ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΓΕΝΙΚΑ ΚΑΙ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

- Ο τυπικός σκοπός των ασκήσεων είναι η κατανόηση και εμπέδωση της θεωρίας
- Επίσης θα γίνει προσπάθεια να παρουσιαστούν προβλήματα σχετικά με πραγματικά κυκλώματα ή αρχές λειτουργίας
- **ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1**: Τα θέματα των εξετάσεων είναι σχεδόν ίδια με τα προβλήματα που θα παρουσιαστούν εδώ
- **ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2**: Υπάρχουν πολλές ασκήσεις στο διαδίκτυο ενώ στον ιστότοπο του μαθήματος βρίσκονται:
  - Λυμένες ασκήσεις (συμπερ. παλιών θεμάτων)
  - Ασκήσεις με τελική απάντηση (συμπερ. παλιών θεμάτων)

ΓΕΝΙΚΑ ΚΑΙ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

- ΟΜΩΣ, όσες ασκήσεις και να λυθούν, δεν θα υπάρξει εγγύηση επιτυχίας και στις εξετάσεις!
- Η επιτυχία (σε κάθε προσπάθεια, τελικά) έγκειται:
- Στη συγκέντρωση χωρίς διαλείψεις
- Στην προσοχή στα βασικά/υπόβαθρο, όπως π.χ. απλές πράξεις και χειρισμοί
- Στην οργάνωση της προσέγγισης
  - Ξεκινώντας από ένα αρχικό στάδιο στρατηγικής σκέψης
  - Καθαρή σχεδίαση και γράψιμο
  - Απλοποιώντας επί τόπου εκφράσεις με αριθμούς, ειδικά μιγαδικούς
- Στη συσσωρευμένη και χωρίς κενά γνώση από κατάλληλη μελέτη σε όλη τη διάρκεια του εξαμήνου
- Στην αυτοπεποίθηση που χτίζεται μετά από επαρκή εξάσκηση

ΓΕΝΙΚΑ-2020

- …προσοχή στα βασικά/υπόβαθρο, όπως π.χ. απλές πράξεις και χειρισμοί, π.χ.:
  - **kΩ** και **MΩ**: Τα χρησιμοποιούμε **<u>πάντα</u>** στους υπολογισμούς ακόμα κι όταν πρόκειται να απλοποιηθούν

Διαιρ.Τ.: $V_s \frac{1000}{1000+2000} = V_s \frac{1}{1+2} = \frac{V_s}{3}$

$1000 \,||\, 2000$: $\frac{1000 \times 2000}{1000+2000} = \frac{2000000}{3000} = \frac{2000}{3} = \frac{2}{3}\ \text{k}\Omega$

$\frac{1 \times 2}{1+2} = \frac{2}{3}\ \text{k}\Omega$ **Θα το θυμηθείτε???**

- Από γραπτό: 1,6 M = 16 k
- Πόσο είναι το $\sqrt{10^{-9}}$?
- Πολλοί είναι σίγουροι ότι είναι ίσο με 10^{-3}
- Το $t - 1\ \text{ms}$ ΔΕΝ είναι $t - 1$ αλλά $t - 0{,}001$

ΜΑΘΕΤΕ ΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ:

k, M, G, T, P, E, Z

ΚΑΙ ΤΑ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ:

m, μ, n, p, f, a, z

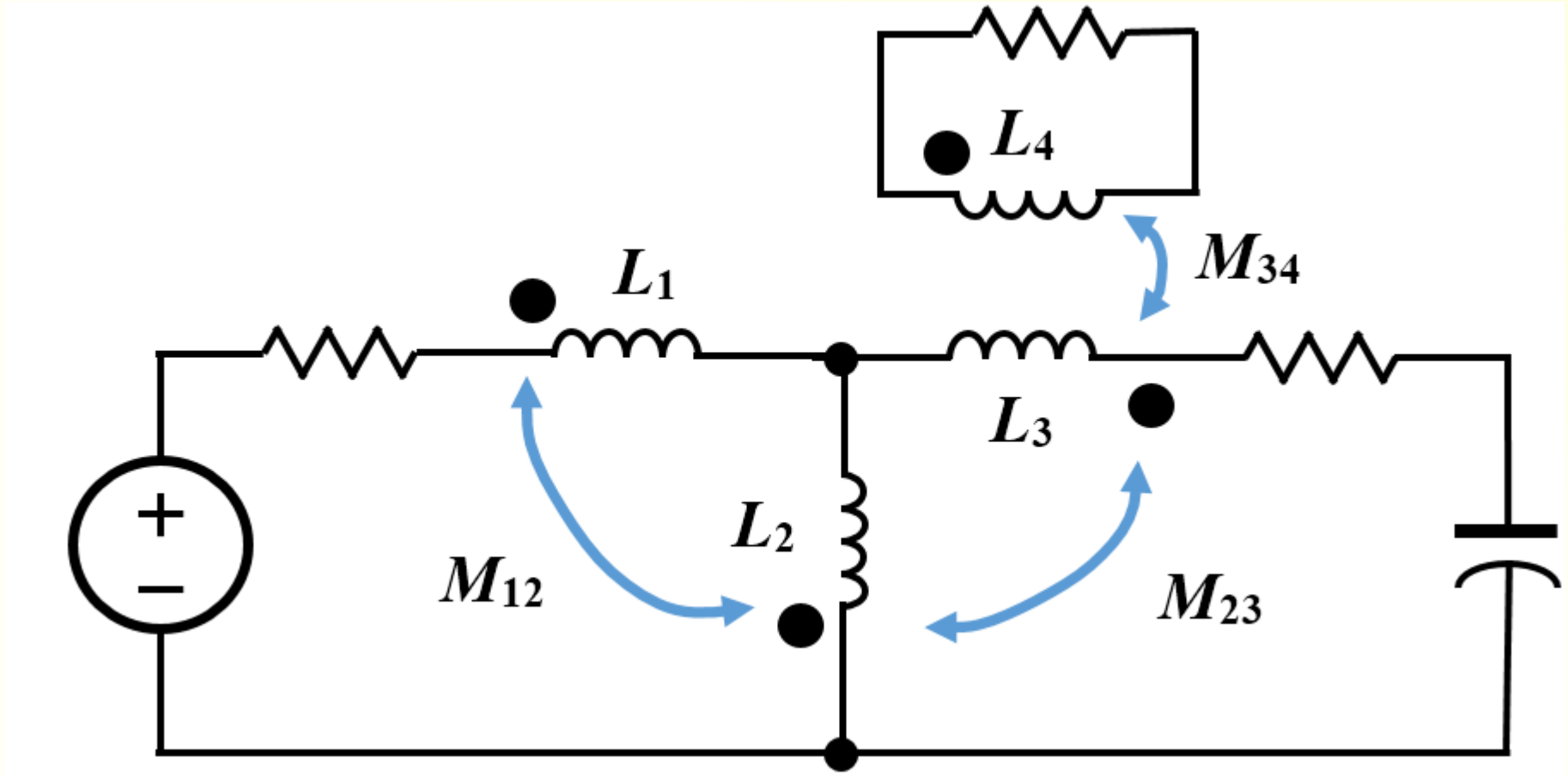
ΓΕΝΙΚΑ-2022

- Απλές πράξεις και χειρισμοί
- Βραχυκυκλωμένα στοιχεία
- Κακές επιλογές/αποφάσεις

1

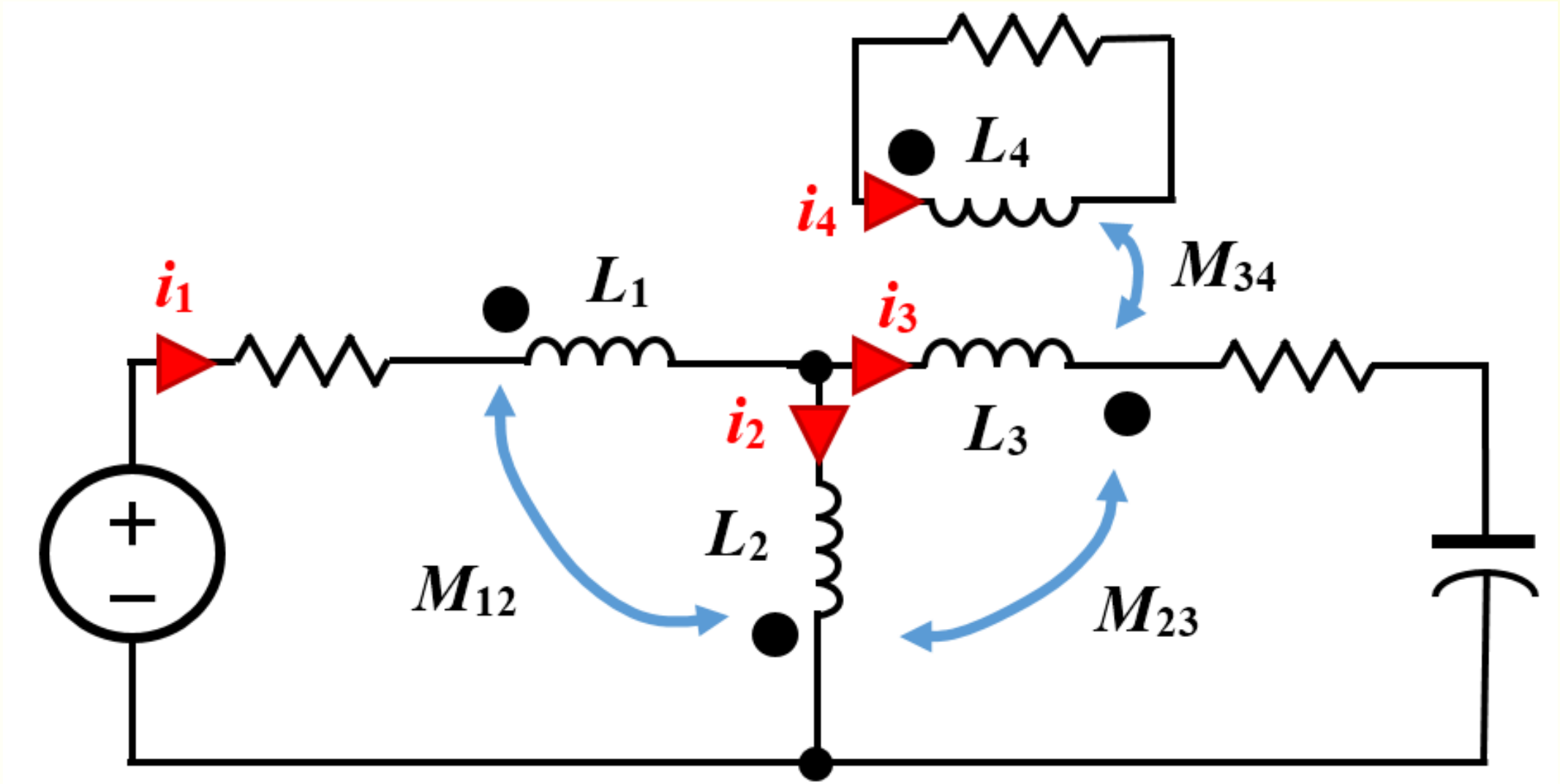
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Να κατασκευαστεί ο πίνακας επαγωγών για το εικονιζόμενο σύστημα συζευγμένων πηνίων



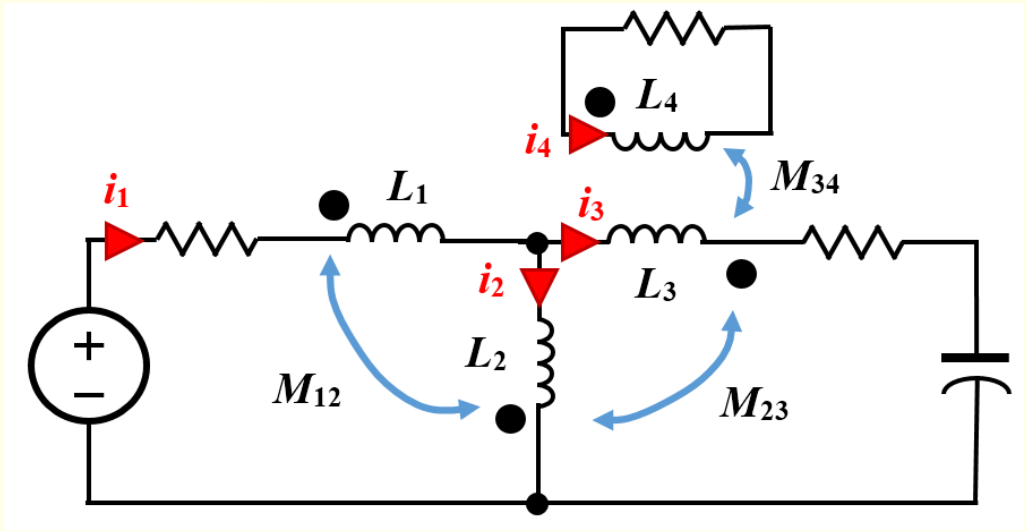
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Ορίζουμε ρεύματα:



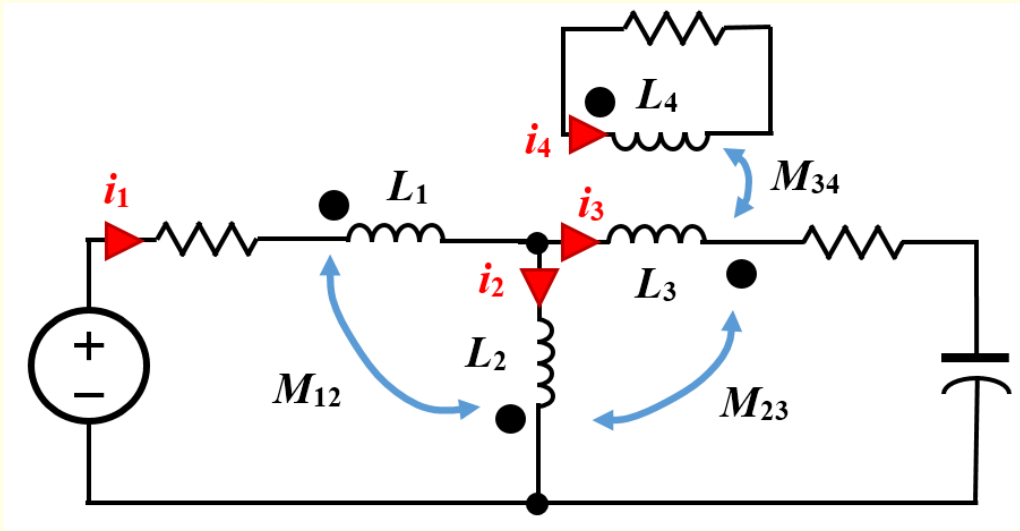
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα:



$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 & -M_{12} & 0 & 0 \\ -M_{12} & L_2 & M_{23} & 0 \\ 0 & M_{23} & L_3 & -M_{34} \\ 0 & 0 & -M_{34} & L_4 \end{pmatrix}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



- Προκύπτουν οι τάσεις:

$$V_{L_1}(j\omega) = j\omega L_1 I_1 - j\omega M_{12} I_2$$

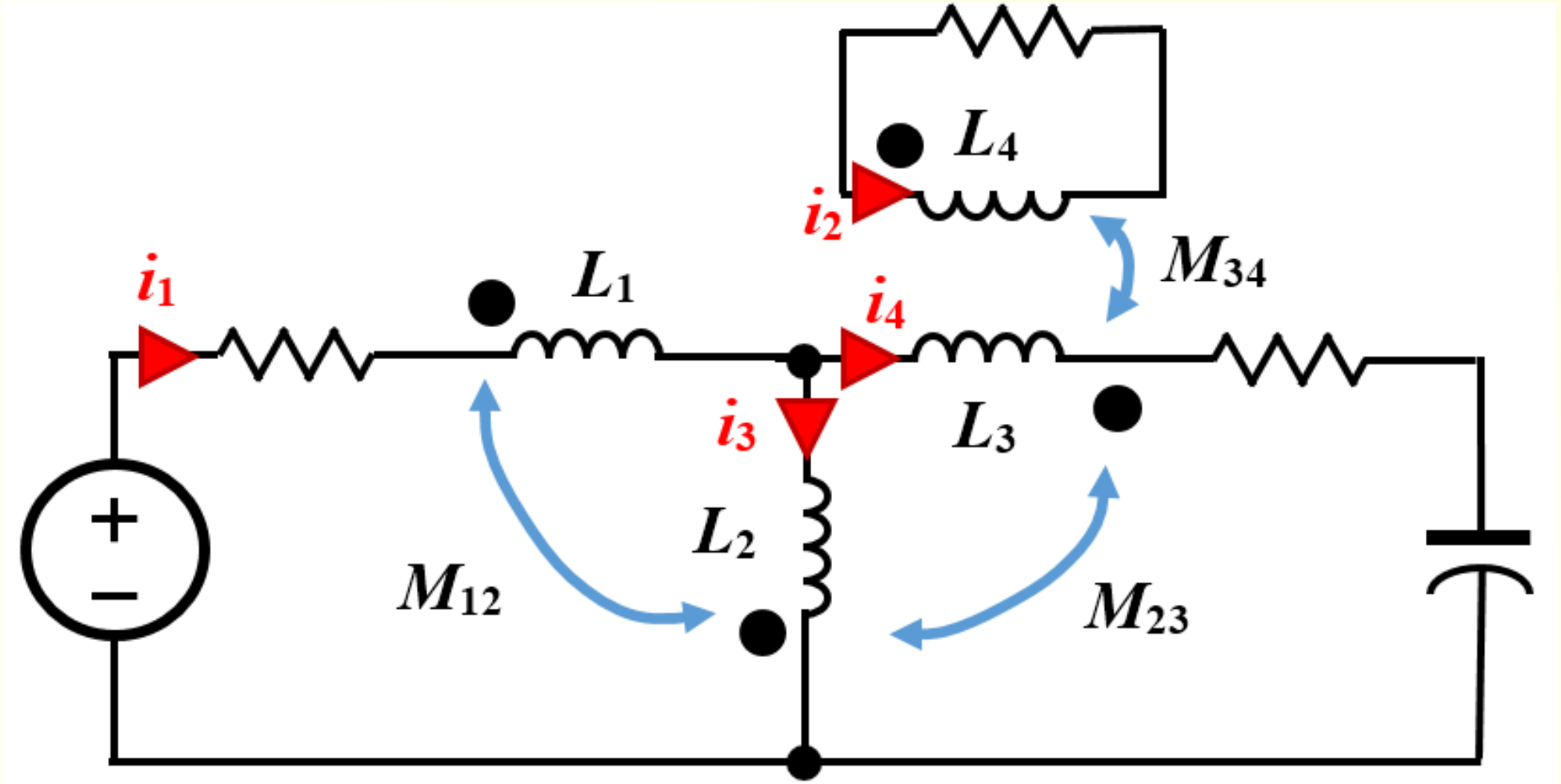
$$V_{L_2}(j\omega) = -j\omega M_{12} I_1 + j\omega L_2 I_2 + j\omega M_{23} I_3$$

$$V_{L_3}(j\omega) = j\omega M_{23} I_2 + j\omega L_3 I_3 - j\omega M_{34} I_4$$

$$V_{L_4}(j\omega) = -j\omega M_{34} I_3 + j\omega L_4 I_4$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Ονομάστε τα ρεύματα λίγο διαφορετικά και ξαναλύστε:

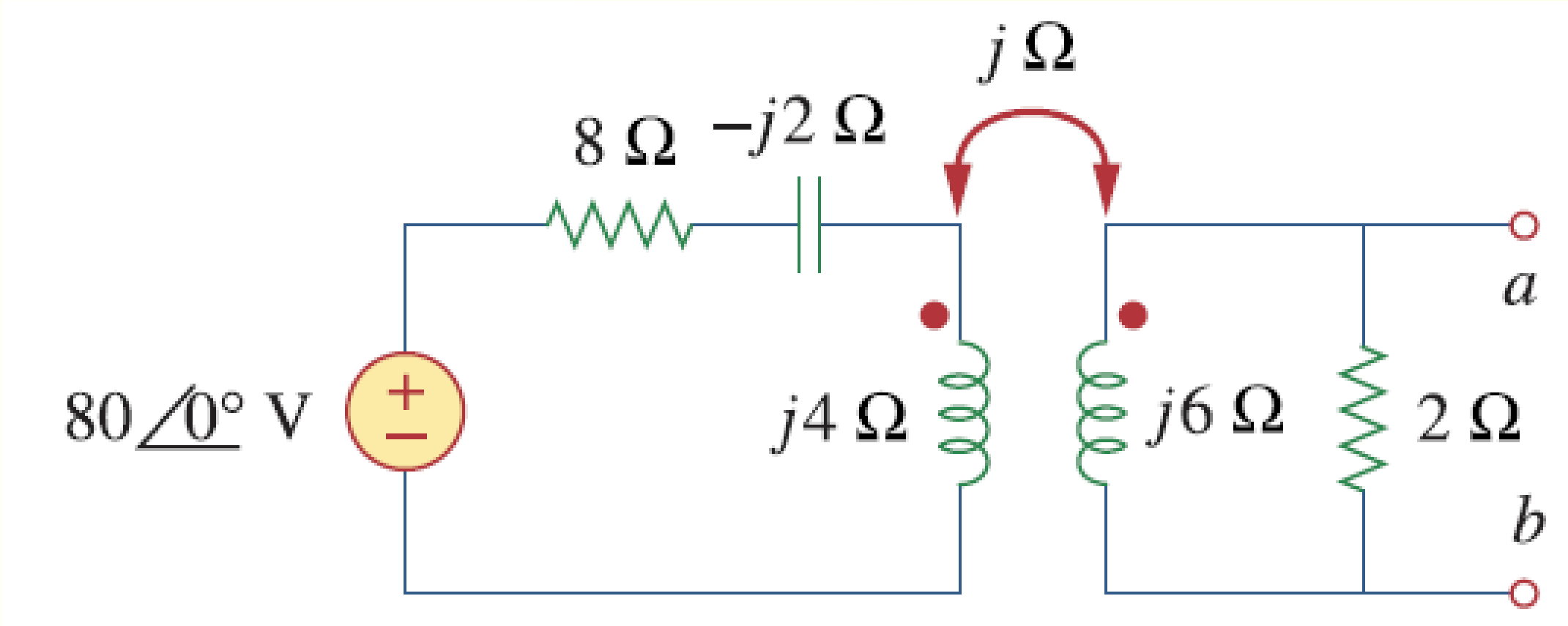


2

2α

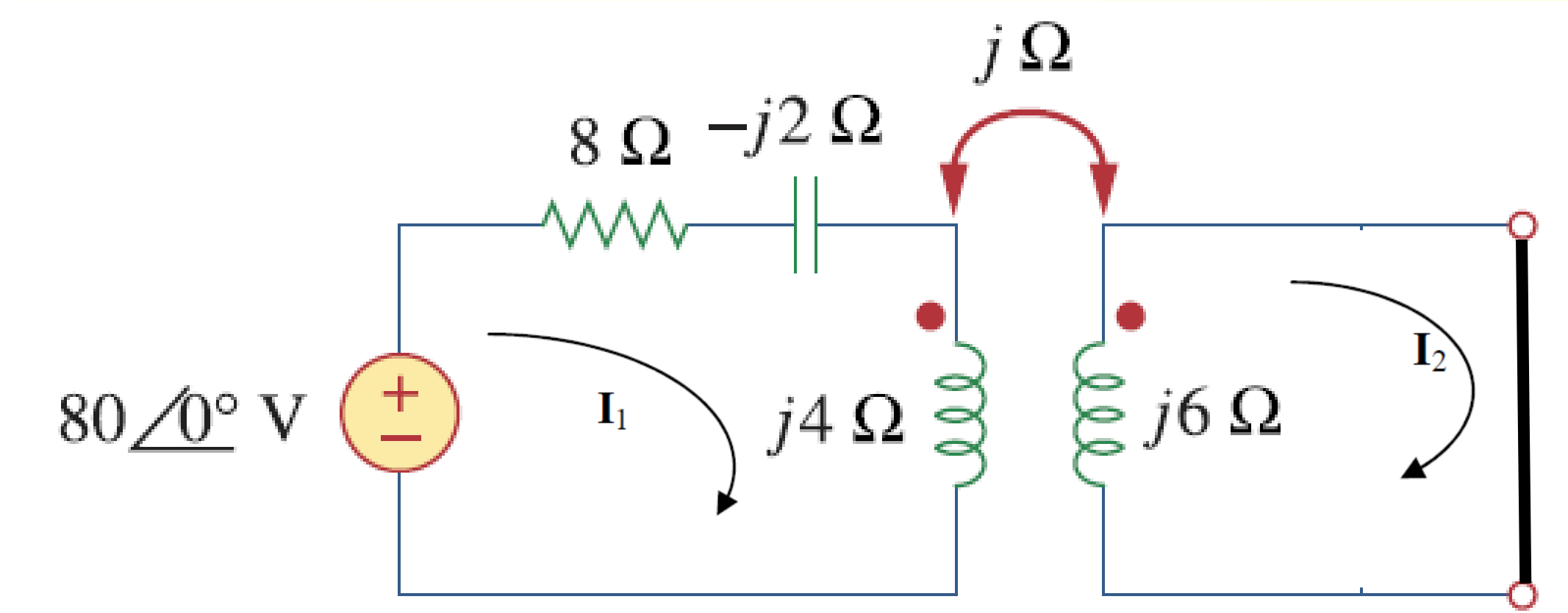
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Υπολογίστε το ισοδύναμο Norton από τα σημεία *a* και *b* για το κύκλωμα:



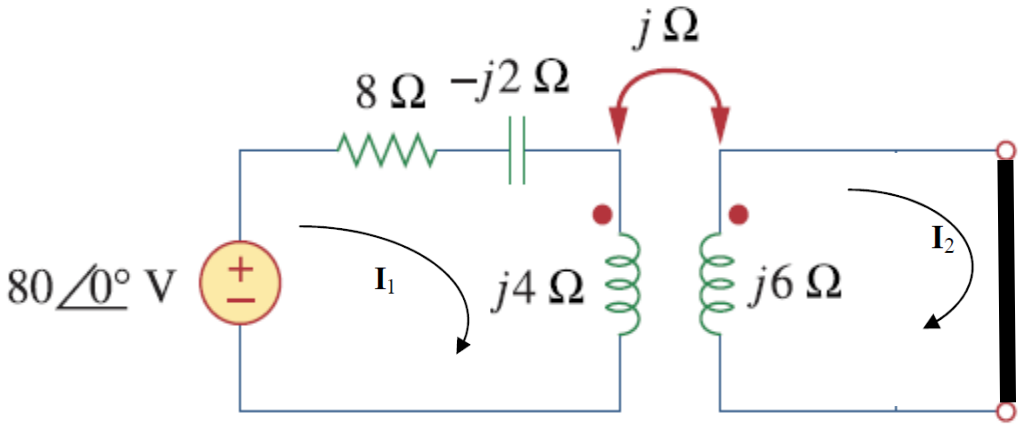
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Για το ρεύμα Norton I_N βραχυκυκλώνουμε τα σημεία *a* και *b* (πράγμα που εξουδετερώνει την $R = 2\ \Omega$):



- Χρησιμοποιούμε βροχικές εντάσεις

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



$$-80+(8-j2+j4)I_1-jI_2=0 \quad \Rightarrow \quad (8+j2)I_1-jI_2=80$$

$$j6I_2-jI_1=0 \quad \Rightarrow \quad I_1=6I_2$$

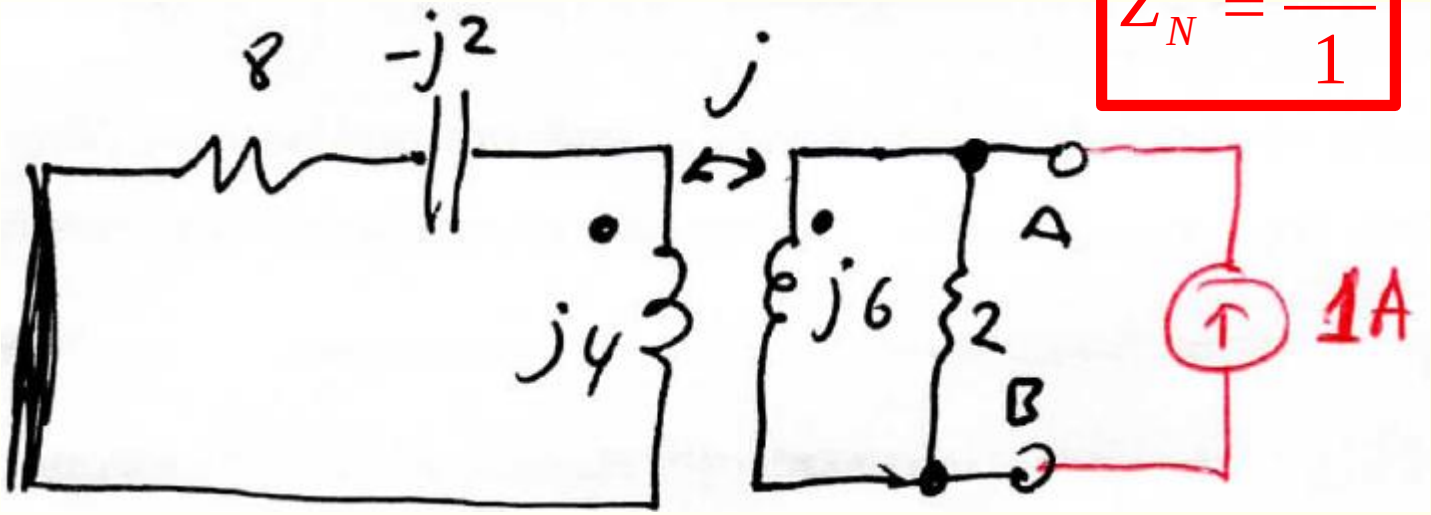
- Τελικά:

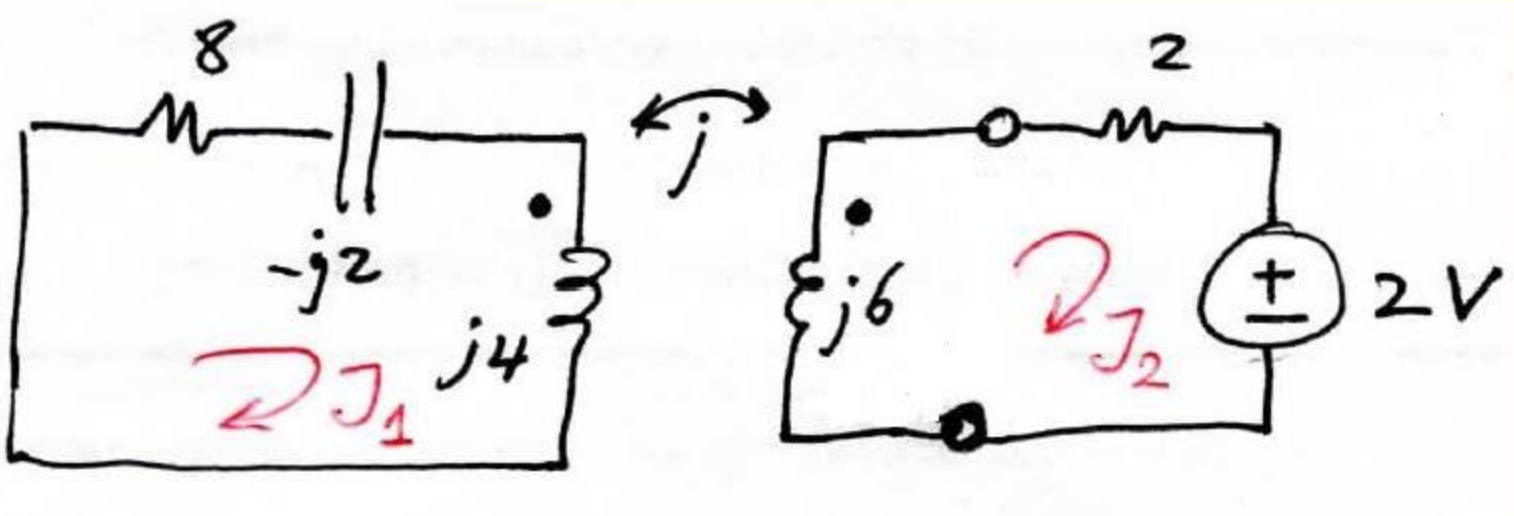
$$I_N=I_2=\frac{80}{48+j11}=1,569-j0,392=1,6246\angle -12.91°$$

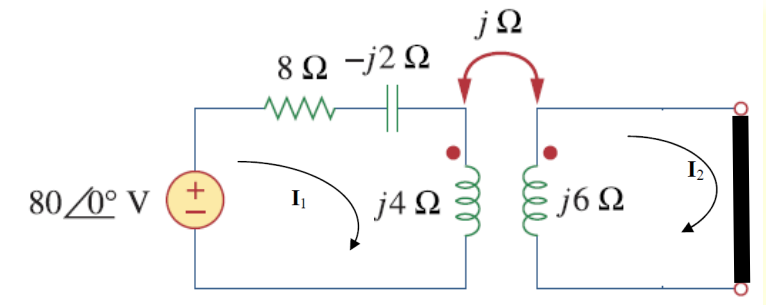
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Για την εμπέδηση:

$$Z_N = \frac{V_{ab}}{1}$$







$$(8+j2)J_1 - jJ_2 = 0$$

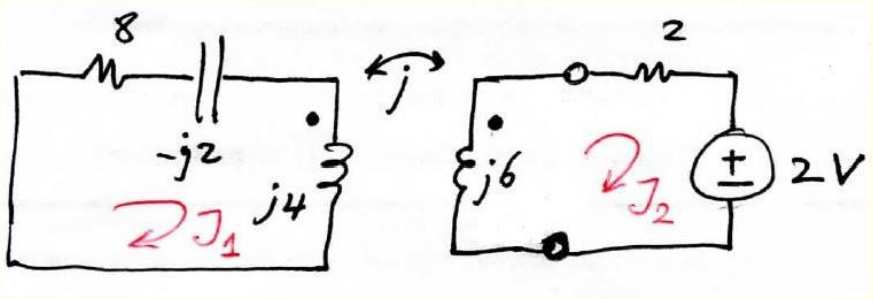
$$2+(2+j6)J_2 - jJ_1 = 0$$

$$\Rightarrow J_1 = \frac{jJ_2}{8+j2}$$

$$\Rightarrow J_1 = -0,038 - j0,0037$$

$$J_2 = -0,1055 + j0,2975$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



- Για την εμπέδηση:

$$V_{ab} = -\left(j6J_2 - jJ_1 \right) = 1,7889 + j0,5951$$

$$Z_N = \frac{V_{ab}}{1} = 1,7889 + j0,5951 = 1,885\angle 18,4°$$

- Τελικά:

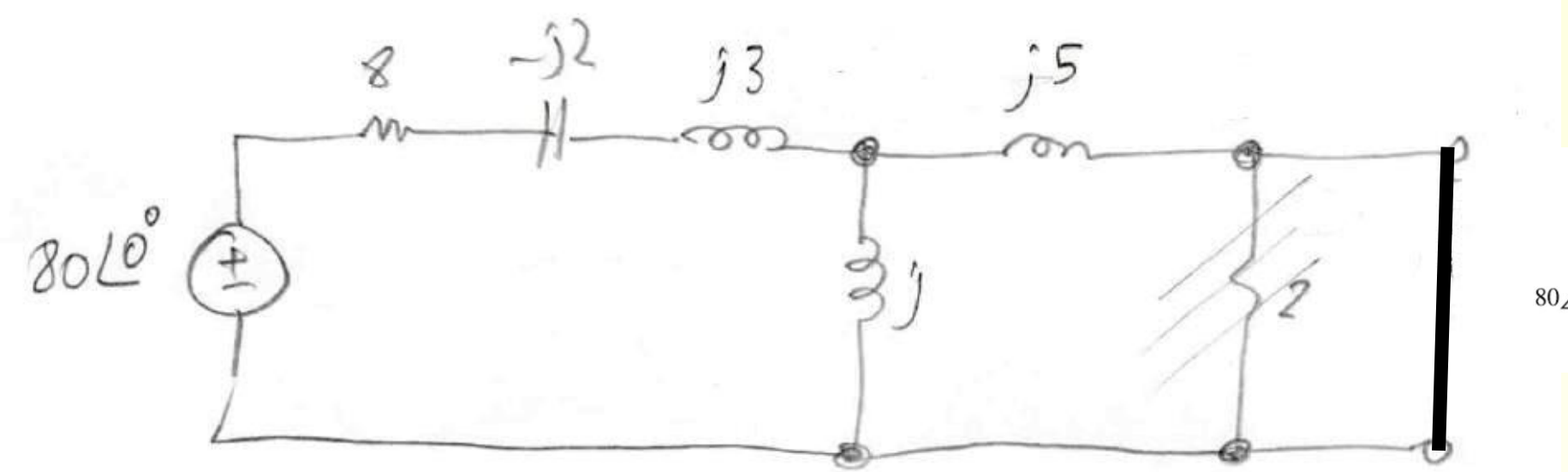
$$I_N = 1,6246\angle -12,91° \text{ A}$$

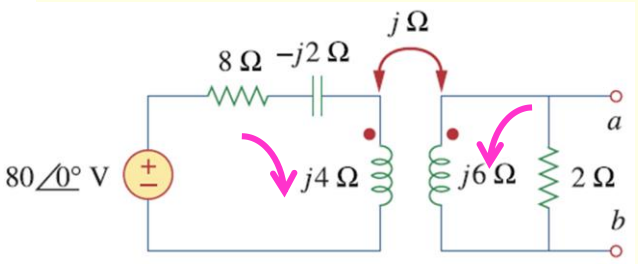
$$Z_N = 1,885\angle 18,4° \ \Omega$$

2β

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Το ίδιο πρόβλημα με χρήση ισοδύναμου αστέρα:





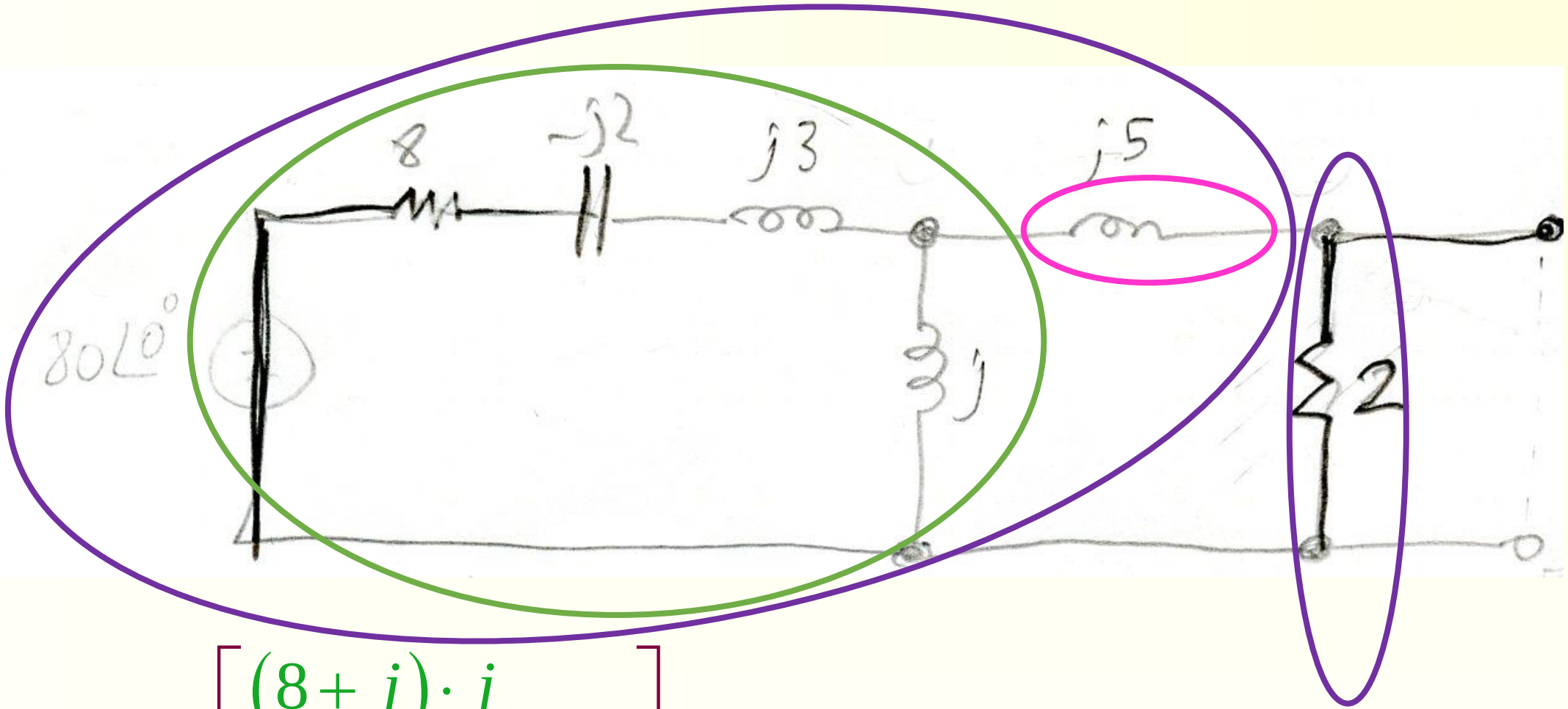
$$Z_{ολική} = \frac{j5 \cdot j}{j6} + j + 8 = 8 + j1,833$$

$$I_0 = \frac{80}{8 + j1,833} = 9,5 - j2,18$$

$$\Rightarrow I_N = \frac{j}{j6} I_0 = 1,584 - j0,363$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Το ίδιο πρόβλημα με χρήση ισοδύναμου αστέρα:

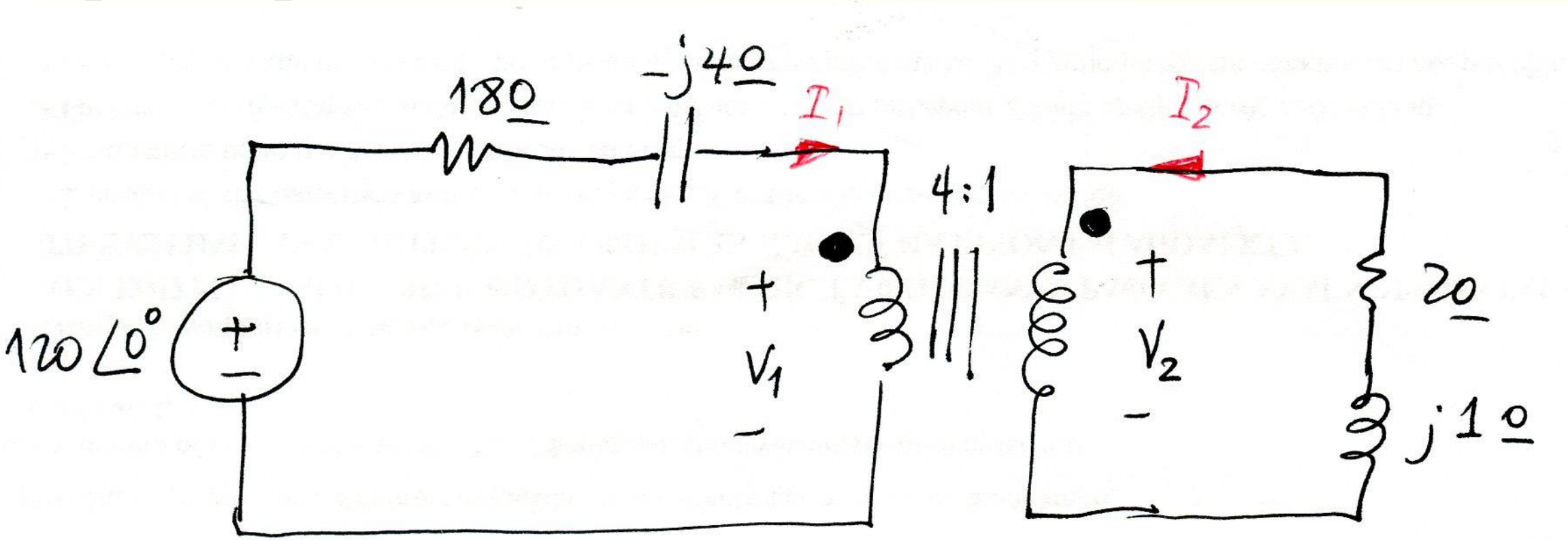


$$Z_N = \left[\frac{(8+j)\cdot j}{8+2j} + j5 \right] \| \, 2 = 1,7889 + j0,5951 = 1,885 \angle 18,4°$$

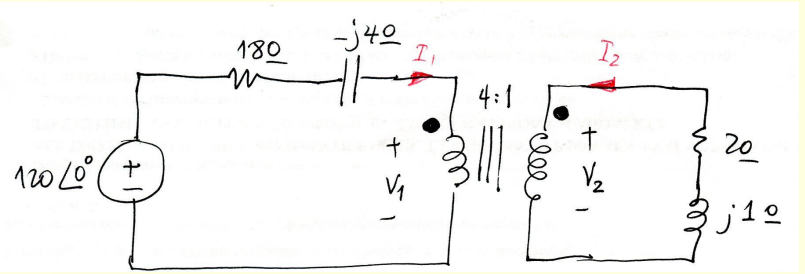
3

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Υπολογίστε τα ρεύματα I_1 και I_2 καθώς και τις τάσεις V_1 και V_2 στο κύκλωμα:



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



- Για τον ιδανικό μετ/τή ισχύει ότι:

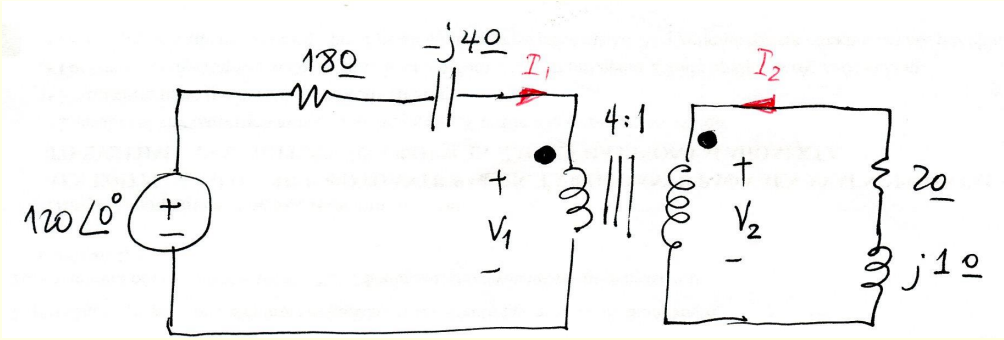
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = 4 \qquad \frac{I_1}{I_2} = -\frac{n_2}{n_1} = -\frac{1}{4}$$

- Επίσης:

$$I_2 = \frac{-V_2}{2+j} = \frac{\frac{-V_1}{4}}{2+j} = \frac{-V_1}{4(2+j)}$$

$$I_1 = -\frac{1}{4} I_2 = \frac{V_1}{16(2+j)}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



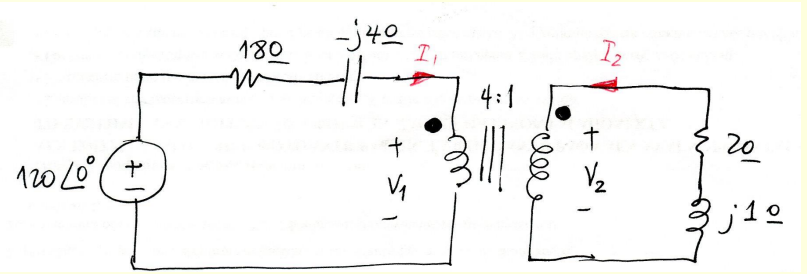
$$V_s(j\omega) = (18 - j4)I_1 + V_1 = (18 - j4)\frac{V_1}{16(2 + j)} + V_1 \Rightarrow$$

$$V_s(j\omega) = V_1(j\omega)\frac{18 - j4 + 32 + j16}{16(2 + j)} \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{V_s\, 16(2 + j)}{50 + j12} = V_s\frac{16\sqrt{5}\angle 26,56°}{51,419\angle 13,49°} \Rightarrow$$

$$V_1 = 83,49\angle 13,07°\ \text{V}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



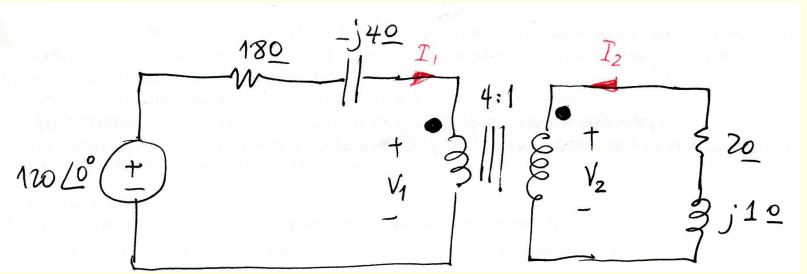
Οπότε:

$$V_2 = \frac{V_1}{4} \Rightarrow V_2 = 20,87\angle 13,07°$$

$$I_1 = \frac{V_1}{16(2+j)} \Rightarrow I_1 = 2,33\angle -13,49° \text{ A}$$

$$I_2 = -4I_1 \Rightarrow I_2 = 9,32\angle 166,51° \text{ A}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



Εναλλακτικά, με ανάκλαση:

$$\frac{V_1}{I_1} = Z_{in} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 Z_L = 16(2+j)$$

$$\Rightarrow$$

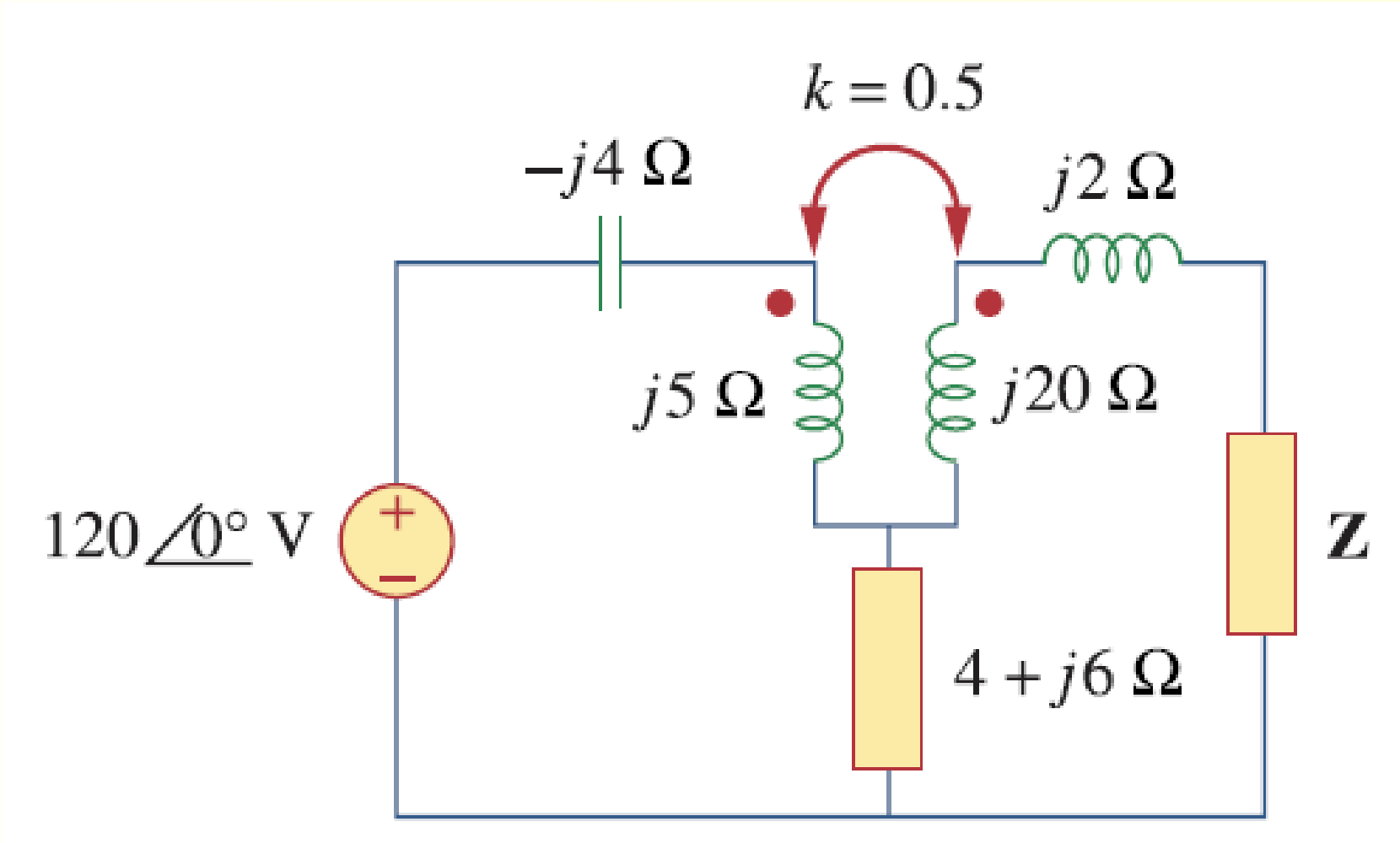
$$I_1 = \frac{V_s}{18 - 4j + 16(2+j)_1} = 2,33\angle -13,49^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = -4I_1 \Rightarrow I_2 = 9,32\angle 166,51^\circ \text{ A}$$

4

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

Να βρεθεί το ισοδύναμο Thevenin που «βλέπει» το φορτίο $\mathbf{Z}$



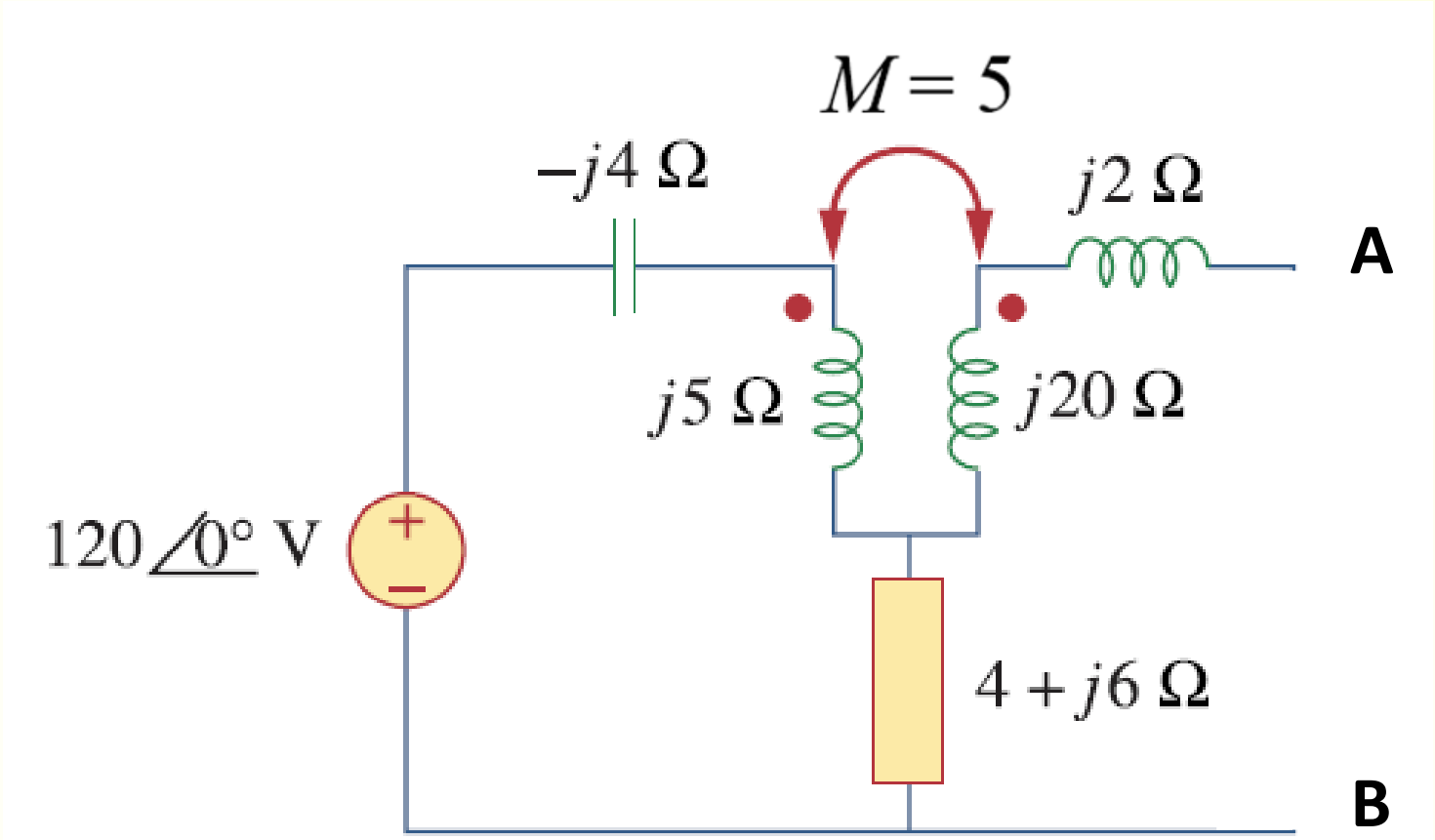
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Πριν από οτιδήποτε άλλο υπολογίζουμε τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής *M* από τον συντελεστή σύζευξης *k* (θεωρώντας ότι $\omega = 1$):

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \Rightarrow 0,5 = \frac{M}{\sqrt{5 \cdot 20}} \Rightarrow M = 5$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Η τάση Thevenin είναι η τάση στο ανοιχτοκυκλωμένο δευτερεύον (χωρίς το φορτίο **Z**)

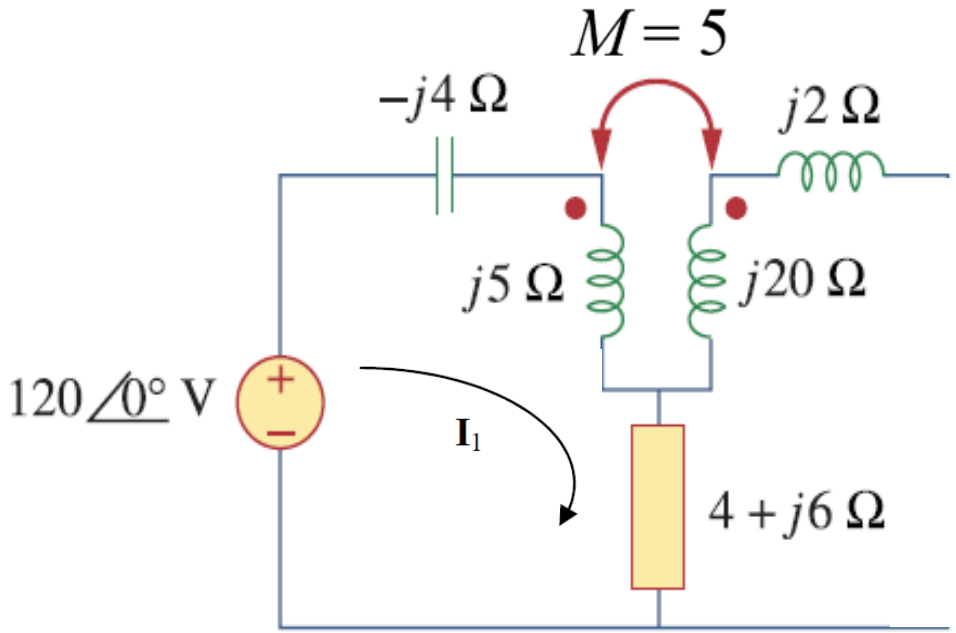


ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Για την ανοιχτοκυκλωμένη τάση αρχίζουμε με το ρεύμα στο πρωτεύον

$$-120 - j4I_1 + j5I_1 + 0 + (4 + j6)I_1 = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{120}{4 + j7} = 7,385 - j12,923$$



- Τότε, η τάση στο δευτερεύον θα είναι:

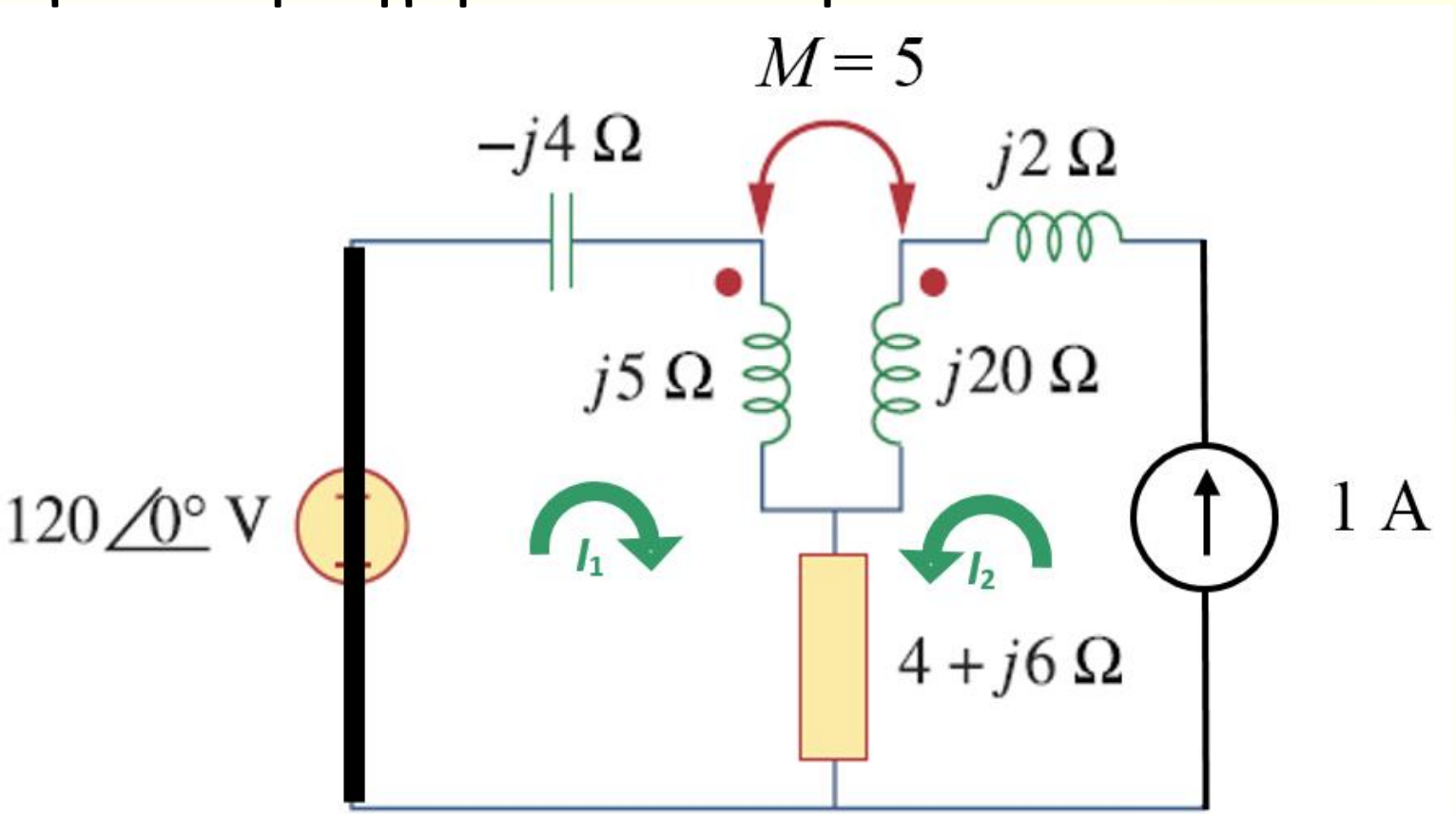
$$V_{Th} \overset{M}{=} j5I_1 + (4 + j6)I_1 = (4 + j11)I_1 =$$

$$= (4 + j11)(7,39 - j12,92) = 171,69 + j29,54$$

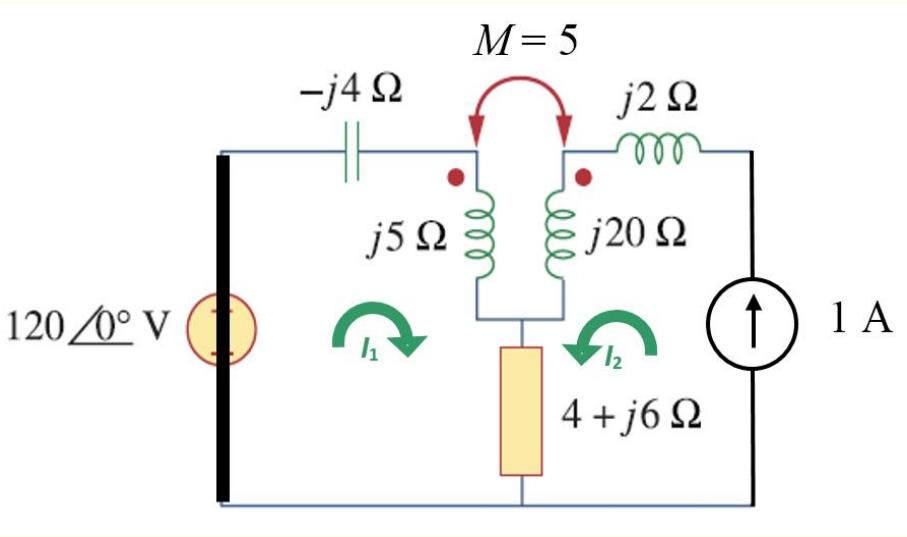
$$= 174,2\angle 9,8°$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Για τη σύνθετη αντίσταση Thevenin, είτε
- (1) βραχυκυκλώνουμε το δευτερεύον ή
- (2) εξουδετερώνουμε τις ανεξάρτητες πηγές και συνδέουμε μια γνωστή πηγή στο δευτερεύον



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



- Για το (2) επιλύουμε:

$$-j4I_1 + j5I_1 + \overset{M}{j5\cdot 1} + (4+j6)(I_1+1) = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 = -1,431 - j0,246$$

- οπότε

$$V_{AB} = j2\cdot 1 + j20\cdot 1 + \overset{M}{j5I_1} + (4+j6)(I_1+1)$$

$$= 4 + j28 + (4+j11)I_1$$

$$= 4 + j28 + (4+j11)(-1,431 - j0,246)$$

$$= 0,985 + j11,277$$

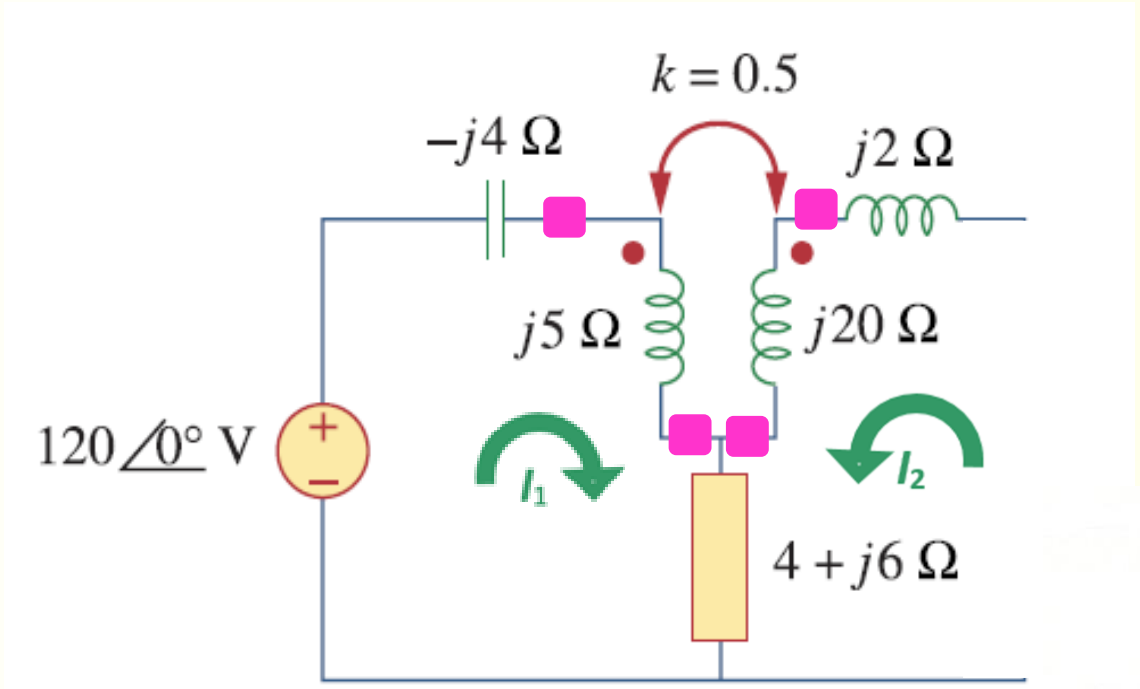
$$= 11,32\angle 85°$$

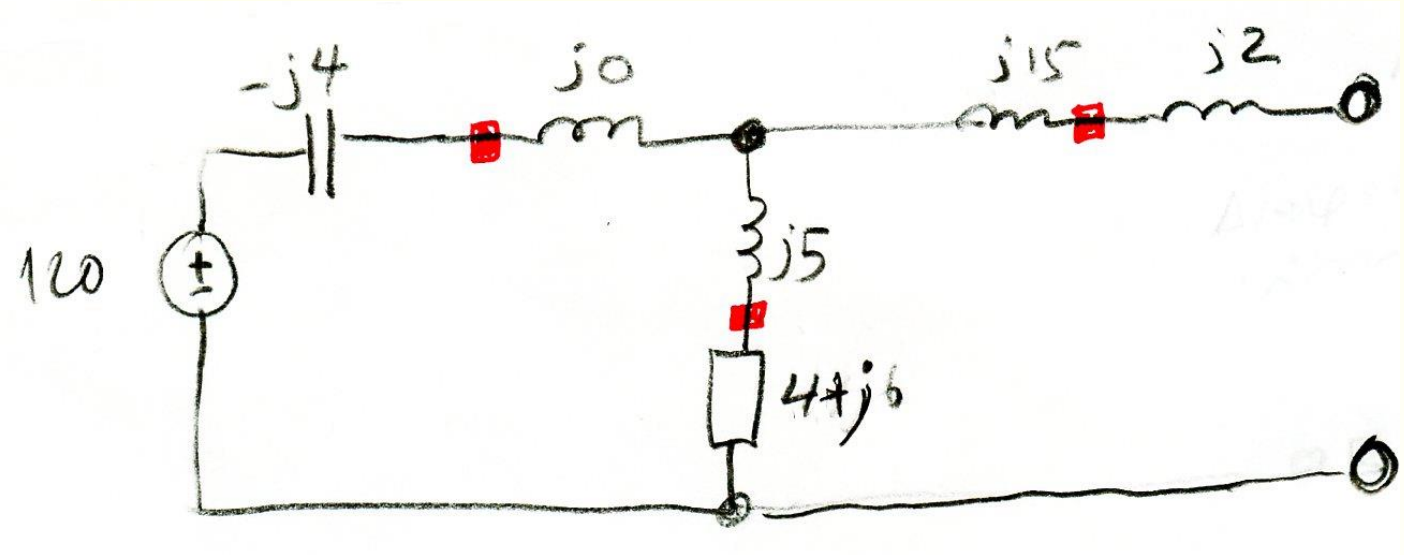
$$V_{Th} = 174,2\angle 9,8°$$

$$Z_{Th} = \frac{V_{AB}}{1} = 11,32\angle 85°$$

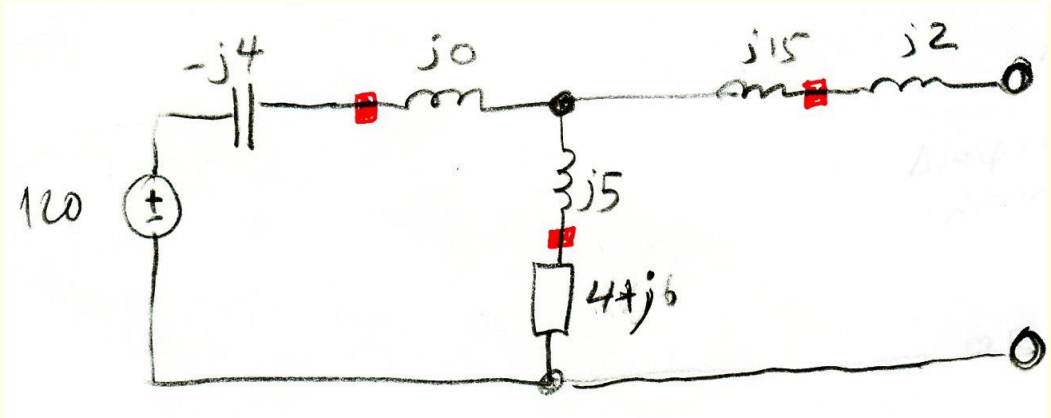
ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ:

- Χρησιμοποιώντας το ισοδύναμο αστέρα θα έχουμε





ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ:



- Τότε, θα έχουμε για την τάση Thevenin:

$$V_{AB} = \frac{4 + j11}{4 + j7} 120 = 174,2\angle 9,8°$$

ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΤΑΣΗΣ

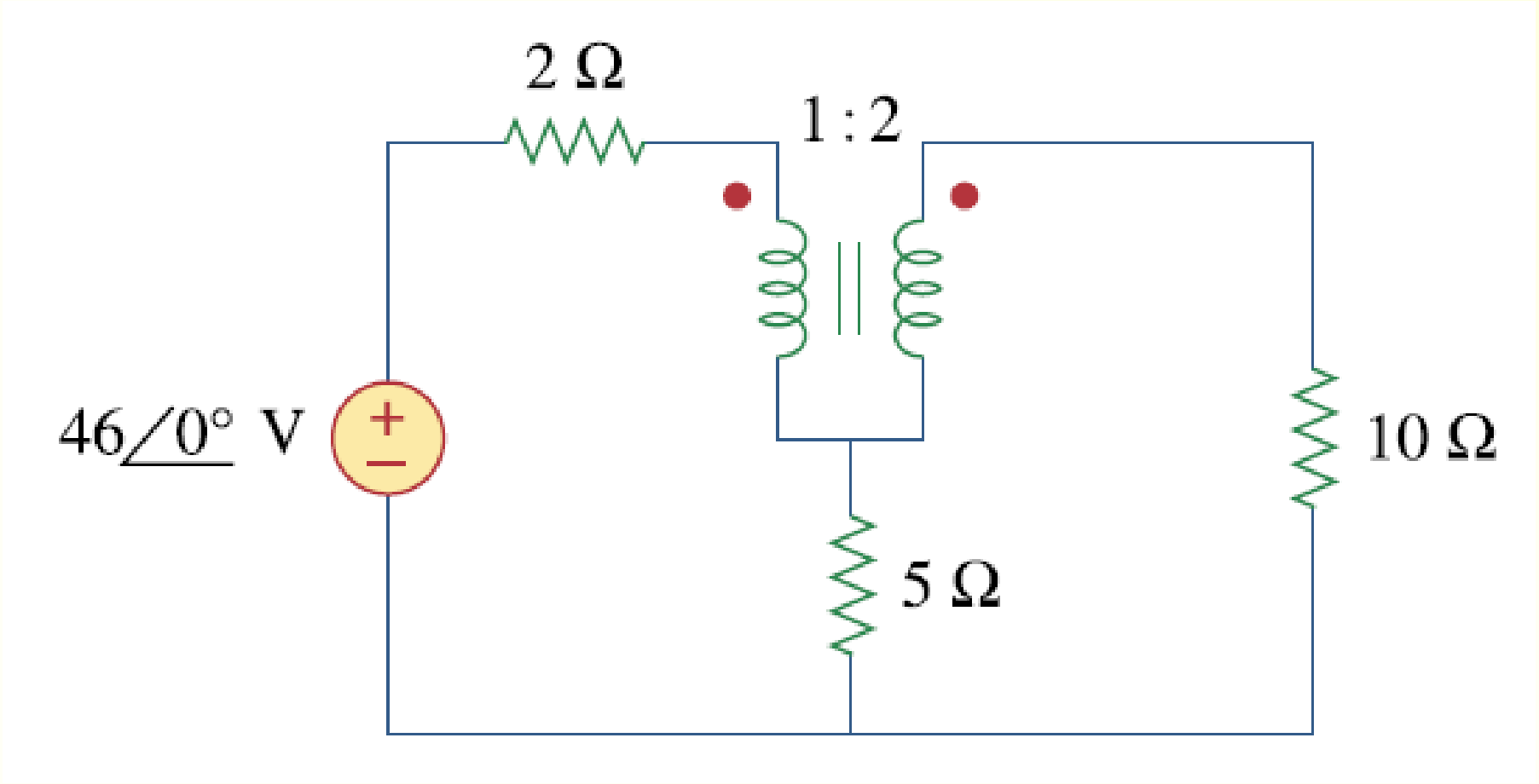
- και για τη σύνθετη αντίσταση Thevenin :

$$Z_{Th} = \left[(-j4) \| (4 + j11) \right] + j15 + j2 = 11,32\angle 85°$$

5

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

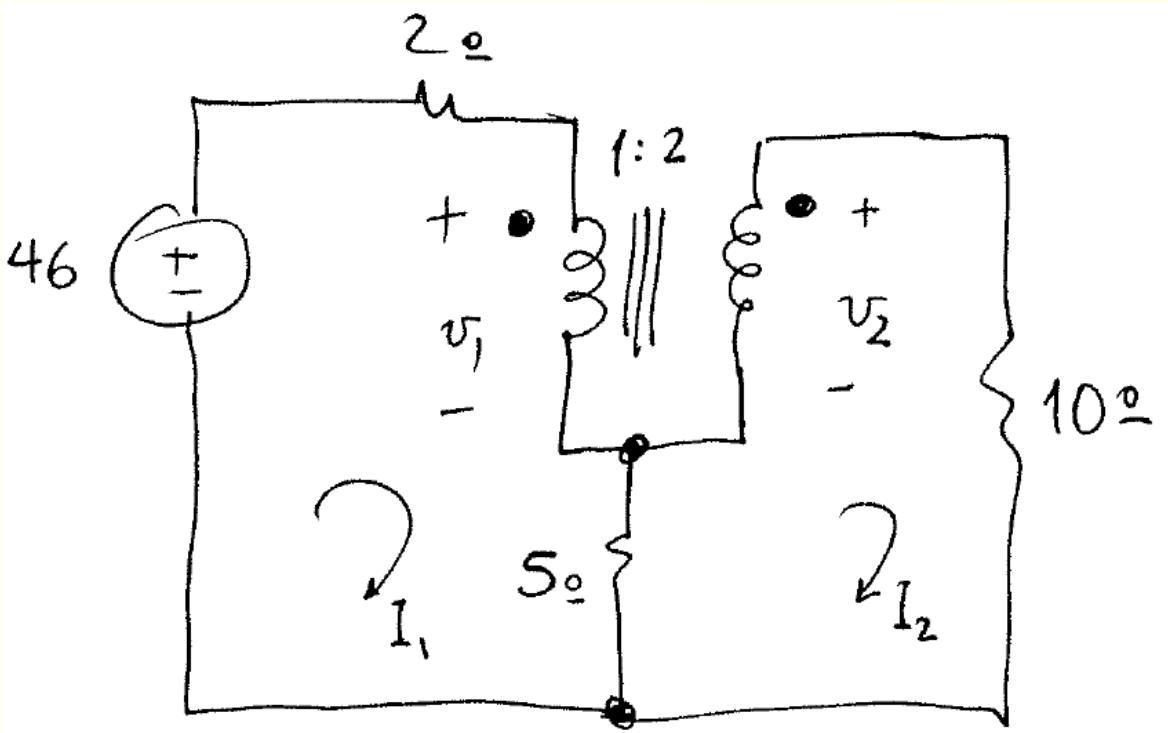
- Να βρεθεί το ρεύμα στην αντίσταση των 10 Ω



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- **Βεβαιωνόμαστε ότι τα κλαδικά ρεύματα του ιδανικού μετασχηματιστή έχουν μπει στις βασικές σχέσεις**

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{I_1}{I_2} = 2$$



$$-46 + 2I_1 + v_1 + 5(I_1 - I_2) = 0$$

$$5(I_2 - I_1) - v_2 + 10I_2 = 0$$

$$46 = 9I_2 + v_1$$

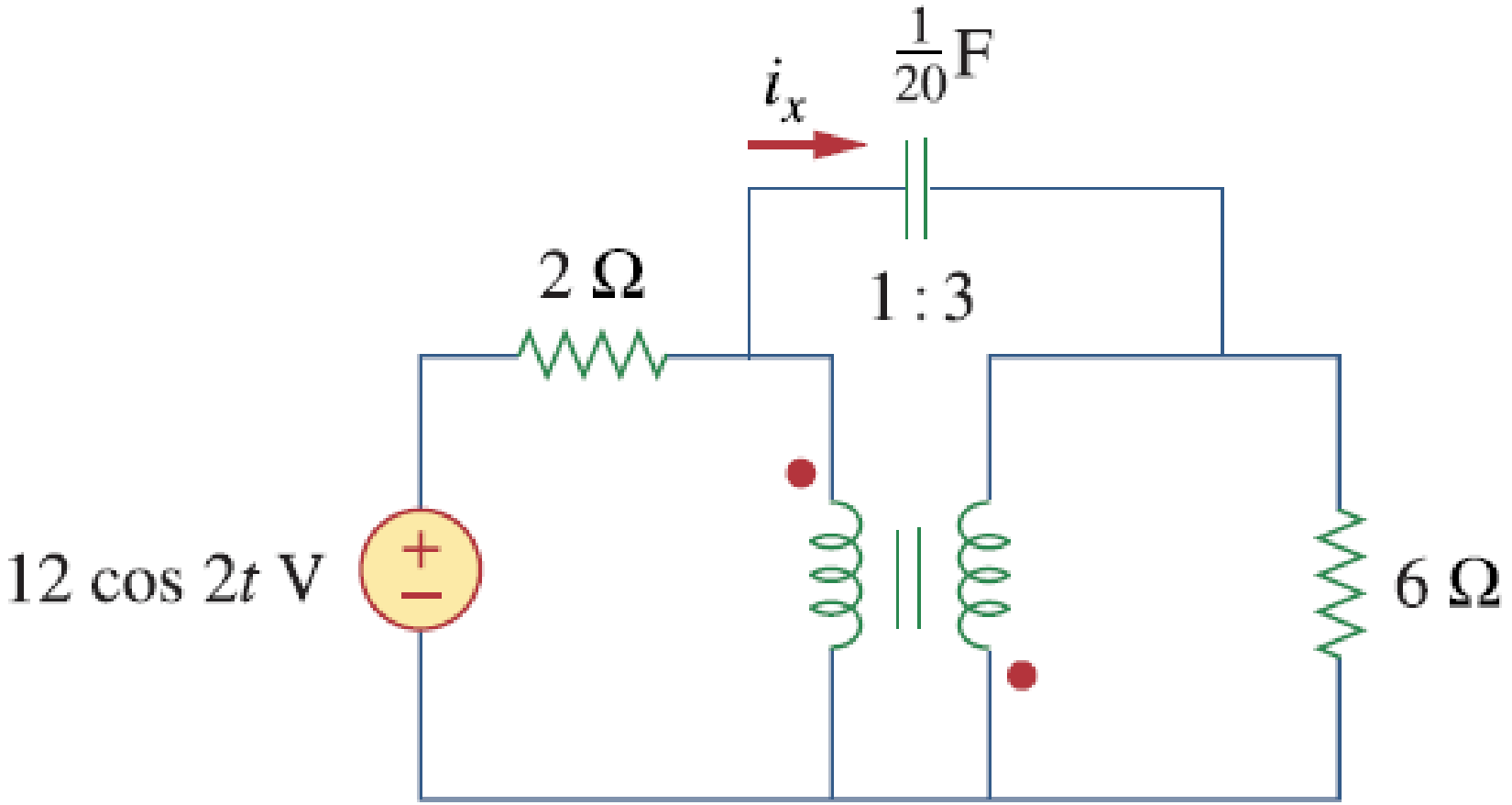
$$2v_1 = 15I_2 - 10I_2 = 5I_2 \Rightarrow$$

$$I_2 = 4$$

6

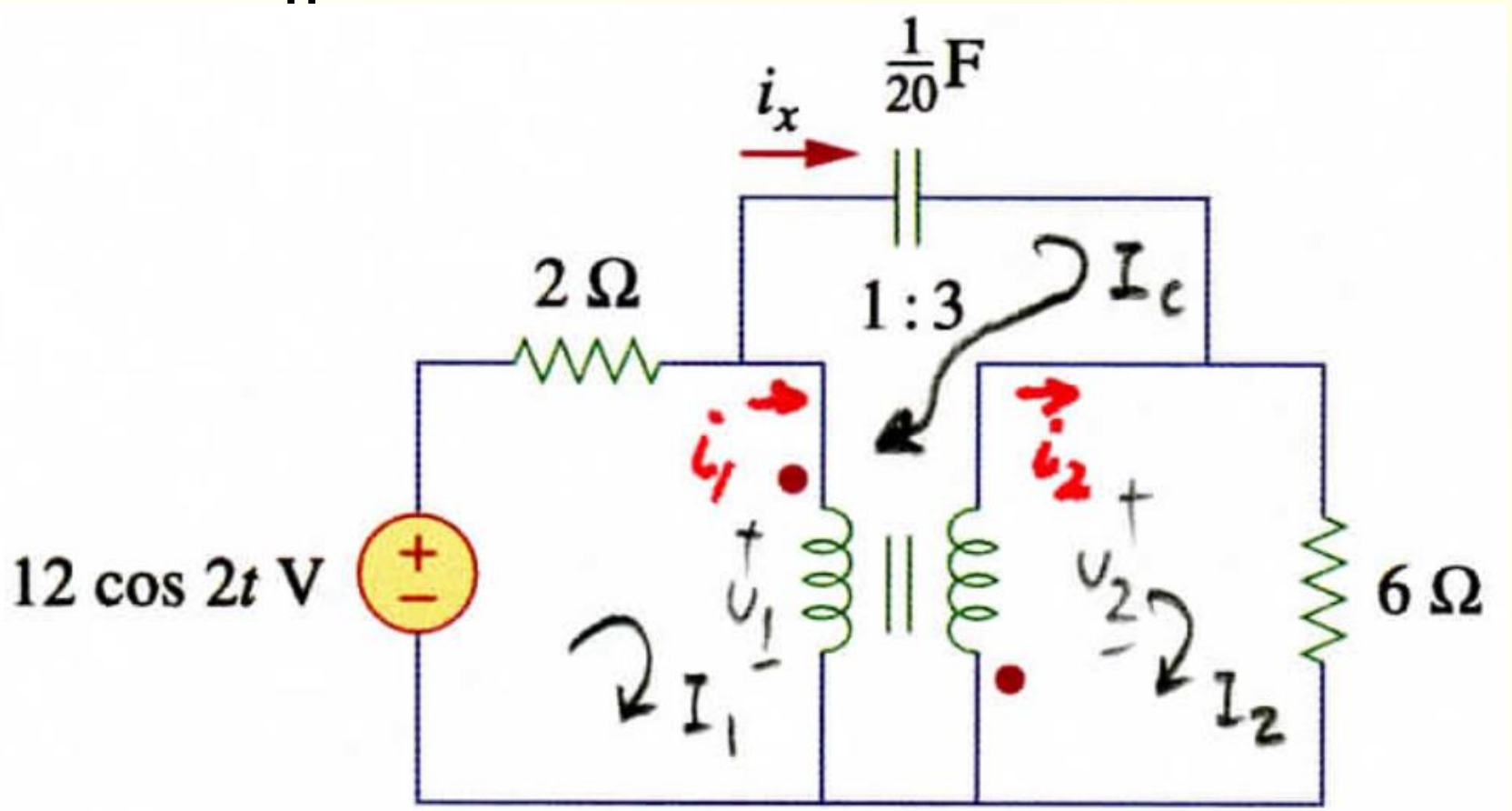
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Να βρεθεί το ρεύμα i_x

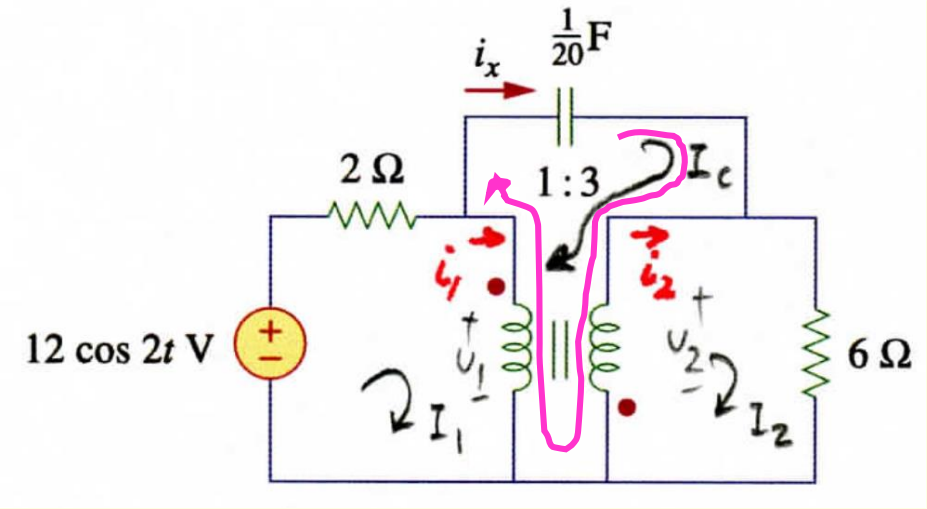


ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Η λογική προσέγγιση είναι οι κομβικές τάσεις
- Θα χρησιμοποιήσουμε όμως βροχικές εντάσεις για να δούμε κάτι σημαντικό



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



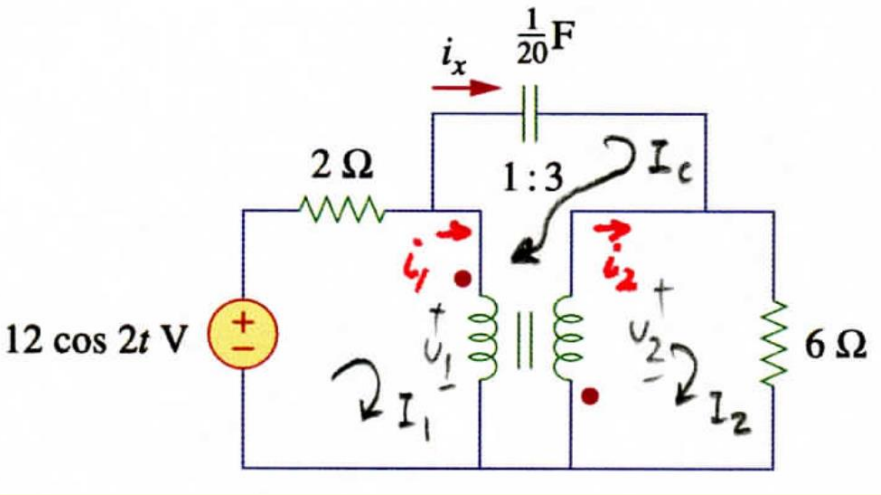
- Βασικό λάθος:

$$\frac{I_1}{I_2} = -3$$

- Τα I_1 και I_2 **δεν είναι** τα (κλαδικά) ρεύματα που διαρρέουν τον ιδανικό μετασχηματιστή
- Η σωστή σχέση:

$$\frac{I_1 - I_C}{I_2 - I_C} = \frac{i_1}{i_2} = -3$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



- Επίλυση:

$$2I_1 + v_1 = 12\angle 0°$$

$$v_2 = 6I_2$$

$$-j10I_C + v_2 - v_1 = 0$$

$$v_2 = -3v_1$$

$$i_2 = -\frac{1}{3}i_1$$

$$i_1 = I_1 - I_C$$

$$i_2 = I_2 - I_C$$

$$2I_1 + v_1 = 12$$

$$-3v_1 = 6I_2$$

$$-j10I_C + v_2 - v_1 = 0$$

$$6I_1 - 6I_2 = 36$$

$$8I_1 - j10I_C = 48$$

$$I_1 + 3I_2 - 4I_C = 0$$

$$i_x = I_C = 0,59 + j0,732 = 0,937\angle 51,34°$$

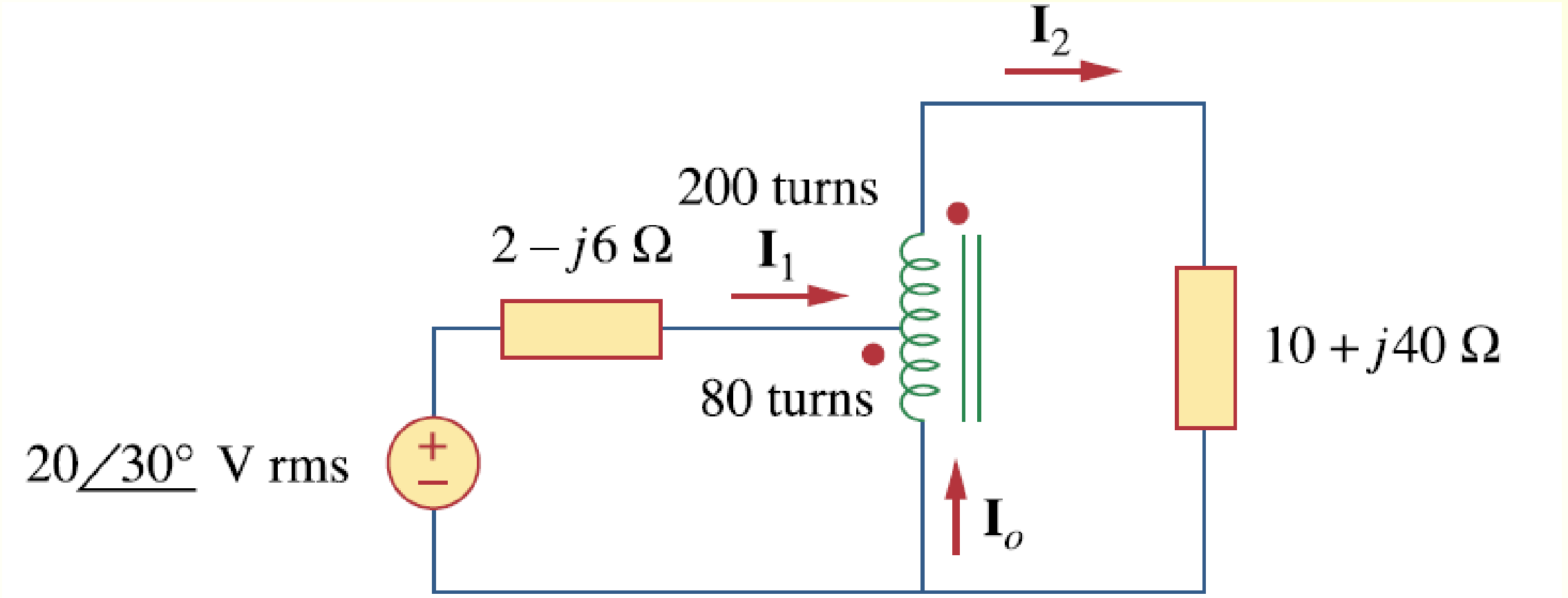
$$I_1 = 5,09 + j0,73$$

$$I_2 = 0,92 + j0,73$$

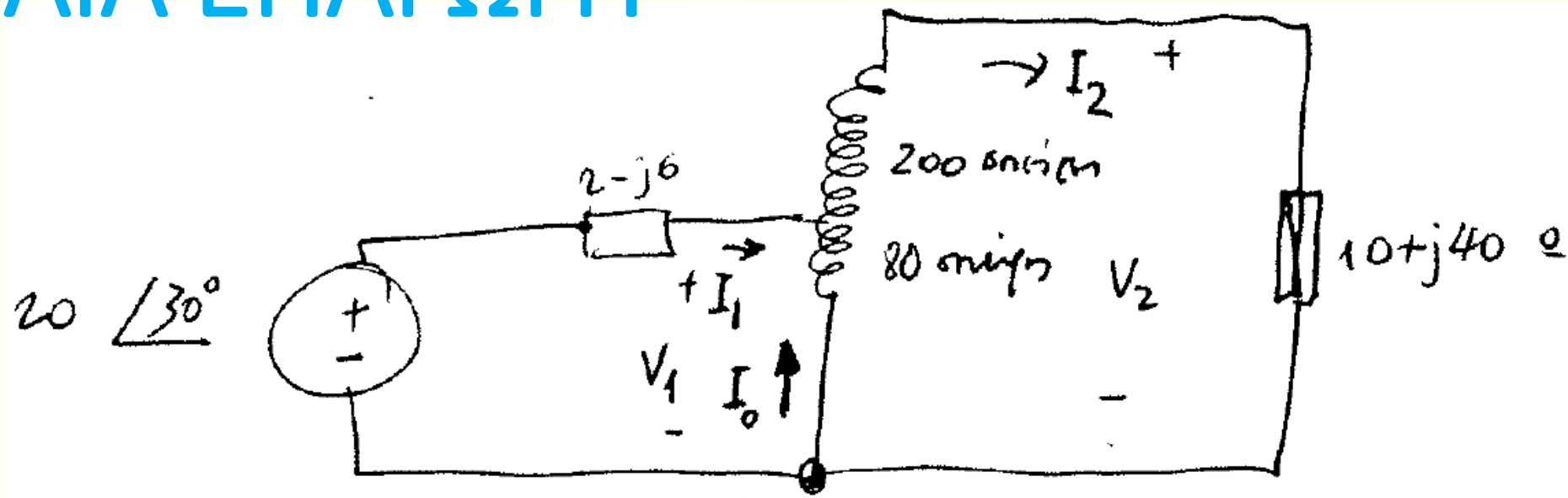
7

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Να υπολογιστούν τα ρεύματα $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



- Εξισώσεις αυτομετασχηματιστή

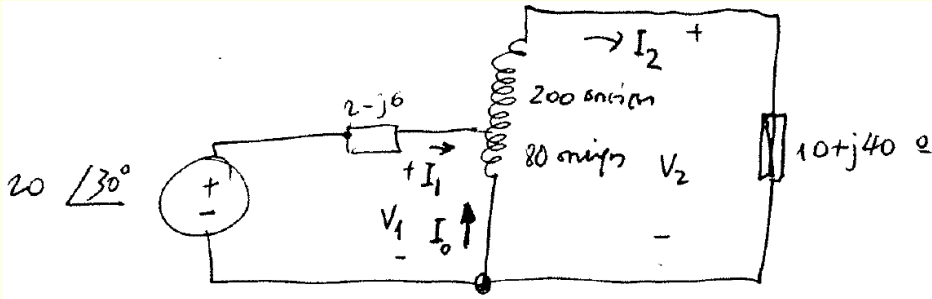
$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{80}{280} = \frac{2}{7} \Rightarrow \mathbf{V}_2 = 3{,}5\mathbf{V}_1$$

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \mathbf{I}_2 = \frac{2}{7}\mathbf{I}_1$$

$$20\angle 30° = (2 - j6)\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = (10 + j40)\mathbf{I}_2$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



- Συνδυάζοντας:

$$3,5\mathbf{V_1} = (10 + j40)\frac{2\mathbf{I_1}}{7} \Rightarrow \mathbf{V_1} = (10 + j40)\frac{4\mathbf{I_1}}{49}$$

- Και

$$20\angle 30° = (2 - j6)\mathbf{I_1} + (10 + j40)\frac{4\mathbf{I_1}}{49} = (2,82 - j2,74)\mathbf{I}_1 \Rightarrow$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{20\angle 30°}{2,82 - j2,74} = 5,095\angle 74,16°$$

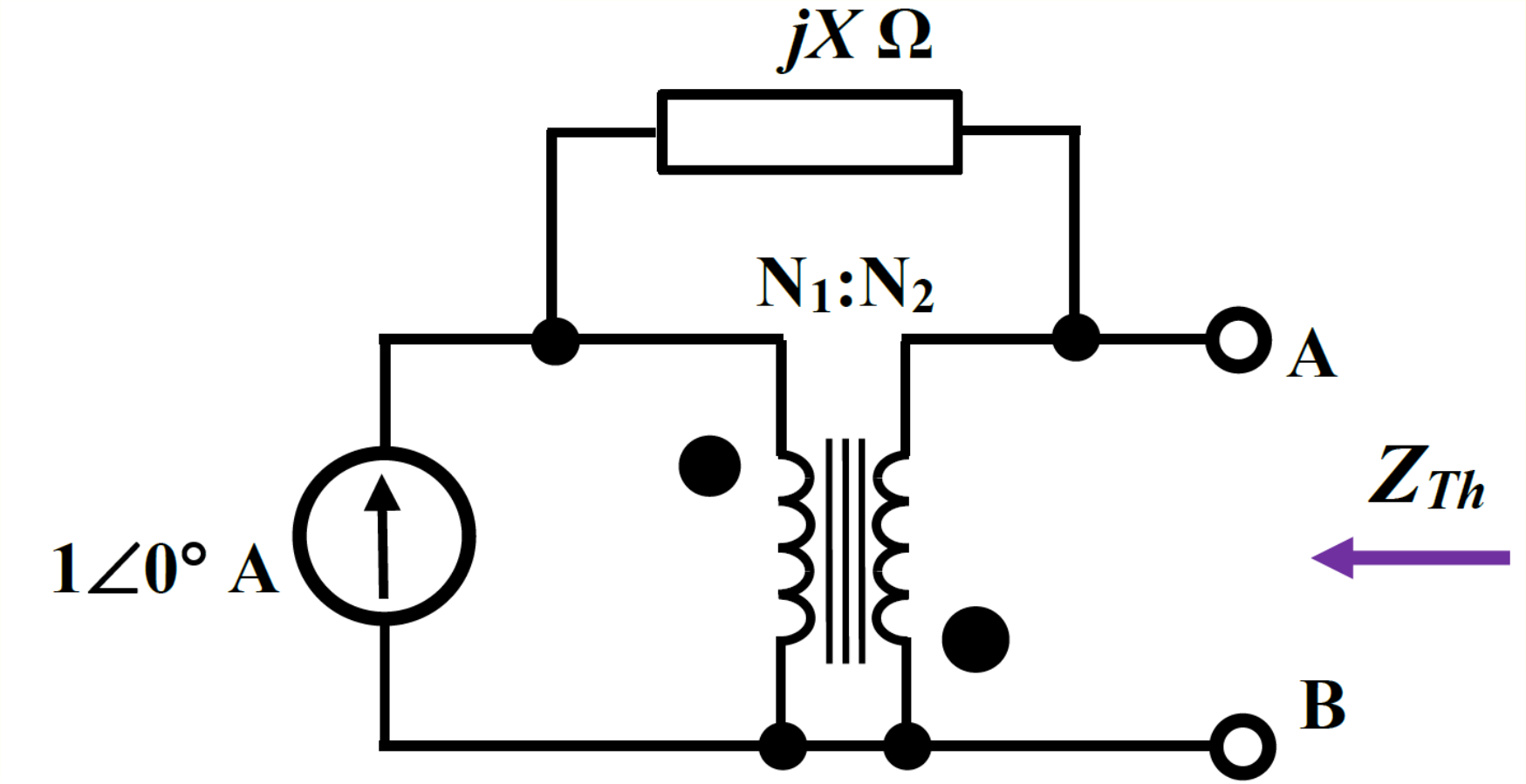
$$\mathbf{I}_2 = \frac{2}{7}\mathbf{I}_1 \Rightarrow \mathbf{I}_2 = 1,456\angle 74,16°$$

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1\left(\frac{2}{7} - 1\right) = 3,64\angle 105,84°$$

8

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Υπολογίστε τη σύνθετη αντίσταση Thevenin Z_{Th} από τα σημεία Α και Β

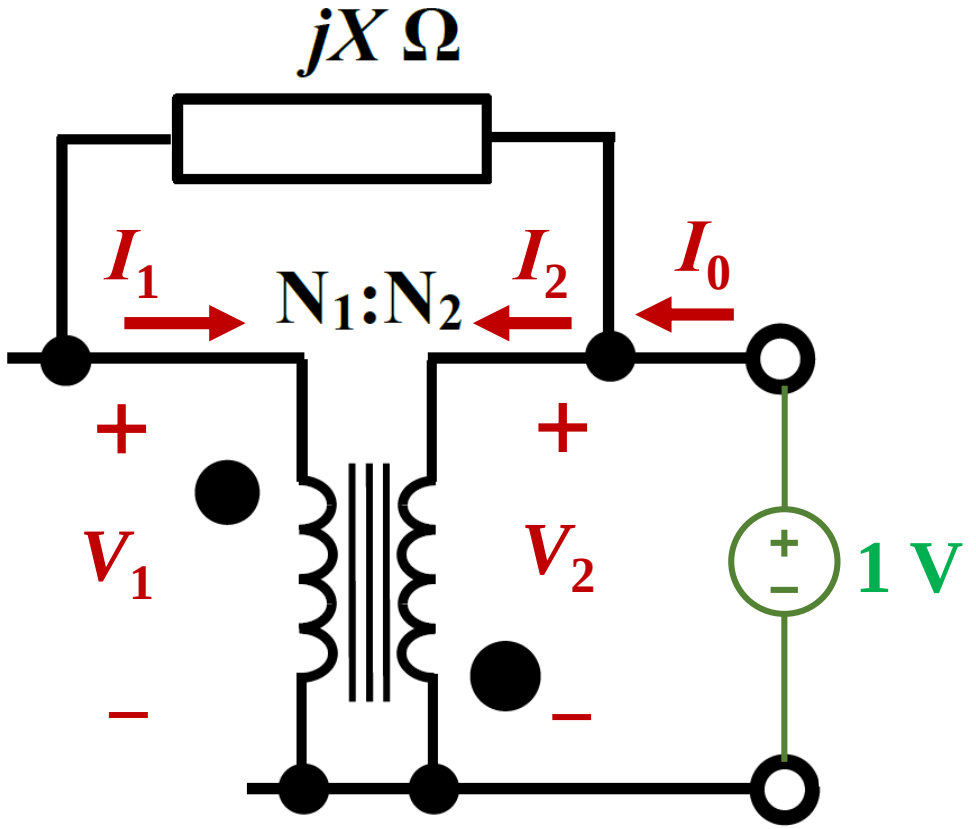


8α

«Τέχνασμα»

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Εξουδετέρωση ανεξάρτητων πηγών και εισαγωγή γνωστής πηγής



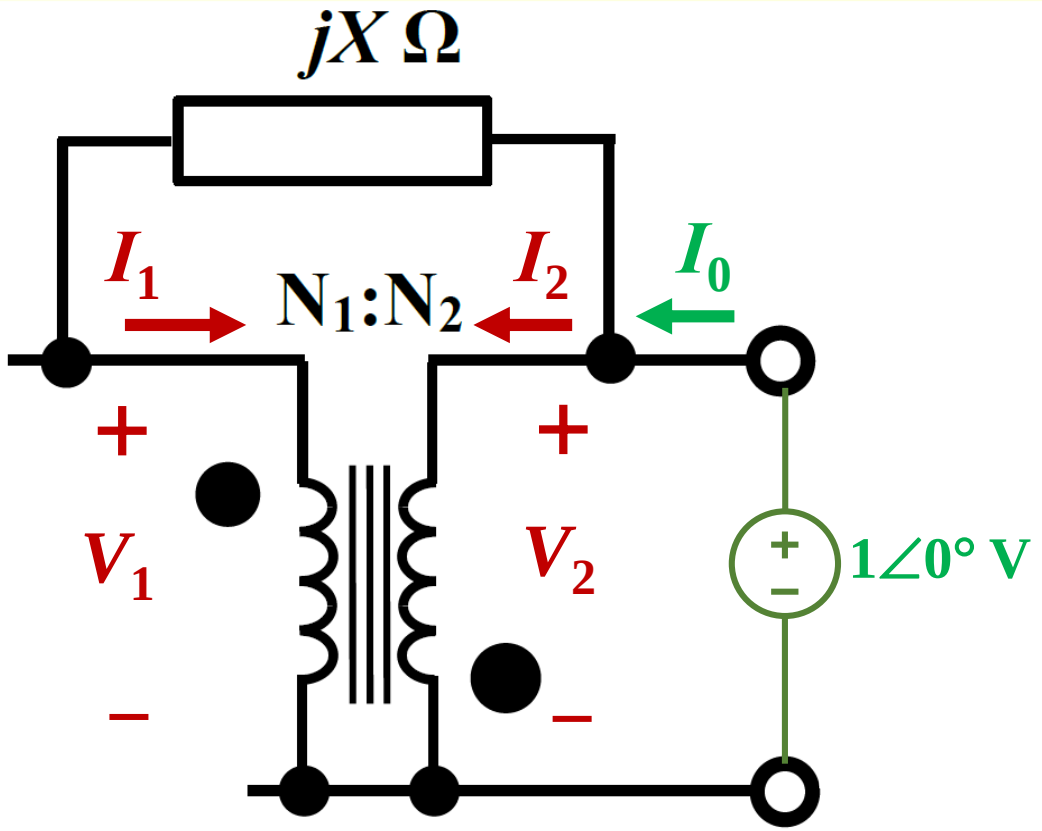
$$\frac{V_1}{V_2} = -\frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = +\frac{N_2}{N_1}$$

Ας πάρουμε $X = 9$, $N_1 = 1$ και $N_2 = 2$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

$X = 9,\ N_1 = 1,\ N_2 = 2$



- Θα έχουμε:

$$\frac{V_1}{V_2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{I_1}{I_2} = +\frac{2}{1}$$

$$I_0 = I_1 + I_2$$

$$-1 + j9\,I_1 + V_1 = 0$$

- Οπότε,

$$-1 + j9\,I_1 - \frac{V_2}{2} = 0 \Rightarrow -1 + j9\,I_1 - 0,5\angle 0° = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{1,5\angle 0°}{j9} = -j0,1667$$

- και

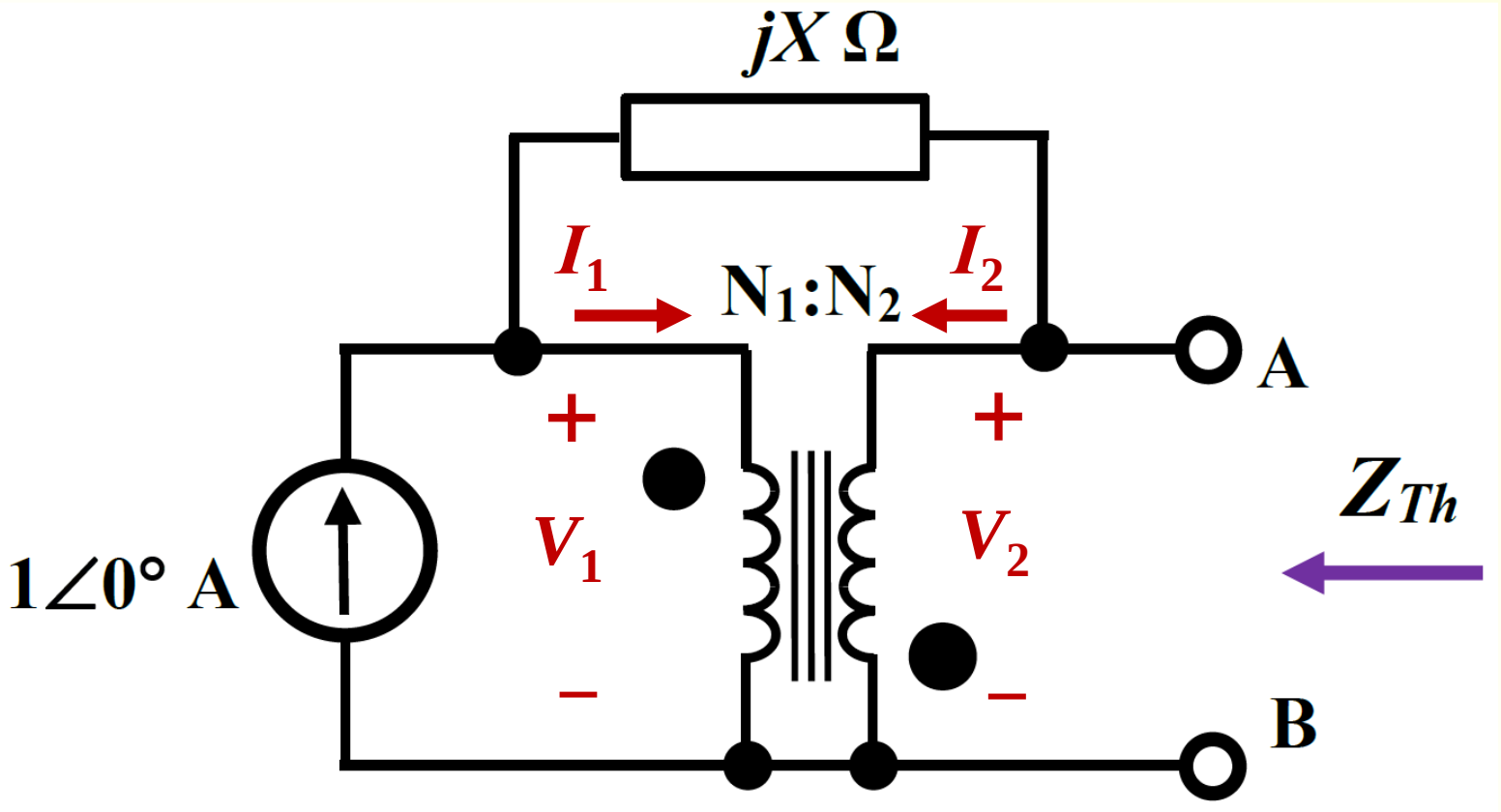
$$I_0 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_0 = 1,5I_1 = 1,5\left(-j0,1667\right) = -j0,25 \Rightarrow Z_{Th} = \frac{1}{-j0,25} = j4\ \Omega$$

8β

Κλασικός τρόπος

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

- Ας καταγράψουμε τις σχέσεις για τον ιδανικό Μ/Τ



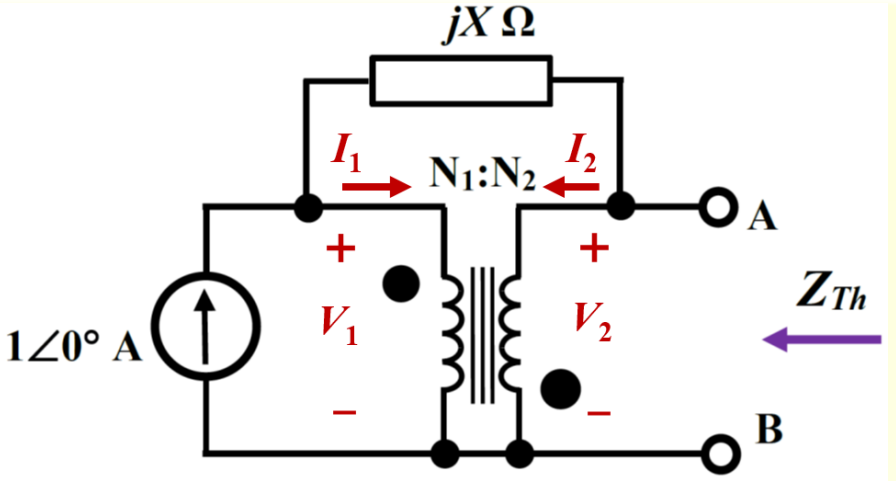
$$\frac{V_1}{V_2} = -\frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = +\frac{N_2}{N_1}$$

Ας πάρουμε $X = 9$, $N_1 = 1$ και $N_2 = 2$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΑΝΟΙΧΤΟΚΥΚΛΩΜΕΝΗ ΤΑΣΗ



- Θα έχουμε: $-\boldsymbol{V}_1 + j9\,\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{V}_2 = 0$

$$1\angle 0° = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2$$

- και

$$-\boldsymbol{V}_1 + j9\,\boldsymbol{I}_2 - 2\boldsymbol{V}_1 = 0$$

$$1\angle 0° = 2\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{I}_2$$

$$-3\boldsymbol{V}_1 + j9\,\boldsymbol{I}_2 = 0$$

$$1\angle 0° = 3\boldsymbol{I}_2$$

$$\boldsymbol{V}_1 = j3\,\boldsymbol{I}_2$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{1\angle 0°}{3}$$

$X = 9,\ N_1 = 1,\ N_2 = 2$

$$\frac{V_1}{V_2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{I_1}{I_2} = +2$$

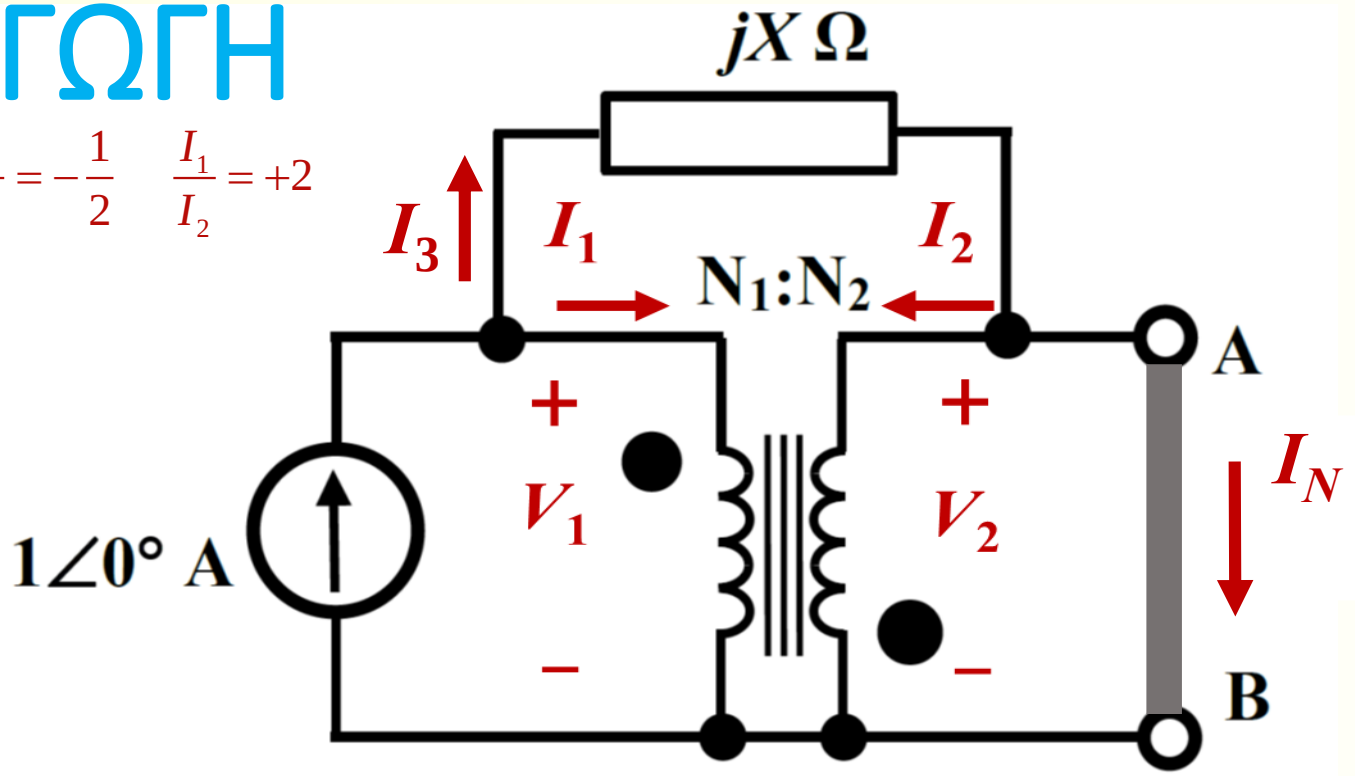
$$\boldsymbol{V}_1 = j \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V}_2 = -j2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{V}_{AB} = -j2}$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΒΡΑΧΥΚΥΚΛΩΜΕΝΑ ΑΒ

$\frac{V_1}{V_2} = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{I_1}{I_2} = +2$



- Ξεκινάμε από τα σίγουρα:

$$V_2 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 0$$

- και $1\angle 0° = I_1 + I_3$

$$I_3 = I_2 + I_N$$

- Διαπιστώνουμε ότι η τάση στα άκρα τής $j9\ \Omega$ είναι **0**, οπότε:

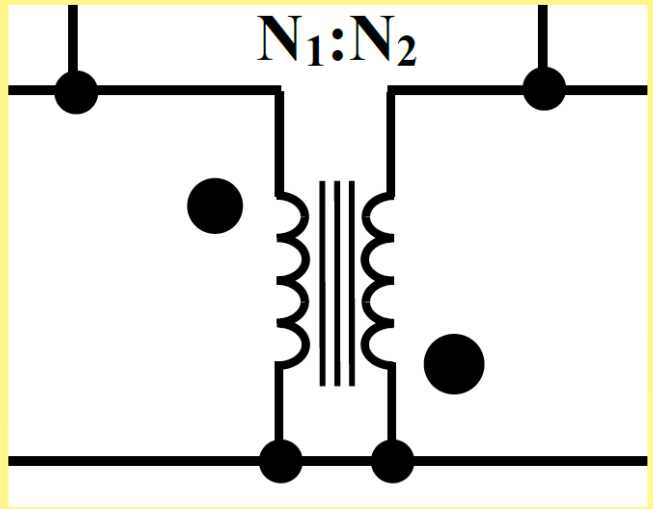
$$I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 1\angle 0° \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{I_1}{2} = \frac{1\angle 0°}{2}$$

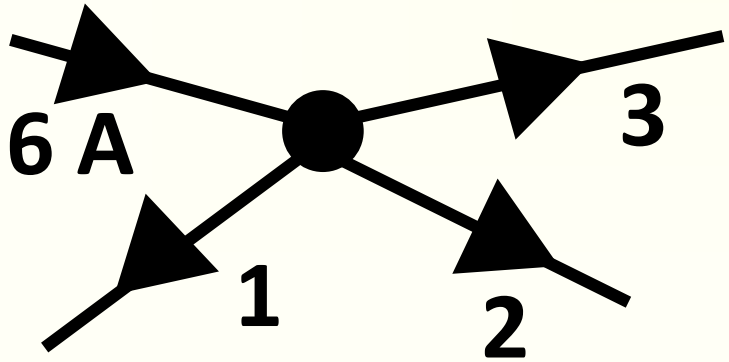
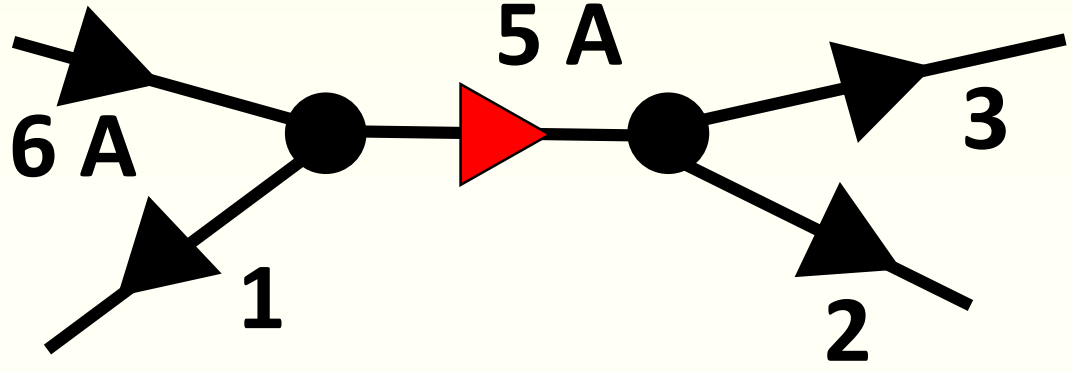
- και

$$I_N = -I_2 \quad \Rightarrow \quad I_N = -\frac{1\angle 0°}{2} \quad \Rightarrow$$

$$Z_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = \frac{-j2}{-\frac{1\angle 0°}{2}} = j4\ \Omega$$

ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ



- Ο **ιδανικός μετασχηματιστής** είναι ένα πολύ απλό στοιχείο
- Μπορεί όμως να παρουσιάσει «ιδιαίτερη» συμπεριφορά (ρεύμα στο βραχυκυκλωμένο δευτερεύον)
- Πάντως, οι εξισώσεις, αν γραφτούν σωστά, θα αποκαλύψουν τι ακριβώς συμβαίνει

- **«Ρεύμα σε βραχυκύκλωμα»**