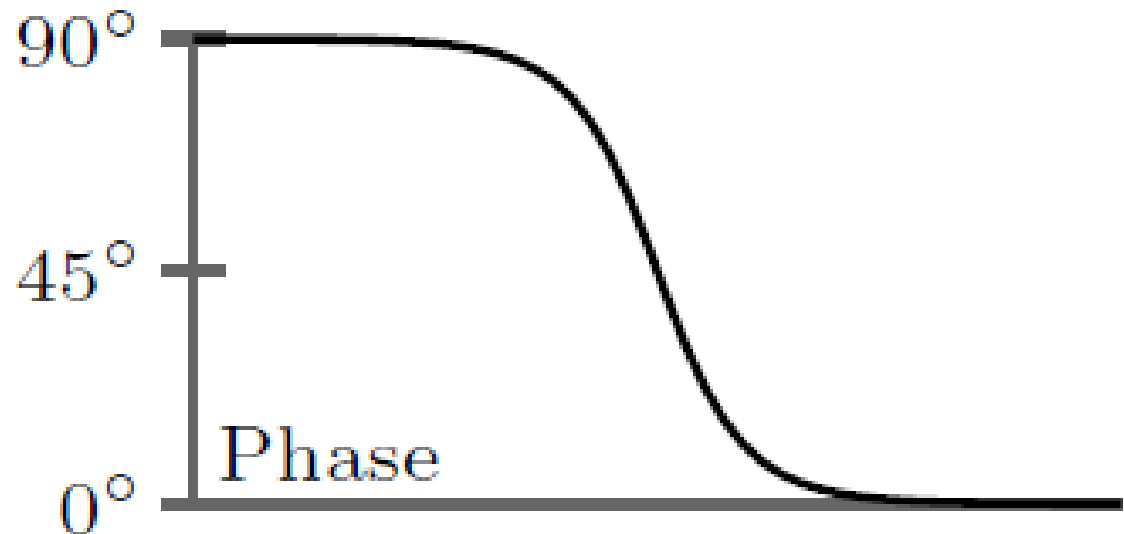
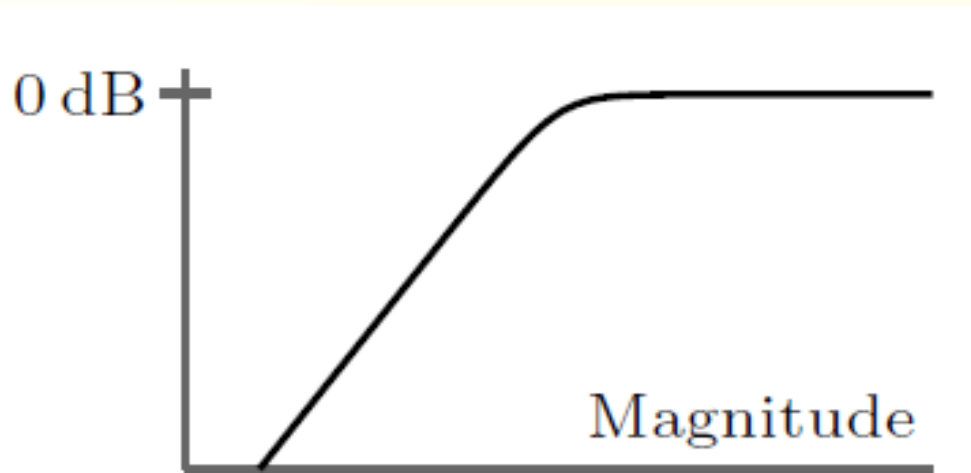
- Πιο αναλυτικά:

$$H(s) \triangleq \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{sRC + 1}$$



$$|H(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

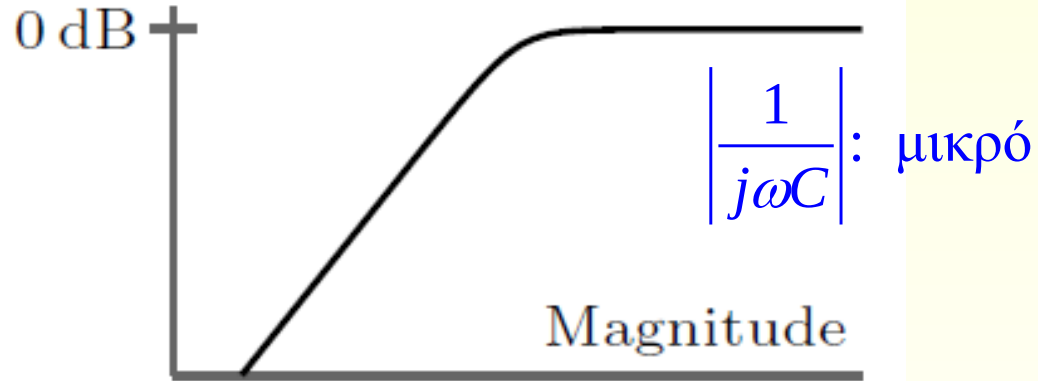
$$\angle H(j\omega) = 90^\circ - \arctan(\omega RC)$$



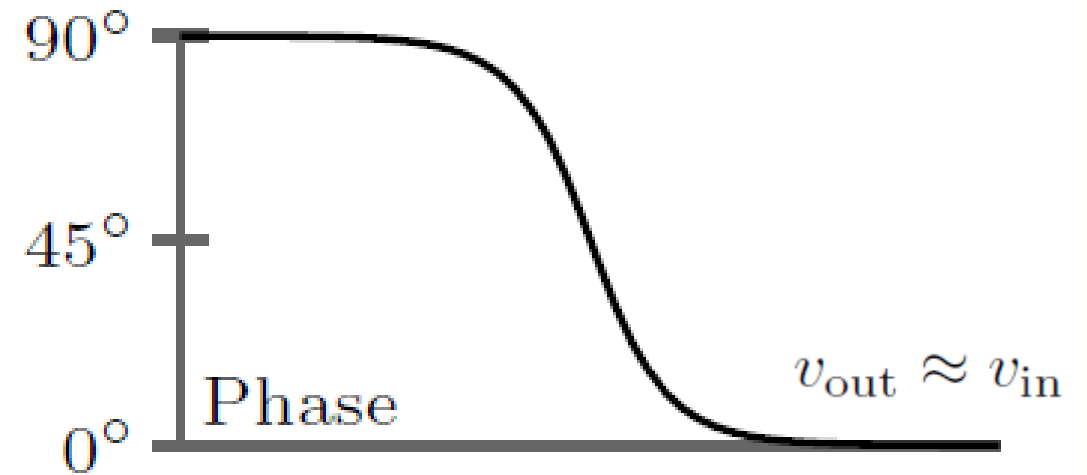
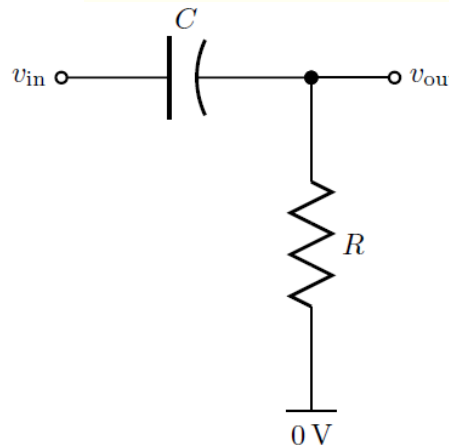
ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ-ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΗ ΜΗΚ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΟ ΥΨΗΛΟΔΙΑΒΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ



$$\left| \frac{1}{j\omega C} \right|: \text{μεγάλο}$$



$C \approx$ ανοιχτό
κύκλωμα

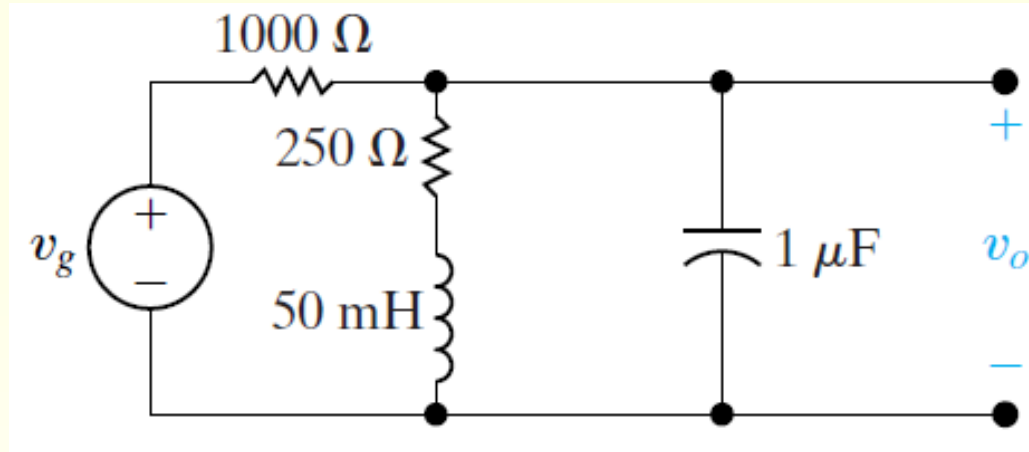
$$i_C = C v'_C$$
$$v_C \approx v_{in}$$

$C \approx$ βραχυκύκλωμα

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ– ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Θέλουμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του παρακάτω κυκλώματος



- **Κρουστική απόκριση** = Δέλτα τού Dirac σαν είσοδος **και** απόκριση που πρέπει να οριστεί εκ των προτέρων, εδώ π.χ. είναι το v_o
- «**Συνάρτηση μεταφοράς**» [αυτή που αναφέρεται σε κρουστική είσοδο] = Λόγος τής εξόδου (απόκρισης) προς την είσοδο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ– ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Αν η Z είναι

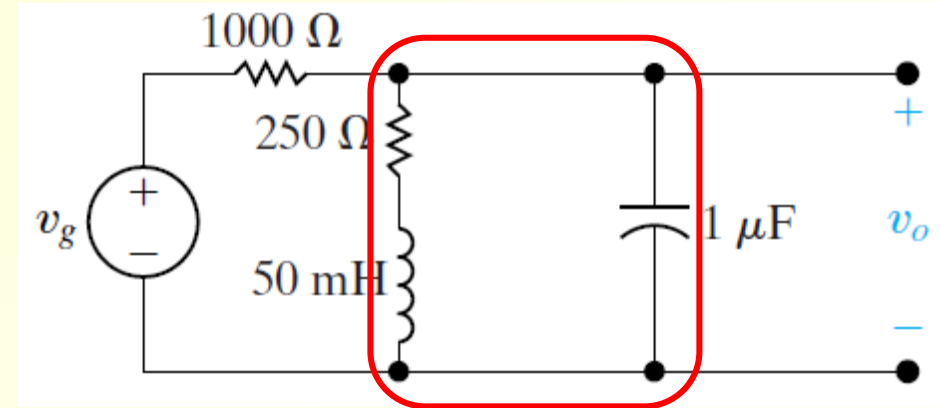
$$Z = \frac{\frac{1}{10^{-6}s} (250 + 0,05s)}{\frac{1}{10^{-6}s} + 250 + 0,05s}$$

- Τότε

$$V_o = \frac{Z}{1000 + Z} V_g$$

- Και

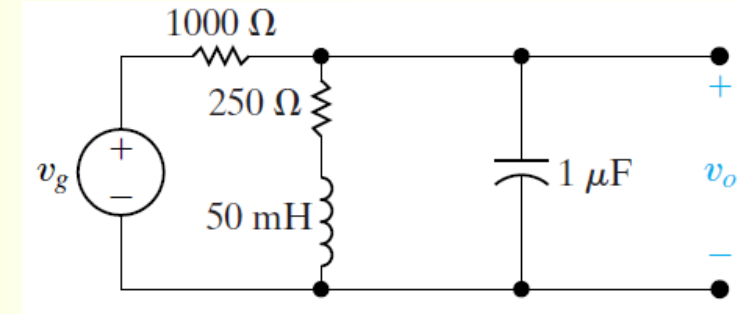
$$\frac{V_o}{V_g} = \frac{Z}{1000 + Z} = \dots = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25000000}$$



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ– ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ:

- Όταν έχουμε σαν είσοδο την κρουστική, τότε:



$$\frac{V_o(s)}{V_g(s)} = \frac{\text{ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ}(s)}{\text{ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΕΙΣΟΔΟΣ}(s)} = \frac{V_o(s)}{1} \Rightarrow$$

$$V_o(s) = \text{ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ}(s) \triangleq H(s) \triangleq \mathcal{L}\{h(t)\} \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25000000} = \frac{V_o(s)}{V_g(s)} \quad \forall V_g(s)$$

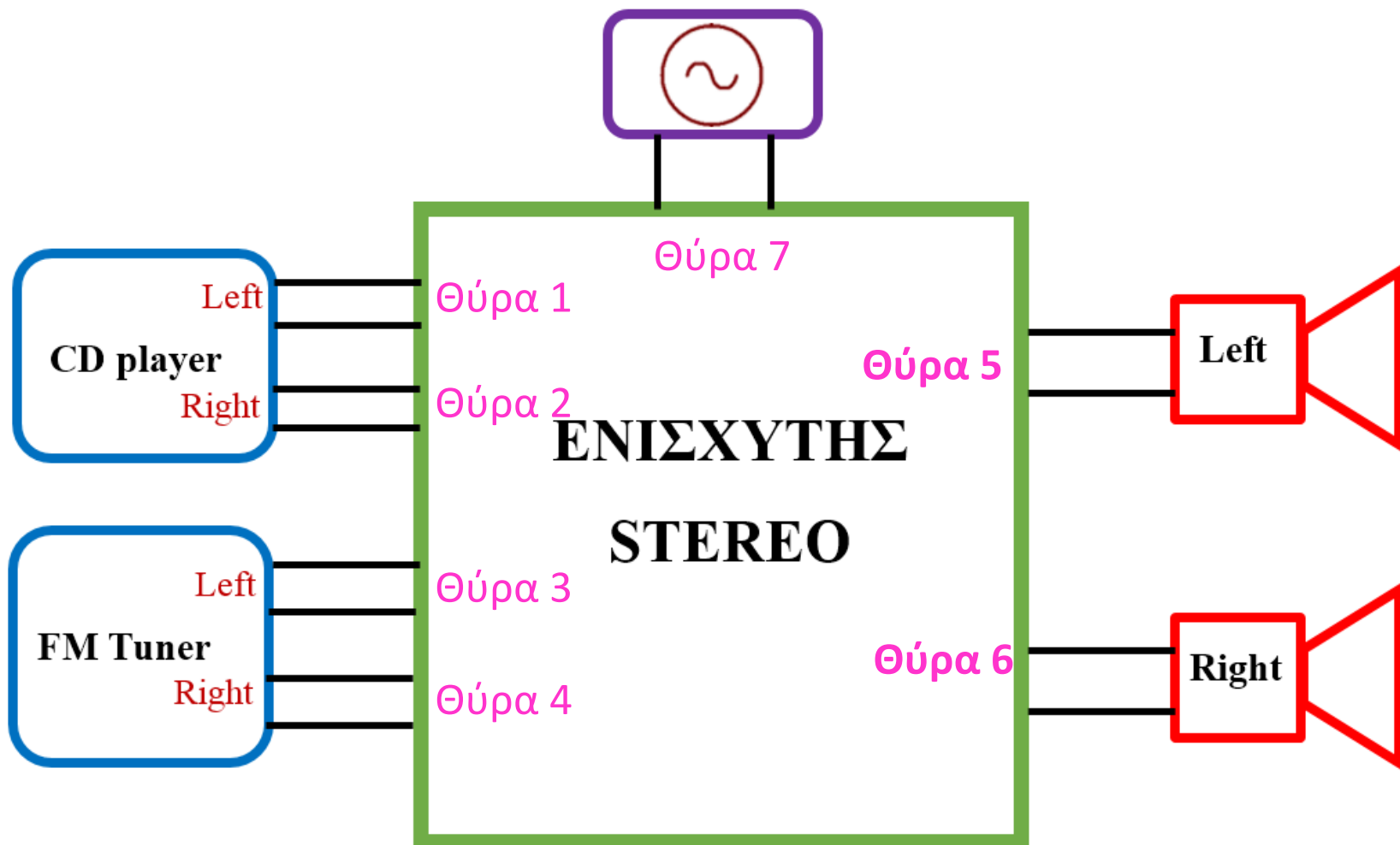
ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

- Ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να αποτελέσει μια βάση για την επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων
- Η προσέγγιση αυτή είναι απλούστερη και προτιμότερη από αυτή με τις διαφορικές εξισώσεις
- Διαπιστώθηκε ότι η ανάλυση σε ΜΗΚ είναι απλά μια ειδική περίπτωση της ανάλυσης/επίλυσης με μετασχηματισμό Laplace
- Απομένει να δούμε τι παραπάνω μπορεί να μας δώσει η προσέγγιση με Laplace

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε ουσιαστικά με **μονόθυρα** κυκλώματα
- Τα πραγματικά κυκλώματα είναι, γενικά, **πολύθυρα**, π.χ.:



ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Η ανάλυση που θα κάνουμε θα αφορά κυρίως την ΑΜΚ—απόκριση μηδενικής κατάστασης
- Οι αρχικές συνθήκες μπορεί να επηρεάζουν τη λειτουργία, αλλά επειδή τελικά «ξεχνιούνται» δεν χρειάζεται να εμπλακούν στη γενική ανάλυση

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

ΑΠΟ ΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι

ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΜΠΕΔΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

- Οι μέθοδοι ΚΤ και ΒΕ θα έχουν **την ίδια ακριβώς δομή και τον ίδιο τρόπο κατασκευής**

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ΚΤ} \\ \text{ή} \\ \text{ΒΕ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{είσοδοι} \end{pmatrix}$$

- Μόνο που τώρα η «(ωμική) αντίσταση κλάδου» θα αντικατασταθεί από τον «τελεστή εμπέδησης κλάδου» και
- η «(ωμική) αγωγιμότητα κλάδου» θα αντικατασταθεί από τον «τελεστή δεκτικότητας κλάδου»

ΓΕΝΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΡΟΗΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ

- Και οι δυο μέθοδοι καταλήγουν σε ένα αλγεβρικό γραμμικό σύστημα εξισώσεων με μορφή $A\chi = \beta$ όπου:

- ❑ Ο πίνακας A «καταγράφει» την τοπολογία και το περιεχόμενο των κλάδων τού κυκλώματος
- ❑ Το διάνυσμα χ περιλαμβάνει τους αγνώστους (ΚΤ ή ΒΕ) και
- ❑ Το διάνυσμα β περιέχει τις διεγέρσεις

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ΚΤ} \\ \text{ή} \\ \text{ΒΕ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{είσοδοι} \end{pmatrix}$$

Κάθε στοιχείο a_{ij} , $i \neq j$, τού πίνακα A «αντιπροσωπεύει» το περιεχόμενο του κλάδου που ενώνει τον κόμβο i με τον κόμβο j (= 0 αν δεν συνδέονται)
===== βλ. αμέσως μετά =====

ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΟΜΒΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

ΠΡΟΗΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΡΟΗΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ

- **ΔΙΑΚΙΚΑΣΙΑ ΓΙΑ ΚΟΜΒΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ:**
- Τα **διαγώνια στοιχεία** του πίνακα A είναι το άθροισμα των αγωγιμοτήτων των κλάδων που ενώνουν τους αντίστοιχους κόμβους
- Τα **μη διαγώνια στοιχεία** του πίνακα A είναι οι αγωγιμότητες των κλάδων που ενώνουν τους αντίστοιχους κόμβους αλλά **με αρνητικό πρόσημο** (0 αν δεν υπάρχει σύνδεση)
- Τα δεξιά μέλη είναι οι εντάσεις των πηγών ρεύματος που «σχετίζονται» με τον αντίστοιχο κόμβο
- το διάνυσμα των αγνώστων περιέχει φυσικά τις κομβικές τάσεις

ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ

ΣΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ II

ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Θα ξεκινήσουμε από το σύστημα εξισώσεων που δίνει τη λύση για ένα κύκλωμα και που έχουμε ξανασυναντήσει (μέθοδος βροχικών εντάσεων):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11}(s) & \mathbf{Z}_{12}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{1m}(s) \\ \mathbf{Z}_{21}(s) & \mathbf{Z}_{22}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{m1}(s) & \mathbf{Z}_{m2}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{mm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ \vdots \\ J_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{s1}(s) \\ V_{s2}(s) \\ \vdots \\ V_{sm}(s) \end{pmatrix}$$

Πίνακας τοπολογίας
τού **κυκλώματος**

Βροχικές
εντάσεις

Πηγές τάσης στο
παράθυρο $i, i = 1, \dots, m$

ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11}(s) & \mathbf{Z}_{12}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{1m}(s) \\ \mathbf{Z}_{21}(s) & \mathbf{Z}_{22}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{m1}(s) & \mathbf{Z}_{m2}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{mm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ \vdots \\ J_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{s1}(s) \\ V_{s2}(s) \\ \vdots \\ V_{sm}(s) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_{ij}(s) = f \left(R_*, sL_*, \frac{1}{sC_*} \right)$$

- $\mathbf{Z}_{ii}(s)$, $i = 1, \dots, m$ είναι το άθροισμα των γενικευμένων σύνθετων αντιστάσεων που ανήκουν στο παράθυρο i
- $\mathbf{Z}_{ij}(s)$, $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$ είναι το αρνητικό άθροισμα των κοινών γενικευμένων σύνθετων αντιστάσεων που ανήκουν στα παράθυρα i και j
- $V_{si}(s)$, $i = 1, \dots, m$ είναι το άθροισμα των ανεξάρτητων πηγών τάσης που ανήκουν στο παράθυρο i
- $J_i(s)$, $i = 1, \dots, m$ είναι οι βροχικές εντάσεις

ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11}(s) & \mathbf{Z}_{12}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{1m}(s) \\ \mathbf{Z}_{21}(s) & \mathbf{Z}_{22}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{m1}(s) & \mathbf{Z}_{m2}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{mm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ \vdots \\ J_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{s1}(s) \\ V_{s2}(s) \\ \vdots \\ V_{sm}(s) \end{pmatrix}$$

- Η λύση (βροχικές εντάσεις) θα είναι:

$$\begin{pmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ \vdots \\ J_m(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)} \begin{pmatrix} \Delta_{11}(s) & \Delta_{21}(s) & \cdots & \Delta_{m1}(s) \\ \Delta_{12}(s) & \Delta_{22}(s) & \cdots & \Delta_{m2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1m}(s) & \Delta_{2m}(s) & \cdots & \Delta_{mm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s1}(s) \\ V_{s2}(s) \\ \vdots \\ V_{sm}(s) \end{pmatrix}$$

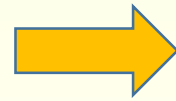
$\Delta_{\mathbf{Z}}$: Ορίζουσα
Αλγεβρικά συμπληρώματα
(cofactors)

Αντίστροφος του $\mathbf{Z}$

(ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ—ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ)

- Για ένα τετραγωνικό πίνακα A , το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** ή **συμπαράγοντας** (cofactor) C_{ij} ενός στοιχείου a_{ij} είναι ίσο με την ορίζουσα του υποπίνακα του A που προκύπτει αφαιρώντας από τον A τη γραμμή i και τη στήλη j , πολλαπλασιασμένη επί $(-1)^{i+j}$
- Π.χ. για $i = j = 2$:

$$j=2 \quad i=2 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$



$$C_{22} = (-1)^{2+2}$$

Ελάσσων ορίζουσα (minor)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k3} & a_{k4} & \cdots & a_{kn} \end{vmatrix}$$

- Τότε, ο αντίστροφος του A είναι ίσος με

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} C^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{N1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1N} & C_{2N} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix}$$

Προσαρτημένος πίνακας (adjoint)

ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ \vdots \\ J_m(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)} \begin{pmatrix} \Delta_{11}(s) & \Delta_{21}(s) & \cdots & \Delta_{m1}(s) \\ \Delta_{12}(s) & \Delta_{22}(s) & \cdots & \Delta_{m2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1m}(s) & \Delta_{2m}(s) & \cdots & \Delta_{mm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s1}(s) \\ V_{s2}(s) \\ \vdots \\ V_{sm}(s) \end{pmatrix}$$

- Κάθε συγκεκριμένη λύση (βροχική ένταση) θα είναι:

$$J_k(s) = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_{ik}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)} V_{si}(s), \quad k = 1, \dots, m$$



Εξάρτηση από όλες τις εισόδους

- Είναι ο μετασχηματισμός Laplace τής ΑΜΚ τού κυκλώματος

ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Την ίδια διαδικασία μπορούμε να κάνουμε και για τη μέθοδο κομβικών τάσεων

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11}(s) & \mathbf{Y}_{12}(s) & \cdots & \mathbf{Y}_{1n}(s) \\ \mathbf{Y}_{21}(s) & \mathbf{Y}_{22}(s) & \cdots & \mathbf{Y}_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{m1}(s) & \mathbf{Y}_{m2}(s) & \cdots & \mathbf{Y}_{nn}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{s1}(s) \\ I_{s2}(s) \\ \vdots \\ I_{sn}(s) \end{pmatrix}$$

Πίνακας τοπολογίας
τού **κυκλώματος**

Κομβικές
τάσεις

Πηγές ρεύματος στον
κόμβο $i, i = 1, \dots, n$

ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11}(s) & \mathbf{Y}_{12}(s) & \cdots & \mathbf{Y}_{1n}(s) \\ \mathbf{Y}_{21}(s) & \mathbf{Y}_{22}(s) & \cdots & \mathbf{Y}_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{m1}(s) & \mathbf{Y}_{m2}(s) & \cdots & \mathbf{Y}_{nn}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{S1}(s) \\ I_{S2}(s) \\ \vdots \\ I_{Sn}(s) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{ij}(s) = f \left(G_*, sC_*, \frac{1}{sL_*} \right)$$

- $\mathbf{Y}_{ii}(s)$, $i = 1, \dots, n$ είναι το άθροισμα των γενικευμένων σύνθετων αγωγιμοτήτων που καταλήγουν στον κόμβο i
- $\mathbf{Y}_{ij}(s)$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ είναι το αρνητικό άθροισμα των κοινών γενικευμένων σύνθετων αγωγιμοτήτων που καταλήγουν στους κόμβους i και j
- $I_{Si}(s)$, $i = 1, \dots, n$ είναι το άθροισμα των ανεξάρτητων πηγών ρεύματος που καταλήγουν στον κόμβο i
- $E_i(s)$, $i = 1, \dots, n$ είναι οι κομβικές τάσεις (πλήθος των κόμβων τού κυκλώματος = $n + 1$)

ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11}(s) & \mathbf{Y}_{12}(s) & \cdots & \mathbf{Y}_{1n}(s) \\ \mathbf{Y}_{21}(s) & \mathbf{Y}_{22}(s) & \cdots & \mathbf{Y}_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{m1}(s) & \mathbf{Y}_{m2}(s) & \cdots & \mathbf{Y}_{nn}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{S1}(s) \\ I_{S2}(s) \\ \vdots \\ I_{Sn}(s) \end{pmatrix}$$

- Η λύση (κομβικές τάσεις) θα είναι:

$$\begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_n(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)} \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_{11}(s) & \bar{\Delta}_{21}(s) & \cdots & \bar{\Delta}_{n1}(s) \\ \bar{\Delta}_{12}(s) & \bar{\Delta}_{22}(s) & \cdots & \bar{\Delta}_{n2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Delta}_{1n}(s) & \bar{\Delta}_{2n}(s) & \cdots & \bar{\Delta}_{nn}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{S1}(s) \\ I_{S2}(s) \\ \vdots \\ I_{Sn}(s) \end{pmatrix}$$

$\Delta_{\mathbf{Y}}$: Ορίζουσα

Αλγεβρικά
συμπληρώματα

Αντίστροφος του $\mathbf{Y}$

ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_n(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)} \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_{11}(s) & \bar{\Delta}_{21}(s) & \cdots & \bar{\Delta}_{n1}(s) \\ \bar{\Delta}_{12}(s) & \bar{\Delta}_{22}(s) & \cdots & \bar{\Delta}_{n2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Delta}_{1n}(s) & \bar{\Delta}_{2n}(s) & \cdots & \bar{\Delta}_{nn}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{S1}(s) \\ I_{S2}(s) \\ \vdots \\ I_{Sn}(s) \end{pmatrix}$$

- Κάθε συγκεκριμένη λύση (κομβική τάση) θα είναι:

$$E_k(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Delta}_{ik}(s)}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)} I_{Si}(s), \quad k = 1, \dots, n$$



Εξάρτηση από όλες τις εισόδους

- Είναι ο μετασχηματισμός Laplace τής ΑΜΚ τού κυκλώματος

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Τώρα που καθορίσαμε το γενικό πλαίσιο για την ανάλυση ενός κυκλώματος με τις δυο εναλλακτικές μεθόδους, μπορούμε να προχωρήσουμε στην ανάλυση αυτή καθαυτή

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Θα θεωρήσουμε ότι το κύκλωμα διεγείρεται **από ένα κόμβο μόνο**, έστω τον i [η επαλληλία μάς δίνει αυτό το δικαίωμα]
- Αυτό σημαίνει ότι λειτουργεί μόνο η διέγερση $I_{Si}(s)$ στον κόμβο i και όλες οι άλλες διεγέρσεις σε όλο το υπόλοιπο κύκλωμα έχουν **εξουδετερωθεί**
- Και αυτό σημαίνει ότι στο γενικό άθροισμα παραμένει μόνο ένας όρος:

$$E_i(s) = \frac{\bar{\Delta}_{ii}(s)}{\Delta_Y(s)} I_{Si}(s)$$

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Οπότε, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{E_i(s)}{I_{Si}(s)} \triangleq Z_{ii}(s) = \frac{\bar{\Delta}_{ii}(s)}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)}$$

- Γενικευμένη σύνθετη αντίσταση της εισόδου i τού κυκλώματος

[ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Μόνη ενεργός πηγή η $I_{Si}(s)$ στον κόμβο i]

- Αυτή είναι πρώτη από τις «**Συναρτήσεις Κυκλώματος**» που θα δούμε

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το κύκλωμα διεγείρεται πάλι **από ένα κόμβο μόνο**, έστω τον j , $j \neq i$
- Αυτό σημαίνει ότι λειτουργεί μόνο η διέγερση $I_{sj}(s)$ στον κόμβο j και όλες οι άλλες διεγέρσεις σε όλο το υπόλοιπο κύκλωμα έχουν **εξουδετερωθεί**
- Και αυτό σημαίνει ότι στο γενικό άθροισμα παραμένει πάλι μόνο ένας όρος:

$$E_i(s) = \frac{\bar{\Delta}_{ji}(s)}{\Delta_Y(s)} I_{sj}(s)$$

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Οπότε, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{E_i(s)}{I_{Sj}(s)} \triangleq Z_{ij}(s) = \frac{\bar{\Delta}_{ji}(s)}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)}$$

- Γενικευμένη σύνθετη αντίσταση **μεταφοράς** από τον κόμβο i στον κόμβο j τού κυκλώματος

[ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Μόνη ενεργός πηγή η $I_{Sj}(s)$ στον κόμβο j , όμως εξετάζουμε τι συμβαίνει στον κόμβο $i \rightarrow$ «μεταφορά»]

- Ο κόμβος i θεωρείται σαν έξοδος και ο κόμβος j σαν είσοδος
- Παρατηρούμε ότι στους λόγους των συναρτήσεων κυκλώματος η έξοδος i εμφανίζεται στον αριθμητή και η είσοδος j στον παρονομαστή

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Ότι κάναμε με αντιστάσεις μπορούμε να το κάνουμε και για αγωγιμότητες
- Σημειώνουμε επίσης ότι για παθητικά κυκλώματα τα αλγεβρικά συμπληρώματα είναι συμμετρικά: $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Συνεχίζοντας, και με το ίδιο σκεπτικό, μπορούμε να ξεκινήσουμε τώρα από το σύστημα εξισώσεων που ορίζει τις βροχικές εντάσεις και να ορίσουμε:

$$\frac{J_i(s)}{V_{Si}(s)} \triangleq Y_{ii}(s) = \frac{\Delta_{ii}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)}$$

- Γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα της εισόδου i τού κυκλώματος

[ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Μόνη ενεργός πηγή η $V_{Si}(s)$ στον βρόχο i]

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Παρομοίως, μπορούμε πάλι να ξεκινήσουμε από το σύστημα εξισώσεων που ορίζει τις βροχικές εντάσεις και να ορίσουμε:

$$\frac{J_i(s)}{V_{sj}(s)} \triangleq Y_{ij}(s) = \frac{\Delta_{ji}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)}$$

- Γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα **μεταφοράς** από τον βρόχο i στον βρόχο j τού κυκλώματος

[ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Μόνη ενεργός πηγή η $V_{sj}(s)$ στον βρόχο j , όμως εξετάζουμε τι συμβαίνει στον βρόχο $i \rightarrow$ «μεταφορά»]

- Και πάλι, ο βρόχος i θεωρείται σαν έξοδος και ο βρόχος j σαν είσοδος

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Στη γενική ανάλυση που κάνουμε γενικά δεν ισχύει πια (το ωμικό) «η αγωγιμότητα είναι το αντίστροφο της αντίστασης»:

Γενικευμένη σύνθετη αντίσταση της εισόδου i

$$Z_{ii}(s) = \frac{\bar{\Delta}_{ii}(s)}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)}$$

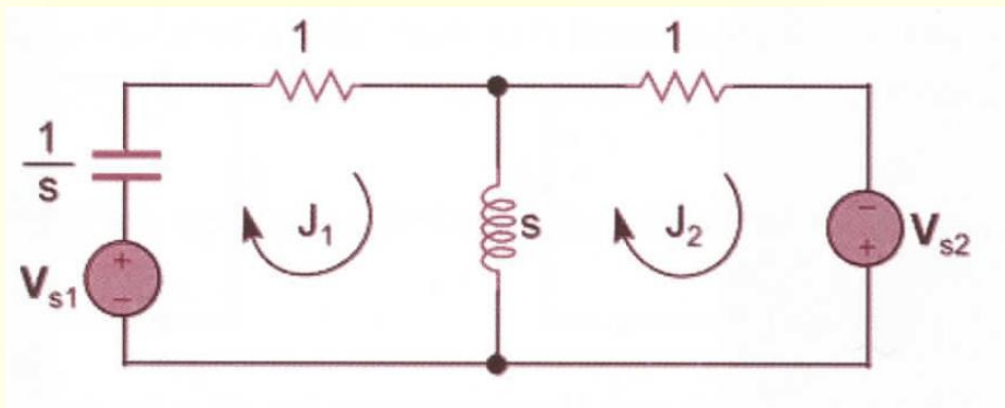
Γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα της εισόδου i

$$Y_{ii}(s) = \frac{\Delta_{ii}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)}$$

- Γενικά (αλλά όχι πάντα!): $Y_{ii}(s) \neq \frac{1}{Z_{ii}(s)}$

- Παρατηρούμε επίσης ότι $\Delta_{\mathbf{Z}}(s) = \Delta_{\mathbf{Y}}(s)$ (περιέχουν τους πόλους τού κυκλώματος)

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ—ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



• ΒΕ:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} + 1 + s & -s \\ -s & 1 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{s1}(s) \\ V_{s2}(s) \end{bmatrix}$$

• Λύση

$$\begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \frac{s}{2s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s + 1 & s \\ s & \frac{s^2 + s + 1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{s1}(s) \\ V_{s2}(s) \end{bmatrix}$$

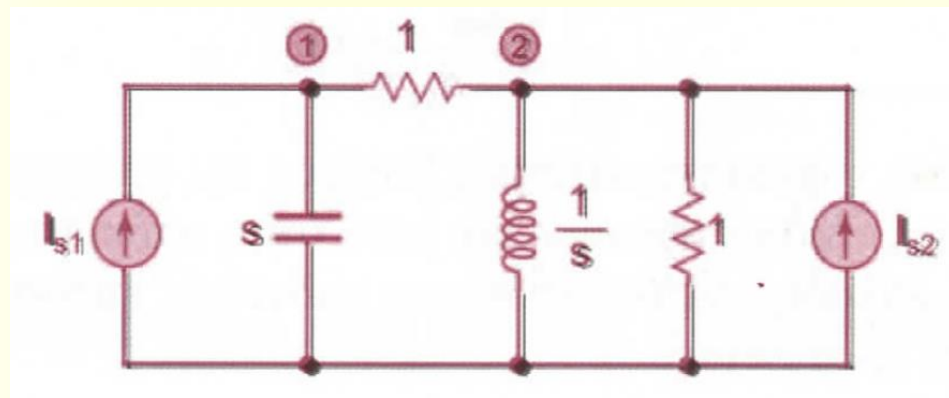
$$Y_{11}(s) = \frac{J_1(s)}{V_{s1}(s)}$$

$$Y_{11}(s) = \frac{s(s + 1)}{2s^2 + 2s + 1}$$

$$Y_{22}(s) = \frac{s^2 + s + 1}{2s^2 + 2s + 1}$$

$$Y_{12}(s) = Y_{21}(s) = \frac{s^2}{2s^2 + 2s + 1}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ—ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



• ΚΤ:

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{s}+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s1}(s) \\ I_{s2}(s) \end{bmatrix}$$

• Λύση

$$\begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \frac{s}{2s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + 2 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{s1}(s) \\ I_{s2}(s) \end{bmatrix}$$

$$Z_{11}(s) = \frac{2s+1}{2s^2+2s+1}$$

$$Z_{22}(s) = \frac{s(s+1)}{2s^2+2s+1}$$

$$Z_{12}(s) = Z_{21}(s) = \frac{s}{2s^2+2s+1}$$

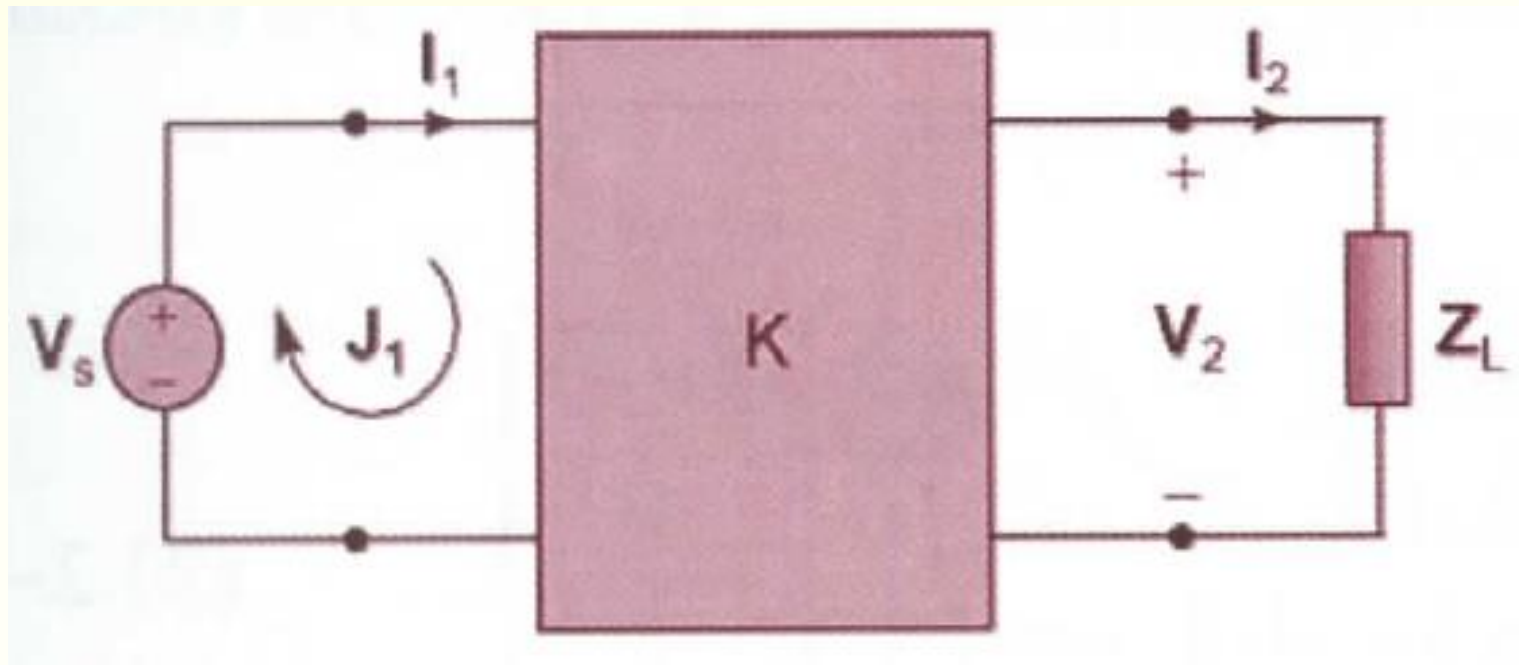
ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Στην περίπτωση της «μεταφοράς» δεν είναι ανάγκη να περιοριστούμε αυστηρά σε αντιστάσεις και αγωγιμότητες
- Μπορούμε να ορίσουμε λόγους τάσεων και λόγους ρευμάτων για οποιαδήποτε σημεία στο κύκλωμα
- Θα στηριχτούμε στο ίδιο υλικό όπως και πριν αλλά θα χρειαστούμε ένα λίγο διαφορετικό σενάριο, που όμως είναι εντελώς αληθοφανές και πρακτικό

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Θεωρούμε ένα κύκλωμα **K** χωρίς ανεξάρτητες πηγές (αν έχει τις θεωρούμε εξουδετερωμένες) και ξεχωρίζουμε δυο θύρες: μια για **είσοδο** και μια για **έξοδο/απόκριση** στην οποία συνδέουμε ένα φορτίο Z_L (γενικευμένη σύνθετη αντίσταση)

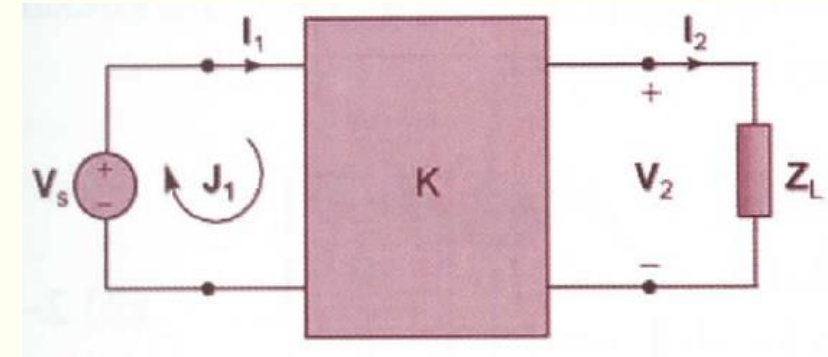
(εδώ έγκειται η αληθοφάνεια και πρακτικότητα της διάταξης: πρόκειται απλά για ένα «τερματισμένο» κύκλωμα)



ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Αποκαλούμε **συνάρτηση μεταφοράς τάσης** τον λόγο

$$H_V(s) \triangleq \frac{V_2(s)}{V_S(s)}$$



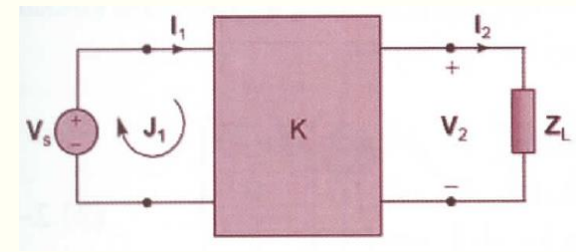
- Θα ισχύει ότι:

$$\begin{pmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ \vdots \\ J_m(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)} \begin{pmatrix} \Delta_{11}(s) & \Delta_{21}(s) & \cdots & \Delta_{m1}(s) \\ \Delta_{12}(s) & \Delta_{22}(s) & \cdots & \Delta_{m2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1m}(s) & \Delta_{2m}(s) & \cdots & \Delta_{mm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_S(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1(s) = J_1(s) = \frac{\Delta_{11}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)} V_S(s) \\ I_2(s) = J_2(s) = \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)} V_S(s) \end{cases}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

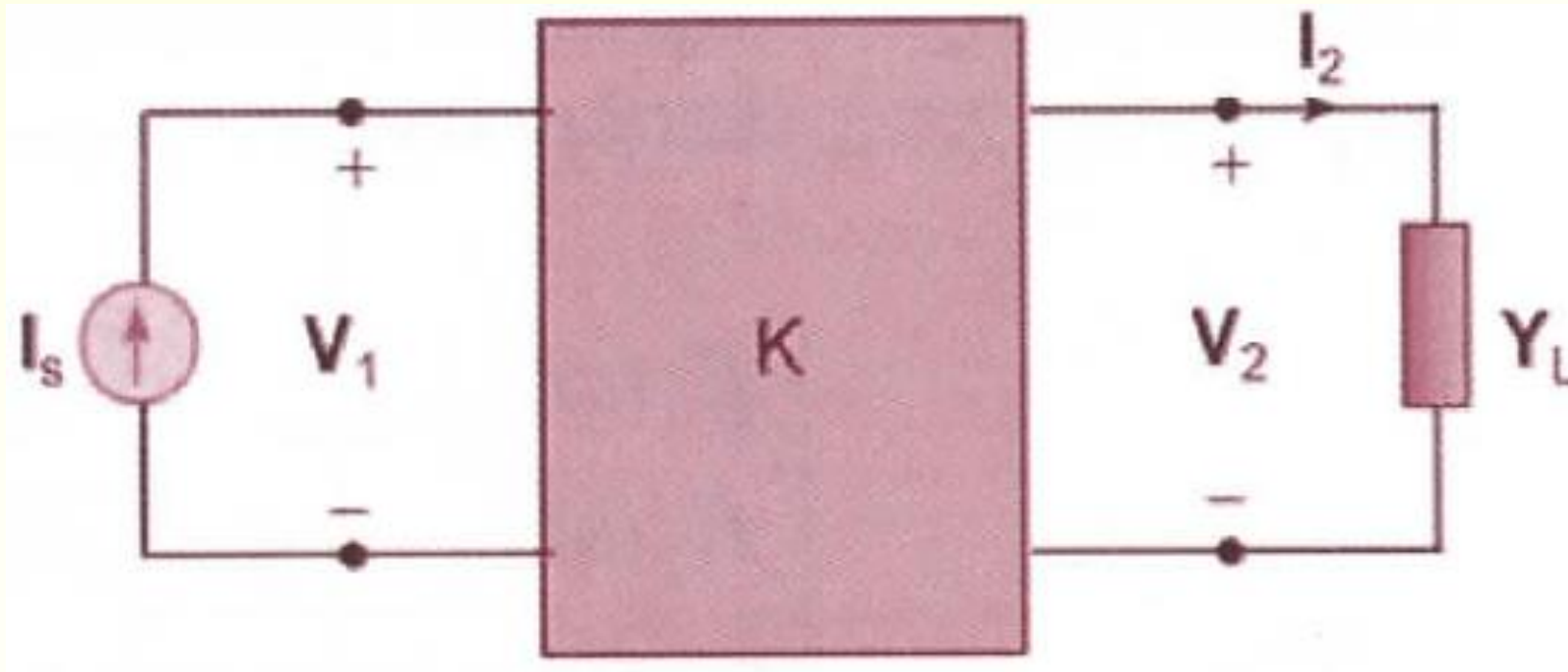
- Έτσι ώστε μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή έκφραση για τη συνάρτηση μεταφοράς τάσης:

$$H_V(s) \triangleq \frac{V_2(s)}{V_s(s)} = \frac{Z_L(s) I_2(s)}{V_s(s)} = Z_L(s) \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)}$$



ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

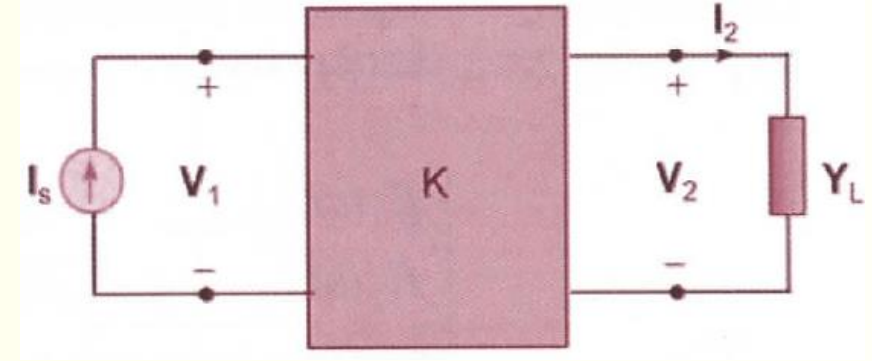
- Θεωρούμε πάλι ένα κύκλωμα **K** χωρίς ανεξάρτητες πηγές (αν έχει, τις θεωρούμε εξουδετερωμένες) και ξεχωρίζουμε δυο θύρες: μια για **είσοδο** και μια για **έξοδο/απόκριση** στην οποία συνδέουμε ένα φορτίο Y_L (γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα)



ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Αποκαλούμε **συνάρτηση μεταφοράς ρεύματος** τον λόγο

$$H_I(s) \triangleq \frac{I_2(s)}{I_S(s)}$$



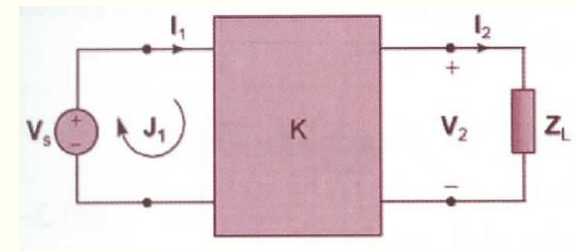
- Θα ισχύει ότι:

$$\begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_n(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)} \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_{11}(s) & \bar{\Delta}_{21}(s) & \cdots & \bar{\Delta}_{n1}(s) \\ \bar{\Delta}_{12}(s) & \bar{\Delta}_{22}(s) & \cdots & \bar{\Delta}_{n2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Delta}_{1n}(s) & \bar{\Delta}_{2n}(s) & \cdots & \bar{\Delta}_{nn}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_S(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_1(s) = \frac{\bar{\Delta}_{11}(s)}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)} I_S(s) \\ E_2(s) = \frac{\bar{\Delta}_{12}(s)}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)} I_S(s) \end{cases}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Έτσι ώστε μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή έκφραση για τη συνάρτηση μεταφοράς ρεύματος:

$$H_I(s) \triangleq \frac{I_2(s)}{I_S(s)} = \frac{Y_L(s) E_2(s)}{I_S(s)} = Y_L(s) \frac{\bar{\Delta}_{12}(s)}{\Delta_{\mathbf{Y}}(s)}$$



ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ—ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

• ΒΕ:

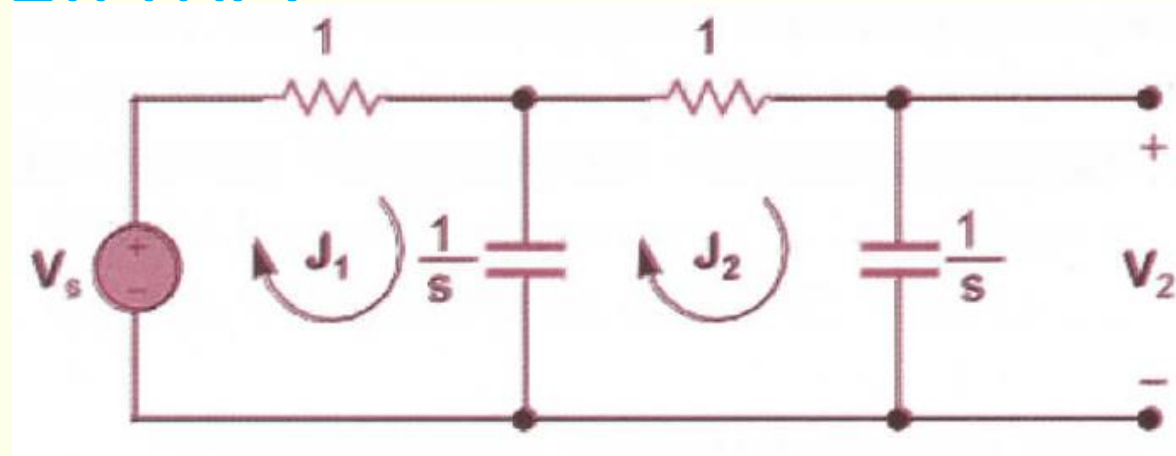
$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & 1 + \frac{2}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(s) \\ \mathbf{J}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Λύση:

$$\mathbf{J}_1(s) = \frac{s(s+2)}{s^2 + 3s + 1} V_s(s)$$

$$\mathbf{J}_2(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 1} V_s(s)$$

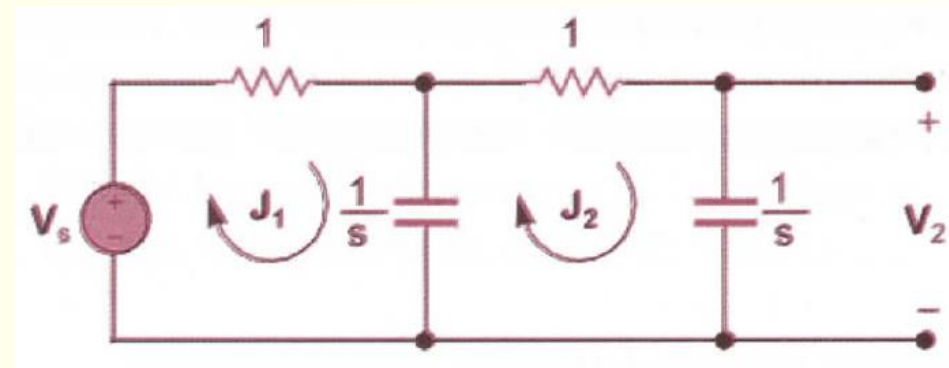
$$V_2(s) = \frac{1}{s} \mathbf{J}_2(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} V_s(s)$$



ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ—ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Συναρτήσεις κυκλώματος:

$$\mathbf{H}_V(s) = \frac{V_2(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$



$$\mathbf{Y}_{11}(s) = \frac{\mathbf{J}_1(s)}{V_s(s)} = \frac{s(s+2)}{s^2 + 3s + 1}$$

$$\mathbf{Z}_{11}(s) = \frac{V_s(s)}{\mathbf{J}_1(s)} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+2)}$$

$$\mathbf{Y}_{21}(s) = \frac{\mathbf{J}_2(s)}{V_s(s)} = \frac{s}{s^2 + 3s + 1}$$

$$\mathbf{Z}_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{\mathbf{J}_1(s)} = \frac{1}{s(s+2)}$$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ—ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

Είδαμε τις παρακάτω **γενικευμένες συναρτήσεις κυκλώματος**:

1. Γενικευμένη σύνθετη αντίσταση θύρας $\frac{V_i(s)}{I_i(s)}$
2. Γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα θύρας $\frac{I_i(s)}{V_i(s)}$
3. Γενικευμένη σύνθετη αντίσταση μεταφοράς από i σε j $\frac{V_i(s)}{I_j(s)}$
4. Γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα μεταφοράς από i σε j $\frac{I_i(s)}{V_j(s)}$
5. Συνάρτηση μεταφοράς τάσης $\frac{V_x(s)}{V_s(s)}$
6. Συνάρτηση μεταφοράς ρεύματος $\frac{I_x(s)}{I_s(s)}$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Όλοι οι παραπάνω ορισμοί που έγιναν στη (μαθηματική) βάση τής αντιστροφής πίνακα και παίρνουν τη μορφή λόγου οριζουσών, ισχύουν **μόνο για παθητικά κυκλώματα**
- Για τα **ενεργά κυκλώματα** οι συναρτήσεις κυκλώματος πρέπει να υπολογιστούν σαν λόγοι που εμπλέκουν τα συγκεκριμένα ρεύματα και τις συγκεκριμένες τάσεις που μάς ενδιαφέρουν
- Εναλλακτικά, αν γίνουν όλες οι απαραίτητες διευθετήσεις για να υπάρχουν **μόνο** ανεξάρτητες διεγέρσεις στο δεξιό μέλος, τότε θα ισχύουν και οι μαθηματικές εκφράσεις (χωρίς συμμετρία βέβαια)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Η συνάρτηση μεταφοράς, και στη «χαλαρή» χρήση και στον πιο αυστηρό ορισμό, συμβολίζεται με $H(s)$
- Με $H(s)$ συμβολίζεται και ο μετ/μός Laplace τής κρουστικής απόκρισης $h(t)$
- Ο λόγος που (κακώς) γίνεται αυτό, είναι επειδή εξ ορισμού

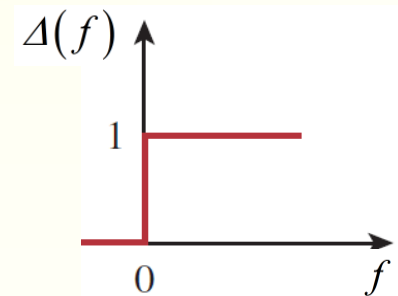
$$H(s) = \frac{ΕΞΟΔΟΣ(s)}{ΕΙΣΟΔΟΣ(s)}$$

- Και όταν η είσοδος είναι η κρουστική $\delta(t)$, τότε

$$H(s) = \frac{ΕΞΟΔΟΣ(s)}{ΕΙΣΟΔΟΣ(s)} = \frac{ΕΞΟΔΟΣ(s)}{\mathcal{L}\{\delta(t)\}} = ΕΞΟΔΟΣ(s)$$

και πράγματι τότε η συνάρτηση κυκλώματος συμπίπτει με τον μετ. Laplace τής κρουστικής απόκρισης

- Η κρουστική περιέχει σε ίσο ποσοστό όλες τις συχνότητες
- Η **μόνη** είσοδος που δεν επηρεάζει την έξοδο καθώς διεγείρει το κύκλωμα



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- Ξεκινώντας πάλι από (π.χ.) τη μέθοδο βροχικών εντάσεων θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11}(s) & \mathbf{Z}_{12}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{1M}(s) \\ \mathbf{Z}_{21}(s) & \mathbf{Z}_{22}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{2M}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{M1}(s) & \mathbf{Z}_{M2}(s) & \cdots & \mathbf{Z}_{MM}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ \vdots \\ J_M(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{S1}(s) \\ V_{S2}(s) \\ \vdots \\ V_{SM}(s) \end{pmatrix}$$

Πίνακας τοπολογίας
τού κυκλώματος

Βροχικές
εντάσεις

Πηγές τάσης στο
παράθυρο $i, i = 1, \dots, M$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- Όπως είχαμε παρατηρήσει και προηγουμένως, θα ισχύει γενικά ότι*:

$$\mathbf{Z}_{ij}(s) = f\left(R_*, sL_*, \frac{1}{sC_*}\right) = \sum_i R_i + s \sum_j L_j + \sum_k \frac{1}{sC_k}$$

- Και αντίστοιχα για τις κομβικές τάσεις

$$\mathbf{Y}_{ij}(s) = g\left(G_*, sC_*, \frac{1}{sL_*}\right) = \sum_i G_i + s \sum_j C_j + \sum_k \frac{1}{sL_k}$$

*Αγνοούμε το πλην όταν $i \neq j$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- Όταν τα στοιχεία τού πίνακα $\mathbf{Z}$ «αναμειχθούν» για να δημιουργηθούν τα αλγεβρικά συμπληρώματα και η ορίζουσα, τότε είναι φανερό ότι οι ποσότητες

$$\frac{\Delta_{ij}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)}$$

$$J_k(s) = \sum_{i=1}^M \frac{\Delta_{ik}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)} V_{Si}(s), \quad k = 1, \dots, M$$

θα είναι ένας λόγος πολυωνύμων

$$\frac{\Delta_{ij}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

δηλαδή μια *ρητή πολυωνυμική συνάρτηση*

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- Αν επίσης παρατηρήσουμε ότι όλοι οι εμπλεκόμενοι αριθμοί είναι πραγματικοί γιατί αντιστοιχούν σε πραγματικά ηλεκτρικά στοιχεία (R , L και C), τότε γίνεται φανερό ότι και οι συντελεστές a_i , $i = 1, \dots, n$ και b_j , $j = 1, \dots, m$ θα είναι πραγματικοί αριθμοί
- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Η Γενικευμένη Συνάρτηση Κυκλώματος είναι ρητή συνάρτηση (λόγος) πολυωνύμων της μιγαδικής μεταβλητής s με πραγματικούς συντελεστές

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- Ακόμα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\Delta_{ij}(s)}{\Delta_{\mathbf{Z}}(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

- Οι πόλοι p_i θα είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί συζυγείς:

$$p_i = \sigma_i \quad \sigma_i \in \mathbb{R}$$

ή

$$p_i = \sigma_i \pm j\omega_i \quad \sigma_i \pm j\omega_i \in \mathbb{C}, \quad \sigma_i, \omega_i \in \mathbb{R}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- Και αν υποθέσουμε ότι όλοι οι πόλοι είναι απλοί (διακριτοί) με K από αυτούς να είναι πραγματικοί, τότε:

$$D(s) = \prod_{k=1}^K (s - \sigma_k) \prod_{l=K+1}^L (s - \sigma_l + j\omega_l)(s - \sigma_l - j\omega_l)$$

$$L = K + \frac{n - K}{2}$$

- Παρόμοια ανάλυση μπορούμε να κάνουμε και για τα μηδενικά, δηλ. τις ρίζες του $N(s)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- Στο σημείο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε την πιο σημαντική ίσως έννοια από τη Θεωρία Συστημάτων, την **Ευστάθεια** (stability)
- Η ευστάθεια μπορεί να οριστεί με πολλούς τρόπους, θεωρητικούς και πρακτικούς
- Μια «πρακτική» ιδέα είναι ότι κανένα μέγεθος δεν μεγαλώνει απεριόριστα, όλα είναι τελικά **φραγμένα** σε απόλυτη τιμή

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- Είναι βέβαια αναμενόμενο, ότι αν διεγείρουμε ένα κύκλωμα με μια κυματομορφή που δεν είναι φραγμένη (π.χ. μια ράμπα), τότε κάποια μεγέθη θα τείνουν προς το άπειρο θεωρητικά και κάποια στοιχεία θα αστοχήσουν («καούν») πρακτικά (και η σειρά εμφάνισης των αστοχιών έχει τεράστια σημασία στην πράξη, π.χ. η ασφάλεια)
- Άρα, στην ευστάθεια (γενικά) παίζει ρόλο και η είσοδος:
Μπορούμε να μιλάμε για ευστάθεια σαν **εσωτερική ιδιότητα** ενός μη οδηγούμενου κυκλώματος αλλά και για ευστάθεια του **συνδυασμού** κυκλώματος με διέγερση

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

- Πρακτικός ορισμός: **Ευστάθεια φραγμένης εξόδου με φραγμένη είσοδο** (BIBO Stability: Bounded Input-Bounded Output)
- Θεωρητικός ορισμός:
 1. Ένα κύκλωμα είναι ευσταθές (**stable**) αν η απόκρισή του σε μοναδιαία κρουστική τείνει στο 0 καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο
 2. Ένα κύκλωμα είναι ασταθές (**unstable**) αν η απόκρισή του σε μοναδιαία κρουστική αυξάνει χωρίς όριο καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο
 3. Ένα κύκλωμα είναι οριακά ευσταθές (**marginally stable**) αν η απόκρισή του σε μοναδιαία κρουστική δεν τείνει στο 0 αλλά παραμένει φραγμένη καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο (π.χ. ταλάντωση)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

- Με βάση τον θεωρητικό ορισμό, η απαίτηση για φραγμένη κρουστική απόκριση $h(t)$ μπορεί να μεταφραστεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace σε απαίτηση για την $H(s)$:
- Όλοι οι πόλοι της $H(s)$ πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο (αν έστω και ένας βρίσκεται στο δεξιό ανοιχτό ημιεπίπεδο, το κύκλωμα είναι ασταθές)
- Μια περαιτέρω διάκριση είναι απαραίτητη:
 1. Αν όλοι οι πόλοι της $H(s)$ βρίσκονται στο **ανοιχτό αριστερό** μιγαδικό ημιεπίπεδο, τότε το κύκλωμα είναι **ευσταθές**
 2. Αν όλοι οι πόλοι της $H(s)$ είναι απλοί και βρίσκονται στον **φανταστικό άξονα**, τότε το κύκλωμα είναι **οριακά ευσταθές**
 3. Αν τουλάχιστον ένας πόλος στον φανταστικό άξονα είναι **πολλαπλός**, τότε το κύκλωμα είναι **ασταθές**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

• ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

• Ας δικαιολογήσουμε τα παραπάνω:

1. Πόλοι τής $H(s)$ στο **ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο**: έχουν τη μορφή $-\gamma_i \pm j\omega_i$ με $\gamma_i > 0$, $\omega_i \geq 0$ και ο αντίστροφος ML δίνει όρους:

$$Ke^{-\gamma_i t}u(t) \quad e^{-\gamma_i t} (K_1 \cos \omega_i t + K_2 \sin \omega_i t)u(t) \quad Kt^{k-1}e^{-\gamma_i t}u(t)/(k-1)!$$

ΑΠΛΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ

ΑΠΛΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΣΥΖΥΓΕΙΣ

ΑΠΛΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ
ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑΣ k

Παρατηρούμε ότι όλοι περιέχουν αρνητικό εκθετικό και «σβήνουν»

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

2. Πόλοι **απλοί** τής $H(s)$ στον **φανταστικό άξονα**:

Έχουν τη μορφή $\pm j\omega_i$ με $\omega_i \geq 0$ (δεν υπάρχει απόσβεση **-lossless**)

Ο αντίστροφος ML δίνει όρους

$$\frac{K}{s} \rightarrow Ku(t)$$

ΑΠΛΟΣ ΣΤΟ 0

$$\frac{K_1 s + K_2}{s^2 + \omega_i^2} \rightarrow K \cos(\omega_i t + \theta) u(t)$$

ΑΠΛΟΙ ΕΚΤΟΣ 0

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται καθαρή (μη αποσβεννύμενη)
ταλάντωση

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

3. Πολλαπλοί πόλοι τής $H(s)$ στον φανταστικό άξονα:

Έχουν τη μορφή $\pm(j\omega_i)^k$ με $\omega_i \geq 0$

Ο αντίστροφος ML δίνει, π.χ. για $k = 2$

$$\frac{s^2 - \omega_i^2}{(s^2 + \omega_i^2)^2} \rightarrow t \cos(\omega_i t) u(t)$$

ΠΟΛΛΑΠΛΟΙ

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται αστάθεια

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ—ΜΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Όπως προαναφέρθηκε στο 2 πιο πάνω, ένα κύκλωμα με απλό πόλο στην αρχή των αξόνων είναι οριακά ευσταθές
- Όμως, αν διεγείρουμε αυτό το κύκλωμα με ημιτονοειδή είσοδο που έχει συχνότητα ίση με τη συχνότητα του πόλου (δηλ. **συντονισμός**), τότε εμφανίζεται **αστάθεια**!

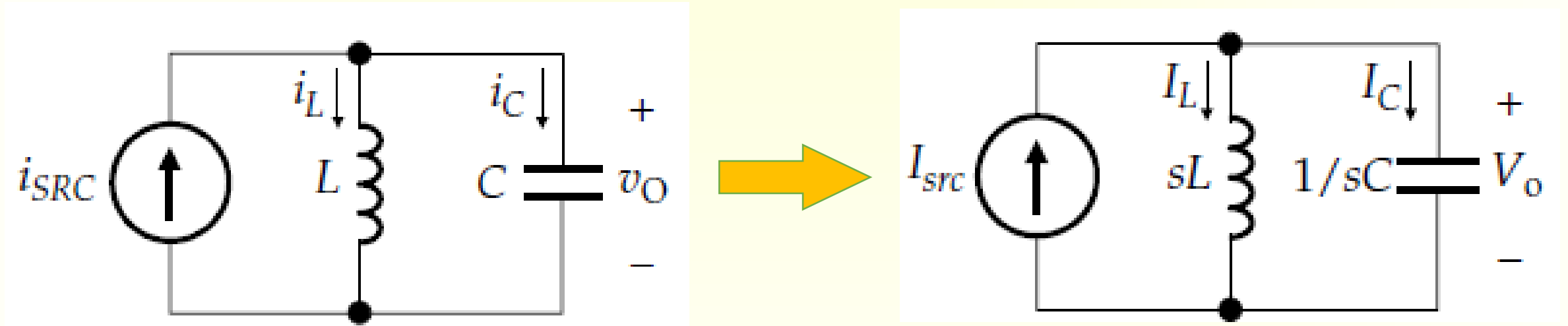
• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Πυκνωτής με συνάρτηση κυκλώματος: $\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$
- Διέγερση με σταθερή πηγή ρεύματος dc που έχει ML: $\frac{I_{dc}}{s}$
- Αποτέλεσμα: έξοδος $V(s) = \frac{I_{dc}}{s^2 C} \Rightarrow v(t) = \frac{I_{dc}}{C} t u(t) \rightarrow \infty$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ—ΜΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΑΜΚ για κύκλωμα παράλληλο LC χωρίς απόσβεση



Συνάρτηση κυκλώματος:

$$V_o(s) = \frac{sL \left(\frac{1}{sC} \right)}{sL + \frac{1}{sC}} I_{src}(s) \Rightarrow \frac{V_o(s)}{I_{src}(s)} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \Rightarrow H(s) = \frac{V_o(s)}{I_{src}(s)} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ—ΜΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** ΑΜΚ για κύκλωμα παράλληλο LC χωρίς απόσβεση
- Η συνάρτηση κυκλώματος έχει δυο απλούς φανταστικούς συζυγείς πόλους στο $s = \pm j\omega_0$

- Αν το κύκλωμα **διεγερθεί με μοναδιαία κρουστική** τότε:

$$h(t) = v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{C} \cos(\omega_0 t) u(t)$$

- **ΕΡΜΗΝΕΙΑ:** Αρχικά η κρουστική φορτίζει ακαριαία και αναγκαστικά μόνο τον πυκνωτή που εκφορτίζεται μέσω τού πηνίου που «εκφορτίζεται» φορτίζοντας τον πυκνωτή κλπ., οπότε από την πρώτη στιγμή εμφανίζεται ανταλλαγή ενέργειας χωρίς απώλειες μεταξύ C και L , δηλ. **ταλάντωση** και έχουμε **οριακή ευστάθεια**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ—ΜΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΑΜΚ για κύκλωμα παράλληλο LC χωρίς απόσβεση
- Αν το κύκλωμα διεγερθεί με ημιτονοειδή συχνότητας $\omega \neq \omega_0$ τότε

$$i_{SRC}(t) = A \cos(\omega t) \Rightarrow I_{src}(s) = A \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow V_o(s) = \frac{A}{C} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

- που θα δώσει:

$$V_o(s) = \frac{A}{C} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{A}{C(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \right) \Rightarrow$$

$$v_o(t) = \frac{A}{C(\omega_0^2 - \omega^2)} (\omega_0 \sin \omega_0 t - \omega \sin \omega t) u(t)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ—ΜΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΑΜΚ για κύκλωμα παράλληλο LC χωρίς απόσβεση
- Αν το κύκλωμα διεγερθεί με ημιτονοειδή συχνότητας $\omega = \omega_0$ τότε

$$i_{SRC}(t) = A \cos(\omega_0 t) \Rightarrow I_{src}(s) = A \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow V_o(s) = \frac{A}{C} \frac{s^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

- Που θα δώσει:

$$V_o(s) = \frac{A}{C} \frac{s^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \frac{A}{2C} \left[\frac{1}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \right] \Rightarrow$$

$$v_o(t) = \frac{A}{2C} \left(\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t + t \cos \omega_0 t \right) u(t)$$

→ ∞

Και δεν φτάνει ποτέ σε
μόνιμη κατάσταση

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- **Επιστροφή...**
- Για τους πόλους:

$$D(s) = \prod_{k=1}^K (s - \sigma_k) \prod_{l=K+1}^L (s - \sigma_l + j\omega_l)(s - \sigma_l - j\omega_l)$$

$$L = K + \frac{n - K}{2}$$

- Παρόμοια ανάλυση μπορούμε να κάνουμε και για τα μηδενικά, δηλ. τις ρίζες του $N(s)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

- Παίρνοντας σαν δεδομένη την ευστάθεια, δηλαδή με $\sigma_i < 0$ και $\omega_i > 0$, θα έχουμε:

$$D(s) = \prod_{k=1}^K (s + \sigma_k) \prod_{l=K+1}^L \left[(s + \sigma_l)^2 + \omega_l^2 \right], \quad L = K + \frac{n - K}{2}$$
$$= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

- Επειδή όλοι οι εμπλεκόμενοι αριθμοί είναι θετικοί και επειδή δεν υπάρχουν αφαιρέσεις, συμπεραίνουμε ότι:
 1. Όλοι οι συντελεστές a_i είναι θετικοί
 2. Όλοι οι συντελεστές a_i είναι πάντα διάφοροι του μηδενός (πλήρες πολυώνυμο)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

• ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Κάθε γενικευμένη συνάρτηση κυκλώματος είναι ρητή συνάρτηση πολυωνύμων τής μιγαδικής μεταβλητής s με πραγματικούς συντελεστές
- Το πολυώνυμο του παρονομαστή $D(s)$ είναι πλήρες
- Το πολυώνυμο του παρονομαστή $D(s)$ έχει θετικούς συντελεστές
- Για να υπάρχει ευστάθεια, οι ρίζες τού $D(s)$, δηλαδή οι **πόλοι** ή **φυσικές συχνότητες** του κυκλώματος, πρέπει να βρίσκονται στο ανοιχτό αριστερό ημιεπίπεδο

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

- ☐ Απλοί πόλοι στον φανταστικό άξονα συνεπάγονται οριακή ευστάθεια
- ☐ Πολλαπλοί πόλοι στον φανταστικό άξονα συνεπάγονται αστάθεια

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ

- Η γενικευμένη σύνθετη αντίσταση εισόδου (ή εξόδου) παίρνει τη μορφή:

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Όμως, και το αντίστροφο μπορεί να είναι συνάρτηση κυκλώματος, για την ακρίβεια γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου (ή εξόδου)

$$Y(s) = \frac{D(s)}{N(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

- Συμπεραίνουμε ότι οι περιορισμοί που προαναφέρθηκαν για το $D(s)$ επεκτείνονται τώρα και στο $N(s)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ

- Εμφανίζεται τώρα κι ένας επιπλέον περιορισμός:
- Αν υποθέσουμε ότι $s \rightarrow \infty$, δηλαδή θεωρούμε μόνο τις **υψηλές συχνότητες**, τότε κυριαρχούν οι υψηλόβαθμοι όροι και

$$\frac{N(s)}{D(s)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{b_m s^m}{a_n s^n} = \frac{b_m}{a_n} s^{m-n} \qquad \frac{D(s)}{N(s)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{a_n s^n}{b_m s^m} = \frac{a_n}{b_m} s^{n-m}$$

- Αν τώρα η διαφορά μεταξύ m και n είναι περισσότερο από 1, θα εμφανιστεί πολλαπλός πόλος στον φανταστικό άξονα, πράγμα που σημαίνει αστάθεια και δεν είναι αποδεκτό
- **Οπότε πρέπει** $|m - n| \leq 1$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ

- Αν υποθέσουμε τώρα ότι $s \rightarrow 0$, δηλαδή θεωρούμε μόνο τις **χαμηλές συχνότητες**, τότε κυριαρχούν οι χαμηλόβαθμοι όροι και

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{D(s)}{N(s)} = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0}$$

- Τότε θα έχουμε

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} = \begin{cases} \frac{b_1 s}{a_0} & \alpha\nu \ b_0 = 0, \ a_1 = 0, \ a_0 \neq 0 \rightarrow \text{ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ} \\ \frac{b_0}{a_1 s} & \alpha\nu \ a_0 = 0, \ b_1 = 0, \ a_1, b_0 \neq 0 \rightarrow \text{ΧΩΡΗΤΙΚΗ} \\ \frac{b_0}{a_0} & \alpha\nu \ a_1 = 0, \ b_1 = 0, \ a_0 \neq 0 \rightarrow \text{ΩΜΙΚΗ} \end{cases}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ

- Βλέπουμε ότι αν η διαφορά μεταξύ m και n είναι περισσότερο από 1, θα εμφανιστεί και ασυνέπεια στη συμπεριφορά αλλά και πολλαπλός πόλος στον φανταστικό άξονα, πράγμα που σημαίνει αστάθεια και δεν είναι αποδεκτό
- **Οπότε πάλι πρέπει** $|m - n| \leq 1$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Η γενικευμένη συνάρτηση εισόδου είναι ρητή συνάρτηση πολυωνύμων τής μιγαδικής μεταβλητής s με πραγματικούς συντελεστές
- Τα πολυώνυμα του αριθμητή $N(s)$ και του παρονομαστή $D(s)$ είναι πλήρη
- Τα πολυώνυμα του αριθμητή $N(s)$ και του παρονομαστή $D(s)$ έχουν θετικούς συντελεστές
- Οι βαθμοί των πολυωνύμων τού αριθμητή και του παρονομαστή δεν διαφέρουν περισσότερο από τη μονάδα
- Για να υπάρχει ευστάθεια, και οι ρίζες τού $D(s)$ και οι ρίζες τού $N(s)$ πρέπει να βρίσκονται στο ανοιχτό αριστερό ημιεπίπεδο

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

- Σε αντίθεση με τις συναρτήσεις εισόδου, στις συναρτήσεις μεταφοράς δεν μπαίνει θέμα αντιστροφής
- Κατά συνέπεια, οι ρίζες τού αριθμητή είναι «ελεύθερες» να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο (και οι συντελεστές τού πολυωνύμου να είναι αρνητικοί ή μηδέν)
- Παραμένει όμως το **θέμα των βαθμών των πολυωνύμων**:
 - Εκεί που μπαίνει θέμα (γενικευμένης σύνθετης) αντίστασης ή αγωγιμότητας, ο περιορισμός τού $|m - n| \leq 1$ παραμένει
 - Εκεί που υπάρχει λόγος ομοειδών μεγεθών, ο περιορισμός είναι ότι πρέπει $m \leq n$, δηλ. ο βαθμός τού πολυωνύμου τού αριθμητή να είναι μικρότερος από ή ίσος με τον βαθμό τού πολυωνύμου τού παρονομαστή (η απόδειξη αμέσως μετά)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Στις συναρτήσεις μεταφοράς τάσης ή ρεύματος πρέπει ο βαθμός τού πολυωνύμου τού αριθμητή να είναι μικρότερος από ή ίσος με τον βαθμό τού πολυωνύμου τού παρονομαστή
- Ας υποθέσουμε το αντίθετο, δηλ. $n < m$
- Τότε, η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H_V(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = s^{m-n} + \frac{N_1(s)}{D(s)}$$

όπου το πολυώνυμο $N_1(s)$ έχει ίδιο βαθμό με το $D(s)$

...

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

- Και θα ισχύει ότι

$$V_{out}(s) = s^{m-n} V_{in}(s) + \frac{N_1(s)}{D(s)} V_{in}(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} v_{out}(t) = \frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}} v_{in}(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N_1(s)}{D(s)} V_{in}(s) \right\}$$

- Τώρα, όταν $t = 0$, η είσοδος είναι $v_{in}(0) = 0 \Rightarrow V_{in}(0) = 0$
- Όμως, όταν $t = 0$, σύμφωνα με τα παραπάνω, η έξοδος θα είναι

$$v_{out}(0) = \left. \frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}} v_{in}(t) \right|_{t=0} \neq 0 \quad (\text{γενικά})$$

- Δηλαδή, υπάρχει απόκριση ενώ το κύκλωμα δεν έχει διεγερθεί ακόμα!
- Αυτό παραβιάζει την αρχή της **αιτιοκρατίας** (causality), οπότε πρέπει να ισχύει ότι $m \leq n$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE—ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

$$S = \sigma + j\omega$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

ΕΠΙΛΥΣΗ

- ΜL στοιχείων και διεγέρσεων
- Κομβικές Τάσεις
ή Βροχικές Εντάσεις
- Λύση αλγ. συστήματος
- Αντίστροφος ΜL

ΣΥΝΕΛΙΞΗ: Ολοκλήρωμα και θεώρημα

ΑΝΑΛΥΣΗ

- Συναρτήσεις κυκλώματος: (μηδενικές αρχικές συνθήκες)
 - ☐ Γενικευμένη σύνθετη αντίσταση θύρας
 - ☐ Γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα θύρας
 - ☐ Γενικευμένη σύνθετη αντίσταση μεταφοράς από i σε j
 - ☐ Γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα μεταφοράς από i σε j
 - ☐ Συνάρτηση μεταφοράς τάσης
 - ☐ Συνάρτηση μεταφοράς ρεύματος

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE—ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

$$s = \sigma + j\omega$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ



- Πιο γρήγορος
- Πιο αποτελεσματικός
- Για οποιαδήποτε διέγερση



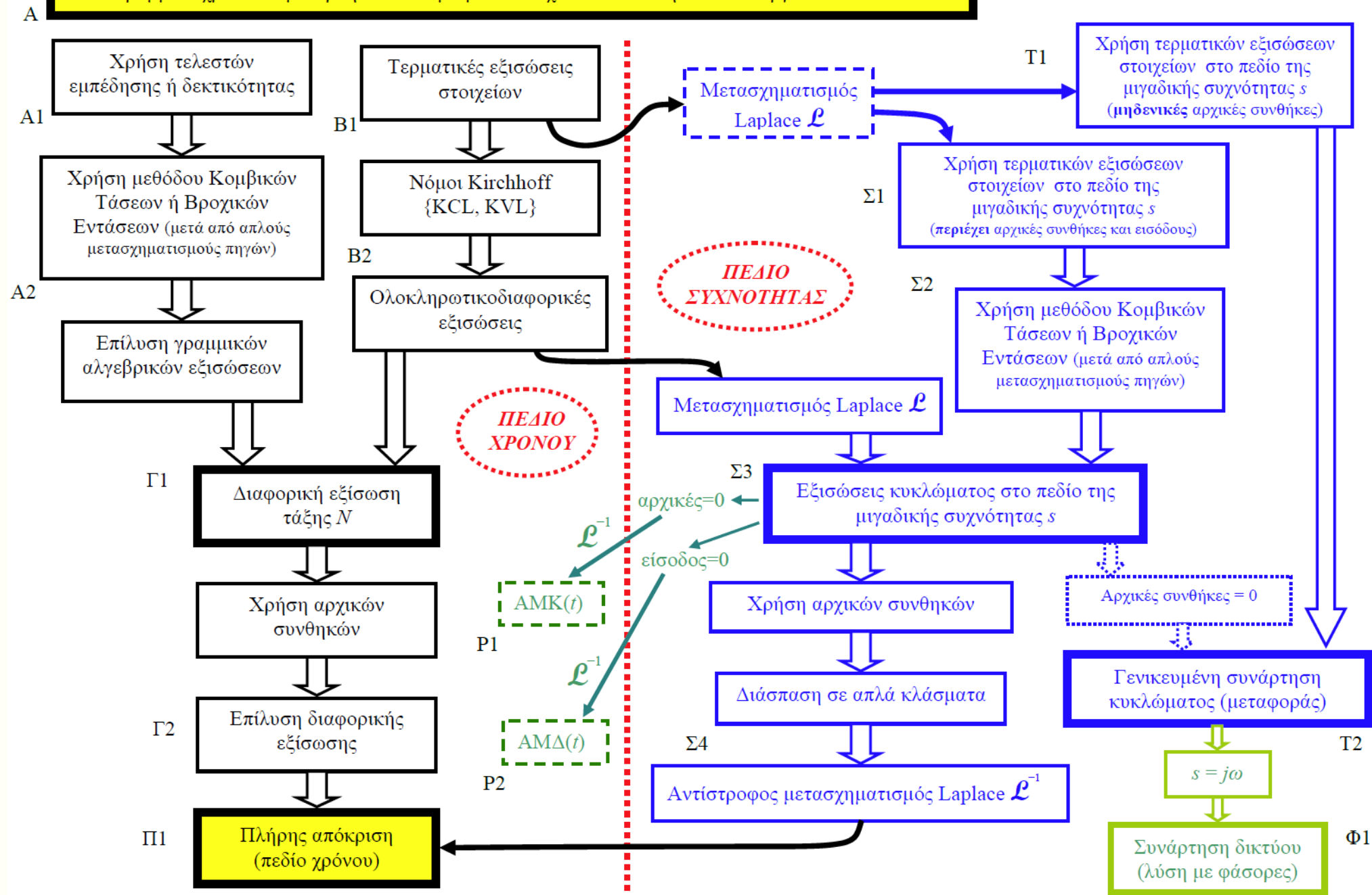
- Μόνο γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα κυκλώματα

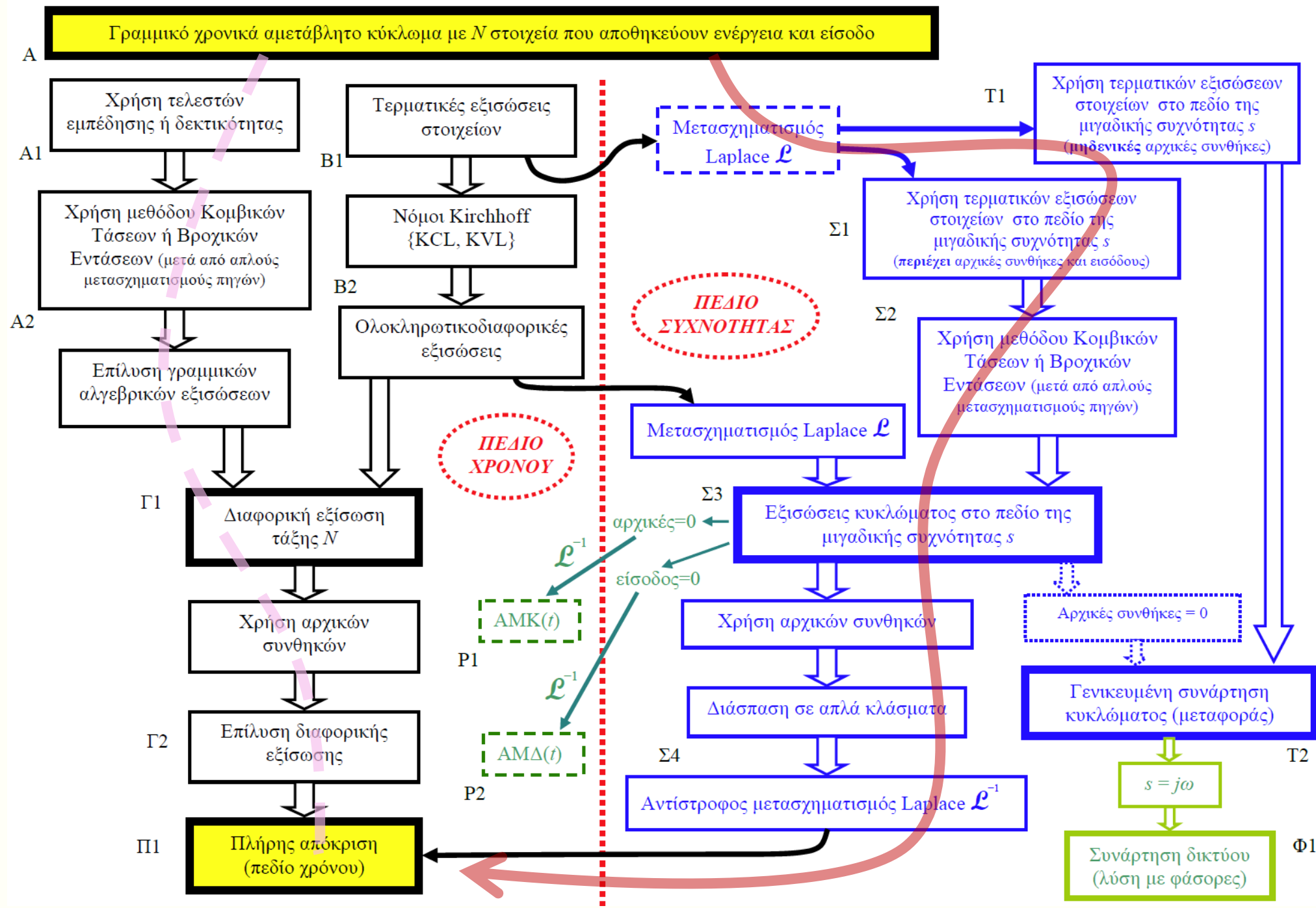
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE
ΚΑΙ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Γραμμικό χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα με N στοιχεία που αποθηκεύουν ενέργεια και είσοδο





ΒΑΣΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗ 1: Από το **A**, δηλαδή για ένα δεδομένο γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα με N στοιχεία που αποθηκεύουν ενέργεια και είσοδο, να πάμε στο **Π1**, δηλαδή να βρεθεί η **πλήρης απόκριση** σαν συνάρτηση του χρόνου.

► **ΛΥΣΗ 1** (η πιο αποτελεσματική στο ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ):

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A1} \rightarrow \mathbf{A2} \rightarrow \mathbf{\Gamma1} \rightarrow \mathbf{\Gamma2} \rightarrow \mathbf{\Pi1}$$

Η λύση που ακολουθεί τη διαδρομή $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B1} \rightarrow \mathbf{B2} \rightarrow \mathbf{\Gamma1} \rightarrow \mathbf{\Gamma2} \rightarrow \mathbf{\Pi1}$ είναι περισσότερο ακαδημαϊκού τύπου και θα απαιτήσει μεγαλύτερη προσπάθεια.

►►► **ΛΥΣΗ 2** (η πιο αποτελεσματική στο ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ και γενικά προτιμότερη):

$$\mathbf{A} (\rightarrow \mathbf{B1}) \rightarrow \mathbf{\Sigma1} \rightarrow \mathbf{\Sigma2} \rightarrow \mathbf{\Sigma3} \rightarrow \mathbf{\Sigma4} \rightarrow \mathbf{\Pi1}$$

- Όπως φαίνεται από τις πράσινες εναλλακτικές διαδρομές μετά το $\Sigma3$, μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης (ΑΜΚ στο σημείο P1) και την απόκριση μηδενικής διέγερσης (ΑΜΔ στο σημείο P2) στο πεδίο του χρόνου.
- Εναλλακτικά μπορούμε να φτάσουμε στο $\Sigma3$ και από τη διαδρομή $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B1} \rightarrow \mathbf{B2} \rightarrow \mathbf{\Sigma3}$ αλλά αυτό σημαίνει περισσότερη προσπάθεια.
- Για την **κρουστική απόκριση** υπολογίζουμε τη συνάρτηση κυκλώματος ακολουθώντας τη διαδρομή $\mathbf{A} (\rightarrow \mathbf{B1}) \rightarrow \mathbf{T1} \rightarrow \mathbf{T2}$. Αν κάνουμε την αντικατάσταση $s = j\omega$ βρίσκουμε τη λύση με φάσορες (σημείο **Φ1**) που αντιστοιχεί στη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση.
- Από το σημείο T2 (συνάρτηση κυκλώματος) μπορούμε να φτάσουμε στο P1 με έναν αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. (Με άλλα λόγια το T2 είναι όπως το $\Sigma3$ με τις αρχικές συνθήκες ήδη μηδενισμένες.)

ΒΑΣΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗ 2: Από το **A**, δηλαδή για ένα δεδομένο γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα με N στοιχεία που αποθηκεύουν ενέργεια και ημιτονοειδή είσοδο να βρεθεί η απόκριση μετά το τέλος των μεταβατικών φαινομένων, δηλαδή να βρεθεί η απόκριση στη **μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση (ΜΗΚ)**.

Ο πιο αποτελεσματικός τρόπος να βρούμε την απόκριση σε ΜΗΚ είναι να ακολουθήσουμε τη διαδρομή $\mathbf{A} (\rightarrow \mathbf{B1}) \rightarrow \mathbf{T1} \rightarrow \mathbf{T2} \rightarrow \mathbf{\Phi1}$ χρησιμοποιώντας όμως από την αρχή τη φασορική μορφή όλων των μεγεθών και παραμέτρων. Φυσικά, μετά το $\Phi1$ πρέπει να περάσουμε στο πεδίο χρόνου παίρνοντας το πραγματικό μέρος της λύσης πολλαπλασιασμένης με $e^{j\omega t}$.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ—ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ

