

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

1

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = (t - 4) u(t - 2)$$

- Ο πρώτος όρος τής συνάρτησης και η «καθυστέρηση» δεν έχουν το ίδιο όρισμα
- Χρειάζεται κάποιος χειρισμός για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας $\mathcal{L}[f(t - a)u(t - a)] = e^{-as} F(s)$

$$f(t) = (t - 4) u(t - 2) = (t - 2) u(t - 2) - 2 u(t - 2)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} e^{-2s} - \frac{2}{s} e^{-2s}$$

1α

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης
 $f(t) = (t-4)u(t-2)$

- Εναλλακτικά:

$$f(t) = (t-4)u(t-2) = t u(t-2) - 4 u(t-2)$$

$$t-2 \triangleq z \Rightarrow t = z+2 \Rightarrow$$

$$(z+2)u(z) = zu(z) + 2u(z) \rightarrow \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} \Rightarrow \quad -4u(t-2) \rightarrow \frac{-4}{s}e^{-2s}$$

$$t u(t-2) \rightarrow \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} \right) e^{-2s}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} e^{-2s} - \frac{2}{s} e^{-2s}$$

1β

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης
 $f(t) = (t-4)u(t-2)$

- Εναλλακτικά, με την ιδιότητα **παραγώγισης συχνότητας**:

$$f(t) = (t-4)u(t-2) = t u(t-2) - 4 u(t-2)$$

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$t u(t-2) \rightarrow -\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{u(t-2)\}$$

$$= -\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-2s}}{s} \right) = -\left(\frac{-1}{s^2} + \frac{-2}{s} \right) e^{-2s}$$

$$-4 u(t-2) \rightarrow \frac{-4}{s} e^{-2s}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} e^{-2s} - \frac{2}{s} e^{-2s}$$

2

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace τής συνάρτησης

$$g(t) = 2e^{-4t} u(t-1)$$

- Ο πρώτος όρος τής συνάρτησης και η «καθυστέρηση» δεν έχουν το ίδιο όρισμα, οπότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας και οι ιδιότητες, άρα χρειάζονται αλλαγές:

$$2e^{-4t} u(t-1) = 2e^{-4t+4-4} u(t-1)$$
$$= \boxed{2e^{-4}} e^{-4(t-1)} u(t-1)$$

αριθμός

εκθετικό με καθυστέρηση

$$e^{-4(t-1)} u(t-1) \rightarrow e^{-4z} u(z) + \text{καθυστέρηση}$$

$$G(s) = 2e^{-4} \frac{1}{s+4} e^{-s}$$

3

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$h(t) = 5 \cos(2t - 1)u(t)$$

$$5 \cos(2t - 1)u(t) = 5 \cos(1) \cos(2t)u(t) + 5 \sin(1) \sin(2t)u(t)$$

$$\rightarrow 5 \cos(1) \frac{s}{s^2 + 4} + 5 \sin(1) \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{2,702s}{s^2 + 4} + \frac{8,415}{s^2 + 4}$$

$$H(s) = \frac{2,702s + 8,415}{s^2 + 4}$$

4

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1}$$

$$\frac{1}{s} \rightarrow u(t)$$

$$\frac{2}{s+1} \rightarrow 2e^{-t}u(t)$$

$$f(t) = (1 + 2e^{-t})u(t)$$

5

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{3s+1}{s+4}$$

- Μη γνήσια ρητή πολυωνυμική συνάρτηση $\Rightarrow$ Διαίρεση

$$F(s) = \frac{3s+1}{s+4} = \frac{3s+12-11}{s+4} = \frac{3(s+4)-11}{s+4} = 3 - \frac{11}{s+4}$$

$$f(t) = 3\delta(t) - 11e^{-4t}u(t)$$

6

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)(s+3)}$$

- Ανάπτυγμα σε απλά κλάσματα

$$\frac{4}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$\Rightarrow 4 = A(s+3) + B(s+1) = (A+B)s + (3A+B)$$

- Προσδιοριστέοι συντελεστές

$$\left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ 3A+B=4 \end{array} \right\} \Rightarrow A=2, \quad B=-2$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Με τη μέθοδο των υπολοίπων:

$$\frac{4}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{s+3} = A + \frac{B(s+1)}{s+3} \xrightarrow{s=-1} A=2 \\ \frac{4}{s+1} = \frac{A(s+3)}{s+1} + B \xrightarrow{s=-3} B=-2 \end{cases}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+3} \right\} = (2e^{-t} - 2e^{-3t})u(t)$$

7

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace τής συνάρτησης

$$F(s) = \frac{12}{(s+2)^2(s+4)}$$

- Ανάπτυγμα σε απλά κλάσματα και **προσδιοριστέοι συντελεστές**

$$\frac{12}{(s+2)^2(s+4)} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

$$12 = A(s+4) + B(s+2)(s+4) + C(s+2)^2$$

$$= As + 4A + Bs^2 + 6Bs + 8B + Cs^2 + 4C + 4Cs$$

$$= (B+C)s^2 + (A+6B+4C)s + (4A+8B+4C)$$

$$\left. \begin{array}{l} B+C=0 \\ A+6B+4C=0 \\ 4A+8B+4C=12 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=6 \\ B=-3 \\ C=3 \end{array}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Ανάπτυγμα σε απλά κλάσματα και μέθοδος υπολοίπων

$$\frac{12}{(s+2)^2(s+4)} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{12}{s+4} = A + B(s+2) + \frac{C(s+2)^2}{s+4} \xrightarrow{s=-2} \boxed{A=6} \\ \frac{12}{s+4} = A + B(s+2) + \frac{C(s+2)^2}{s+4} \xrightarrow{d/ds} \\ \frac{-12}{(s+4)^2} = B + \frac{C(s+2)(s+6)}{(s+4)^2} \xrightarrow{s=-2} \boxed{B=-3} \\ \frac{12}{(s+2)^2} = \frac{A(s+4)}{(s+2)^2} + \frac{B(s+4)}{s+2} + C \xrightarrow{s=-4} \boxed{C=3} \end{array} \right.$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Παίρνουμε από τον πίνακα και τις ιδιότητες:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{(s+2)^2} + \frac{-3}{s+2} + \frac{3}{s+4} \right\}$$
$$= \left(6t e^{-2t} - 3e^{-2t} + 3e^{-4t} \right) u(t)$$

te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

8

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Απόδειξη ότι ισχύει το:

$$\frac{|K|e^{j\theta}}{s + \alpha - j\beta} + \frac{|K|e^{-j\theta}}{s + \alpha + j\beta} = 2|K|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$

- Πιο γενικά, αλλά πάντα με ρίζες/πόλους στο αρνητικό ημιεπίπεδο:

$$\frac{\gamma + j\delta}{s + \alpha - j\beta} + \frac{\gamma - j\delta}{s + \alpha + j\beta} \rightarrow (\gamma + j\delta)e^{(-\alpha + j\beta)t} + (\gamma - j\delta)e^{(-\alpha - j\beta)t}$$

- Τότε

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\begin{aligned}(\gamma + j\delta)e^{(-\alpha + j\beta)t} &= e^{-\alpha t}(\gamma + j\delta)(\cos \beta t + j \sin \beta t) \\&= e^{-\alpha t}(\gamma \cos \beta t + j\gamma \sin \beta t + j\delta \cos \beta t - \delta \sin \beta t) \\&= e^{-\alpha t}\left[(\gamma \cos \beta t - \delta \sin \beta t) + j(\gamma \sin \beta t + \delta \cos \beta t)\right] \\&= e^{-\alpha t}\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\left\{\cos\left[\beta t + \arctan\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\right] + j\cos\left[\beta t - \arctan\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

- Το παραπάνω προκύπτει από το «θεώρημα» **αρμονικής πρόσθεσης**:

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \operatorname{sgn}(a) \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left[\omega t + \arctan\left(-\frac{b}{a}\right)\right]$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ +1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$(\gamma + j\delta)e^{(-\alpha + j\beta)t} = e^{-\alpha t} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \left\{ \cos \left[\beta t + \arctan \left(\frac{\delta}{\gamma} \right) \right] + j \cos \left[\beta t - \arctan \left(\frac{\delta}{\gamma} \right) \right] \right\}$$

$$(\gamma - j\delta)e^{(-\alpha - j\beta)t} = e^{-\alpha t} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \left\{ \cos \left[-\beta t - \arctan \left(\frac{\delta}{\gamma} \right) \right] - j \cos \left[-\beta t + \arctan \left(\frac{\delta}{\gamma} \right) \right] \right\}$$

$\Rightarrow$

$$\oplus = 2e^{-\alpha t} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \cos \left[\beta t + \arctan \left(\frac{\delta}{\gamma} \right) \right]$$

$$(\gamma + j\delta)e^{(-\alpha + j\beta)t} + (\gamma - j\delta)e^{(-\alpha - j\beta)t} = 2e^{-\alpha t} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \cos \left[\beta t + \arctan \left(\frac{\delta}{\gamma} \right) \right]$$

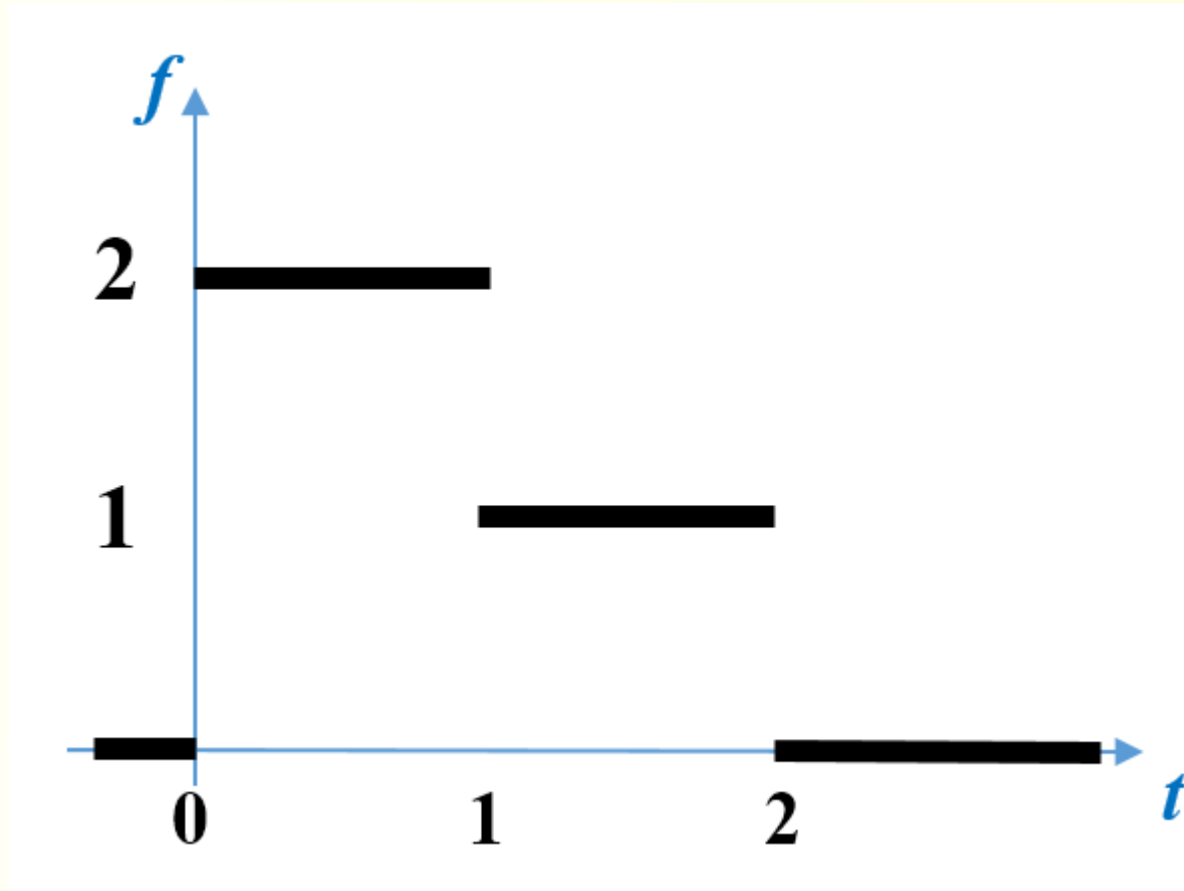
$$(|K|e^{j\theta})e^{(-\alpha + j\beta)t} + (|K|e^{-j\theta})e^{(-\alpha - j\beta)t} = 2|K|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$

Από τη «δυναμική» (= πόλους) τού κυκλώματος

9

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Για το δοθέν σήμα να βρεθεί μια κατάλληλη μαθηματική αναπαράσταση και ο μετασχηματισμός Laplace

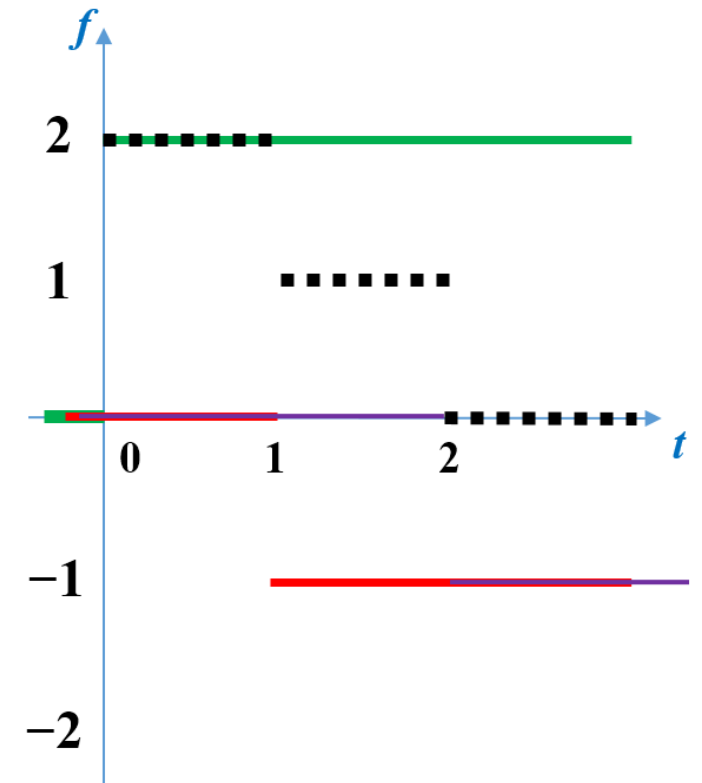
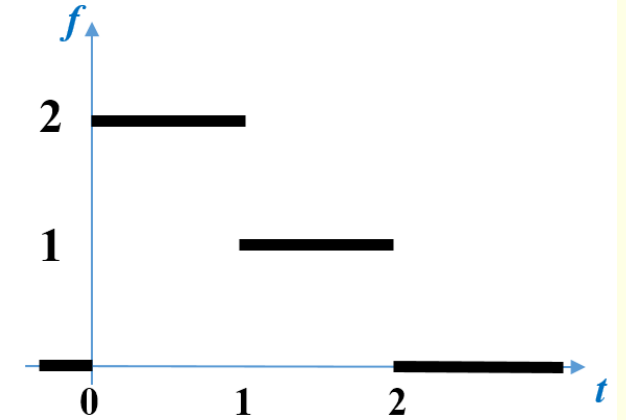


ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Μαθηματική αναπαράσταση (σύνθεση παλμών):

$$f(t) = 2u(t) - u(t-1) - u(t-2)$$

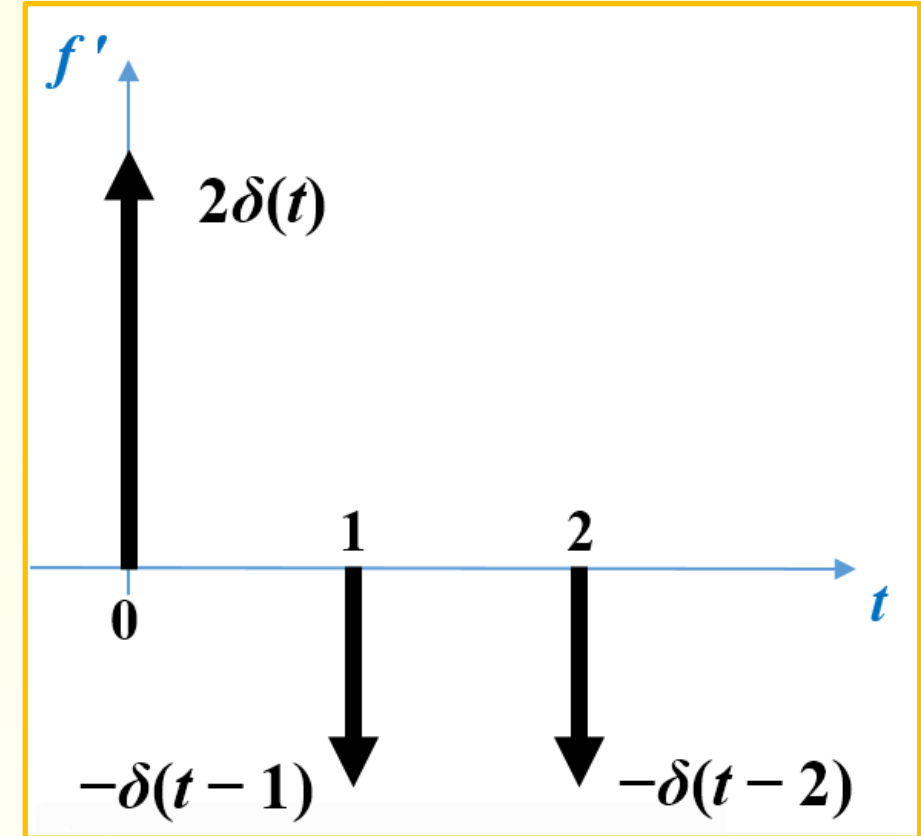
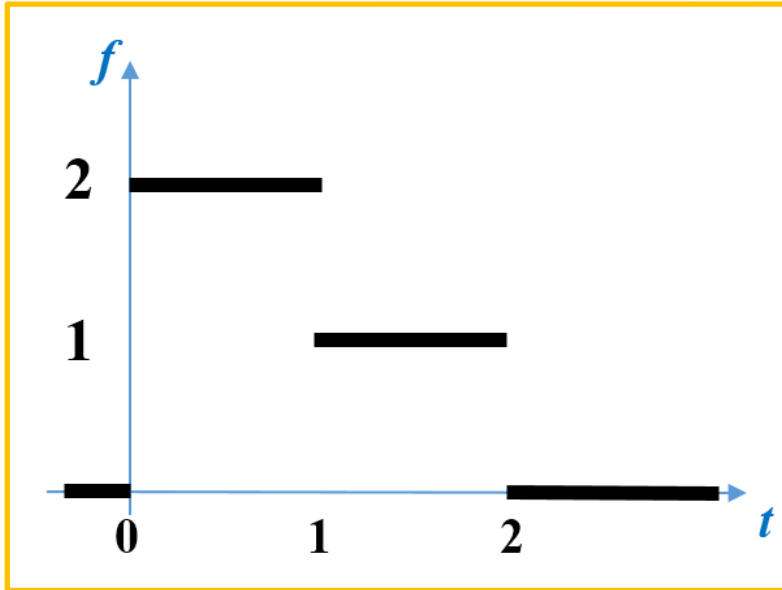
$$F(s) = 2\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s}$$



9_{β}

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

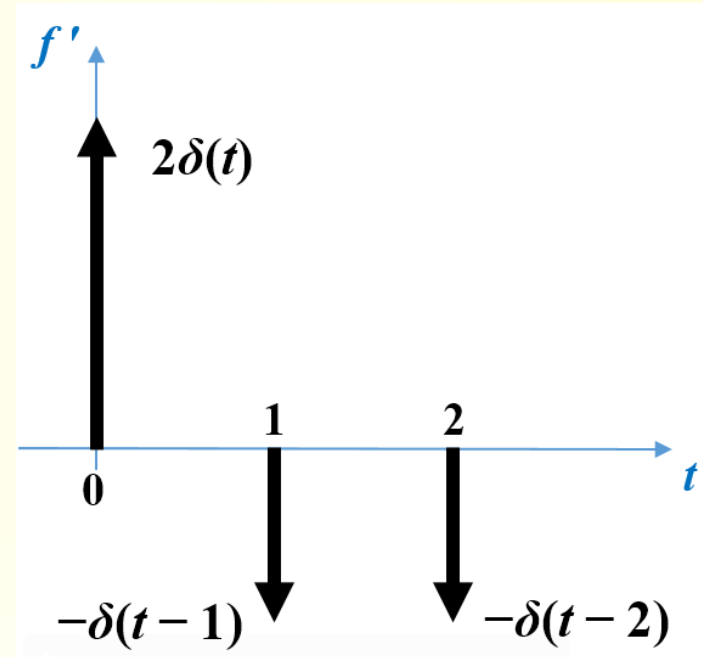
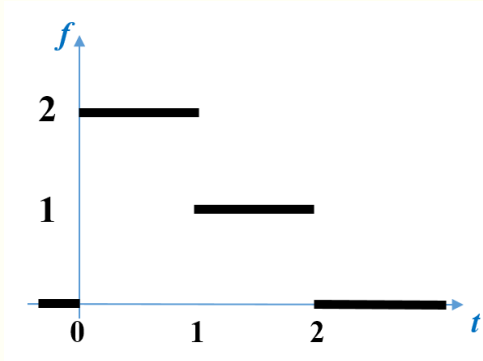
- Μαθηματική αναπαράσταση μέσω **παραγώγισης**:



$$f'(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t-2)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Μαθηματική αναπαράσταση μέσω **παραγώγισης**:



$$f'(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t-2)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

$$\Rightarrow sF(s) = \mathcal{L}\{f'\} = \mathcal{L}\{2\delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t-2)\}$$

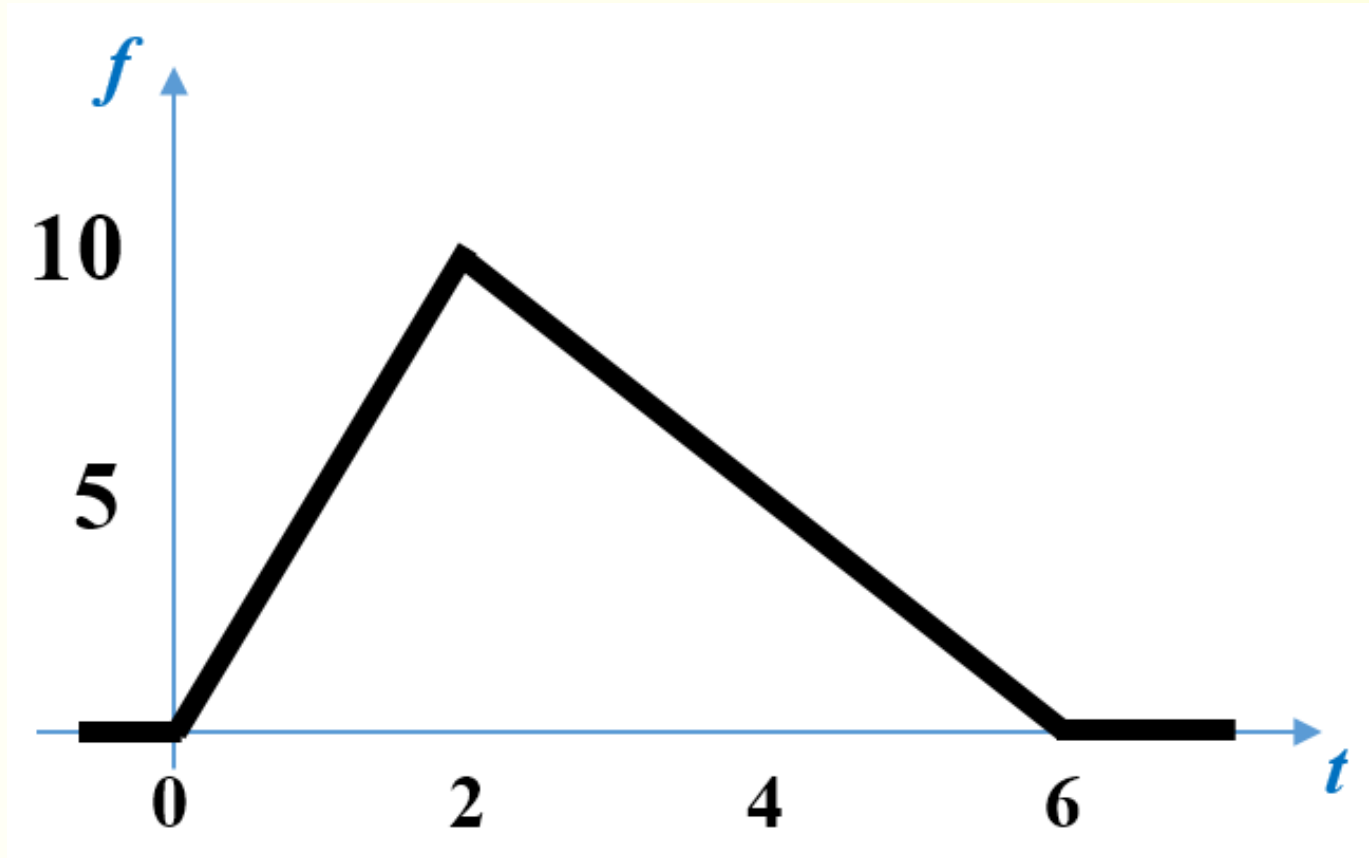
$$= 2 - 1 \cdot e^{-s} - 1 \cdot e^{-2s}$$

$$F(s) = \frac{2 - e^{-s} - e^{-2s}}{s}$$

10

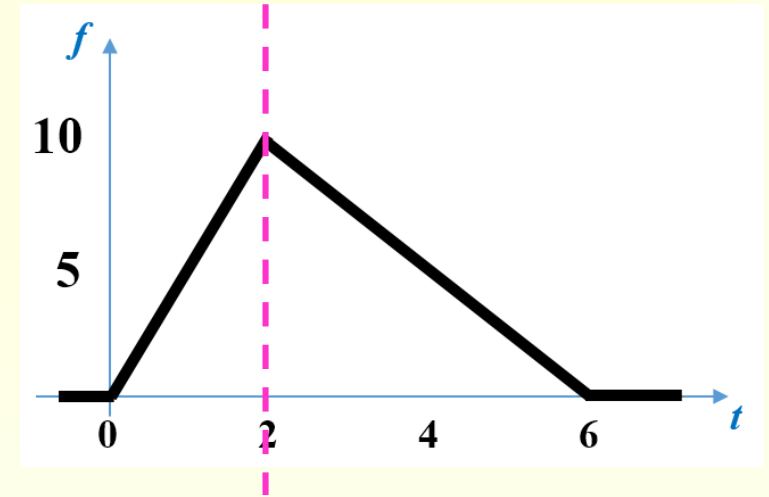
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Για το δοθέν σήμα να βρεθεί μια κατάλληλη μαθηματική αναπαράσταση και ο μετασχηματισμός Laplace



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

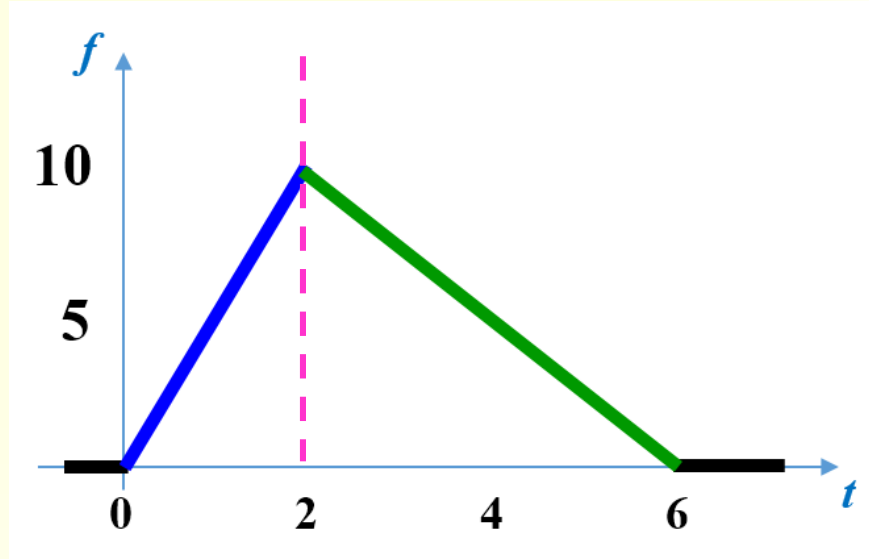
- Προσπαθούμε να χωρίσουμε το σήμα σε τμήματα κατά τα οποία υπάρχει μια μόνο (απλή) συνάρτηση που τα περιγράφει
- Τα πολύ συχνά εμφανιζόμενα στην πράξη κατά τμήματα γραμμικά σήματα επιδέχονται μια τέτοια προσέγγιση
- Χρησιμοποιούμε μετατοπισμένες βηματικές συναρτήσεις για να «αναβοσβήνουμε» τις κατάλληλες επί μέρους συναρτήσεις
- Απαιτείται λίγη προσοχή στα σημεία που η μια συνάρτηση «παραδίδει τη σκυτάλη» στην επόμενη
- Το συγκεκριμένο σήμα αποτελείται από δυο ράμπες: $5t$ και $-2,5t$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

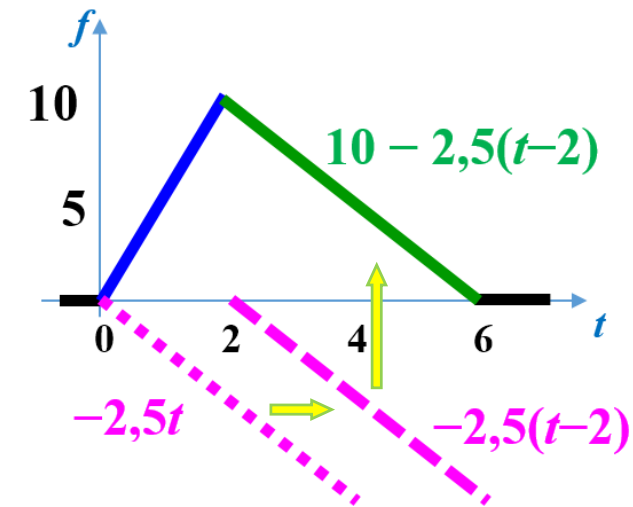
- Το συγκεκριμένο σήμα αποτελείται από δυο ράμπες: $5t$ και $-2,5t$:

$$5t[u(t) - u(t-2)] + [10 - 2,5(t-2)][u(t-2) - u(t-6)]$$



Τελικά παίρνουμε:

$$5t u(t) + (15 - 7,5t) u(t-2) - (15 - 2,5t) u(t-6)$$



Θα μετασχηματίσουμε κάθε όρο χωριστά

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

$$5tu(t) \rightarrow 5\frac{1}{s^2}$$

$$15u(t-2) \rightarrow 15\frac{1}{s}e^{-2s}$$

$$-7,5tu(t-2) \rightarrow -7,5\frac{1+2s}{s^2}e^{-2s}$$

$$-7,5(t-2+2)u(t-2) \rightarrow -7,5\frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{15}{s}e^{-2s}$$

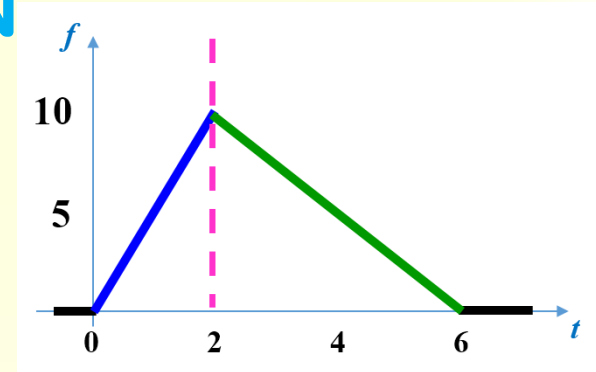
$$-15u(t-6) \rightarrow -15\frac{1}{s}e^{-6s}$$

$$2,5tu(t-6) \rightarrow 2,5\frac{1+15s}{s^2}e^{-6s}$$

$$2,5(t-6+6)u(t-6) \rightarrow 2,5\frac{1}{s^2}e^{-6s} + \frac{15}{s}e^{-6s}$$

Και τελικά

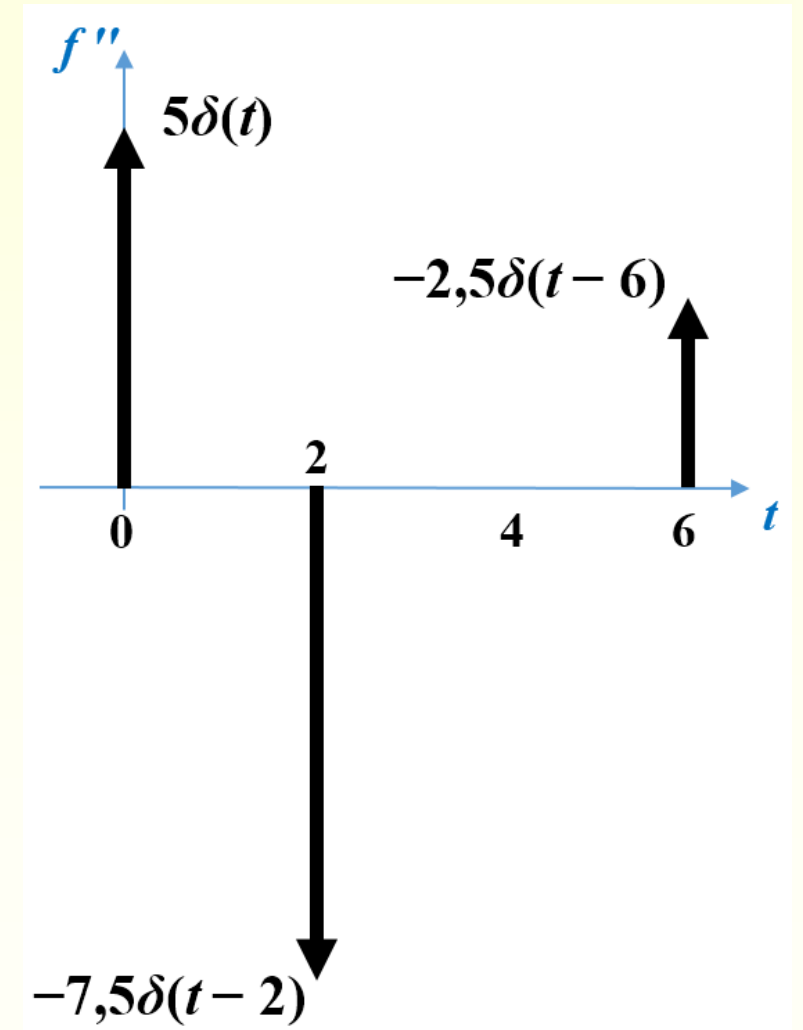
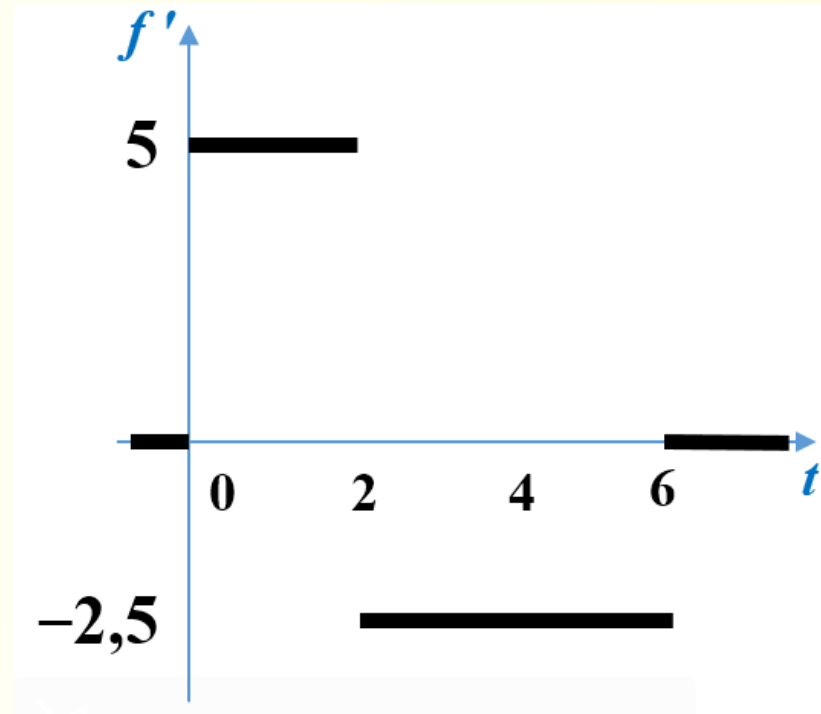
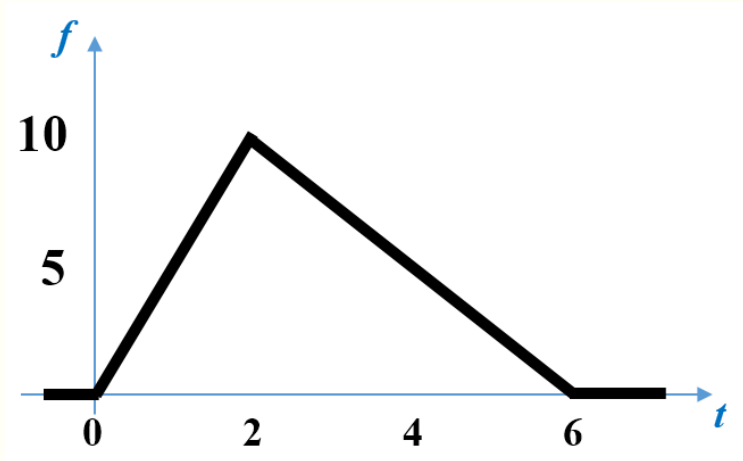
$$F(s) = \frac{5 - 7,5e^{-2s} + 2,5e^{-6s}}{s^2}$$



10_{β}

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

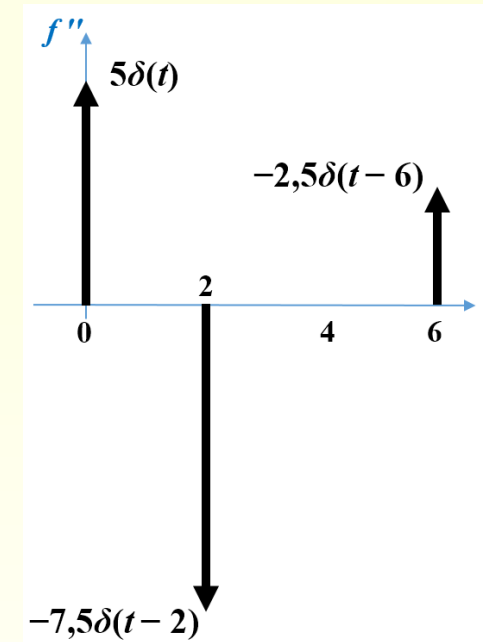
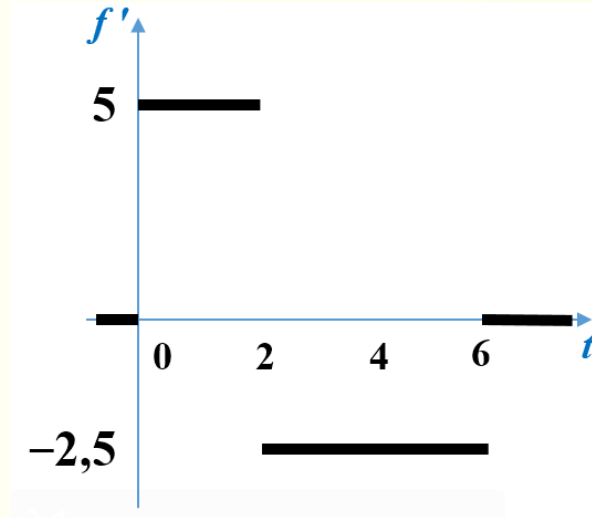
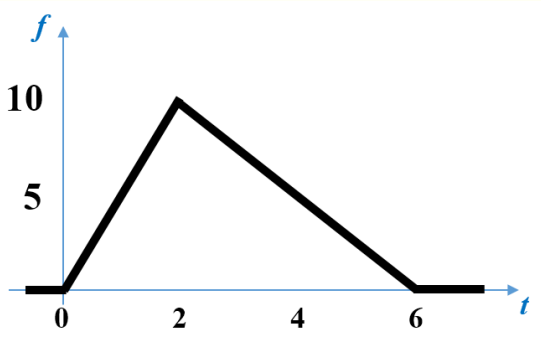
- Εναλλακτικά για το ίδιο σήμα, παραγωγίζουμε δυο φορές:



$$5t u(t) + (15 - 7,5t) u(t - 2) - (15 - 2,5t) u(t - 6)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Εναλλακτικά για το ίδιο σήμα, παραγωγίζουμε δυο φορές:



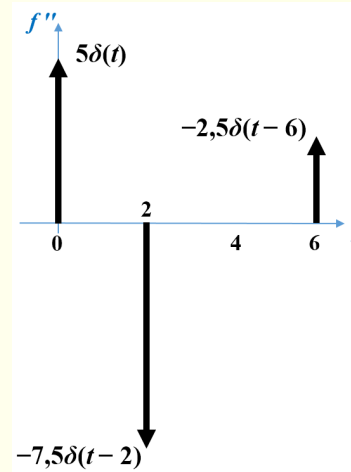
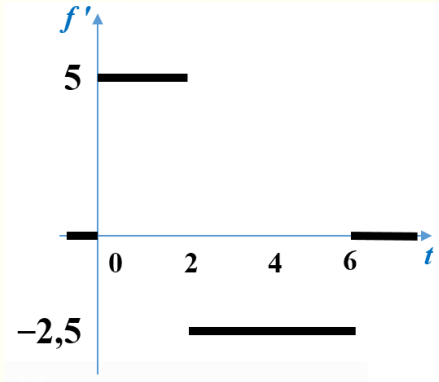
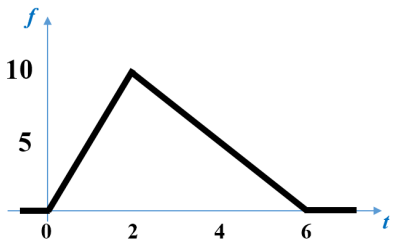
$$f(t) = 5t u(t) + (15 - 7,5t) u(t - 2) - (15 - 2,5t) u(t - 6)$$

$$f'(t) = 5u(t) - 7,5u(t - 2) + 2,5u(t - 6)$$

$$f''(t) = 5\delta(t) - 7,5\delta(t - 2) + 2,5\delta(t - 6)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Εναλλακτικά για το ίδιο σήμα, παραγωγίζουμε δυο φορές:



$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - s f(0^-) - f'(0^-)$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 F(s) - s f(0^-) - f'(0^-) \Rightarrow$$

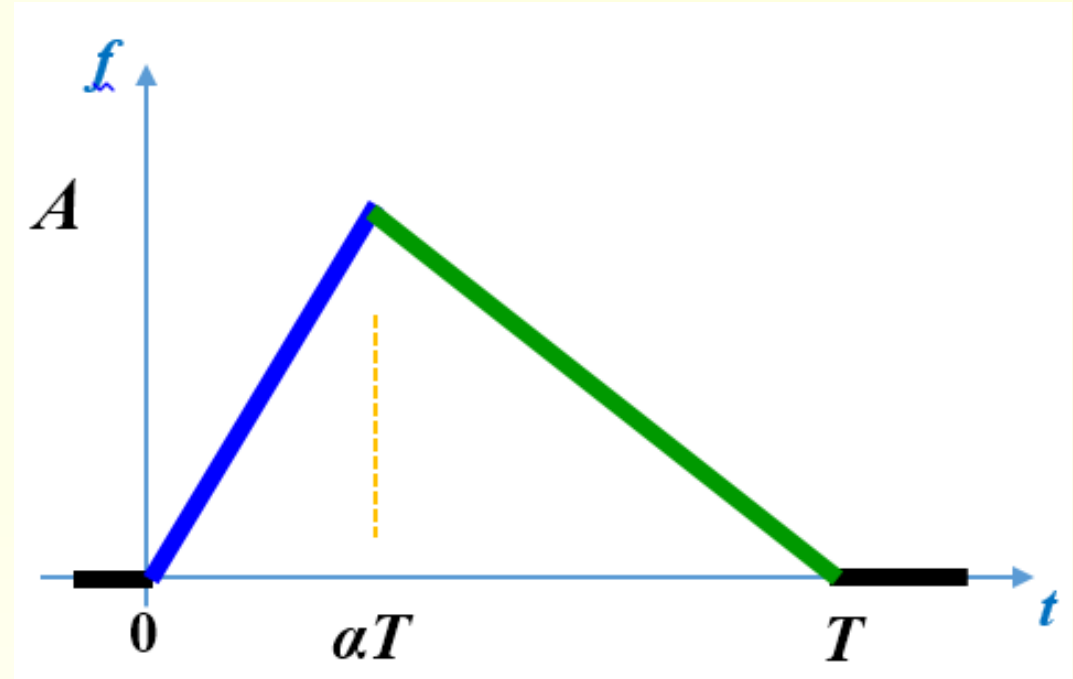
$$\mathcal{L}\{5\delta(t) - 7.5\delta(t-2) + 2.5\delta(t-6)\} = s^2 F(s) - 0 - 0 \Rightarrow$$

$$5 - 7.5e^{-2s} + 2.5e^{-6s} = s^2 F(s) \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{5 - 7.5e^{-2s} + 2.5e^{-6s}}{s^2}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Γενικότερα ισχύει ότι

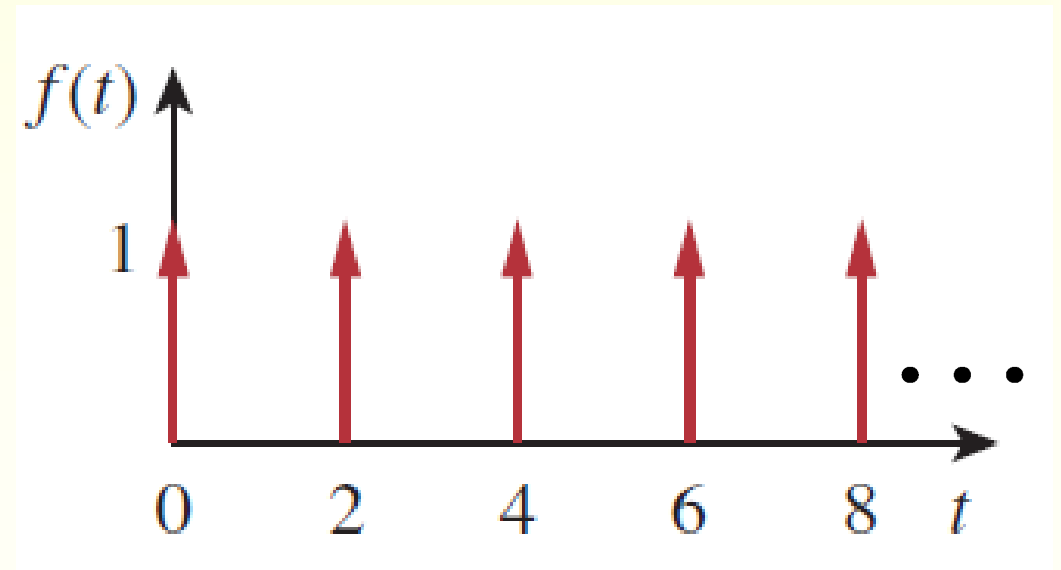
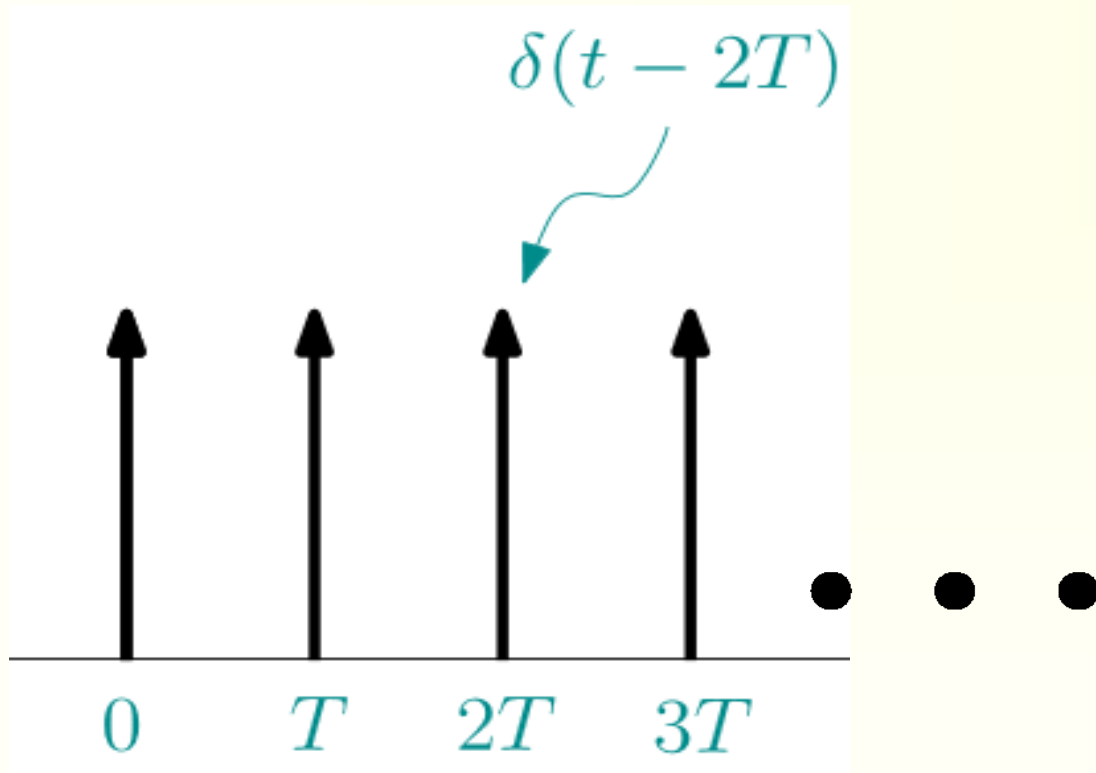


$$F(s) = \frac{A}{\alpha T} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{A}{\alpha(1-\alpha)T} \cdot \frac{e^{-\alpha Ts}}{s^2} + \frac{A}{(1-\alpha)T} \cdot \frac{e^{-Ts}}{s^2}$$

11

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Για το δοθέν σήμα («τρένο ώσεων»-*impulse train*) να βρεθεί μια κατάλληλη μαθηματική αναπαράσταση και ο μετασχηματισμός Laplace



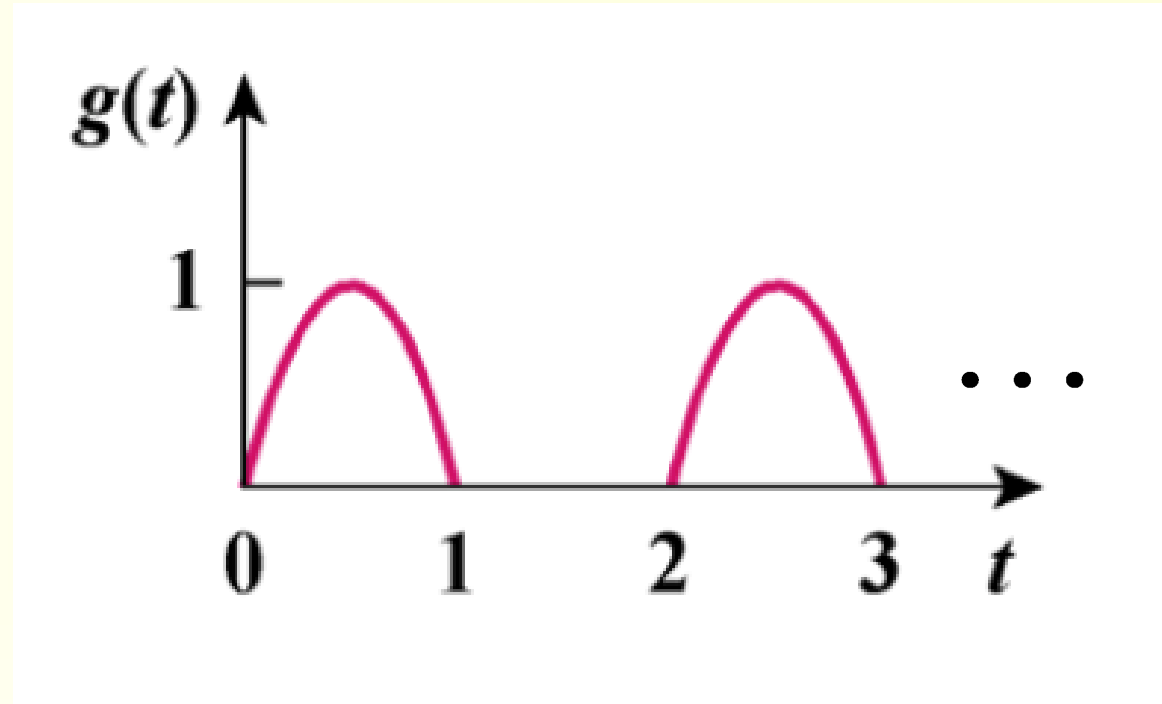
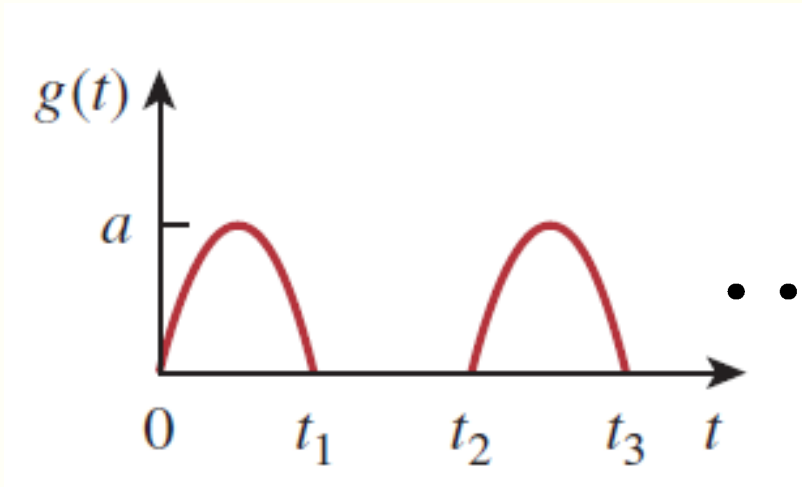
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Το σήμα είναι περιοδικό με $T = 2$, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace ανάγεται στην 1^η περίοδο:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} = \frac{\mathcal{L}\{\delta(t)\}}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{1 - e^{-2s}}$$

12

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ



- Για το δοθέν σήμα («ημιανόρθωση»-half wave rectification) να βρεθεί μια κατάλληλη μαθηματική αναπαράσταση και ο μετασχηματισμός Laplace

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Το σήμα είναι περιοδικό με $T = 2$, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace ανάγεται στην 1^η περίοδο:

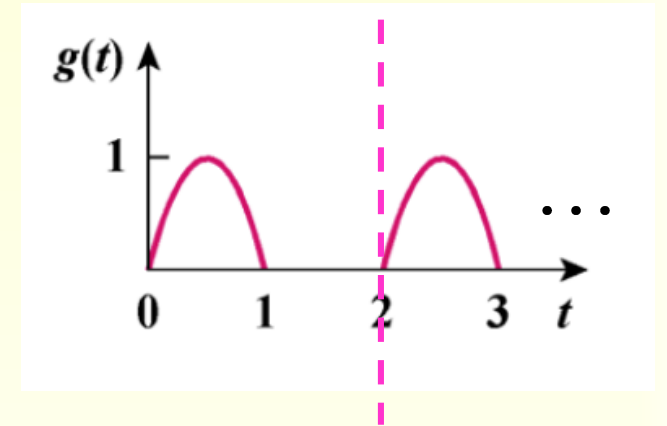
$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - e^{-2s}}$$

- Το σήμα τής 1^{ης} περιόδου είναι «μισό ημίτονο»:

$$g_1(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

- Δηλαδή πρέπει να «σβήσουμε» το δεύτερο μισό τού ημιτόνου:

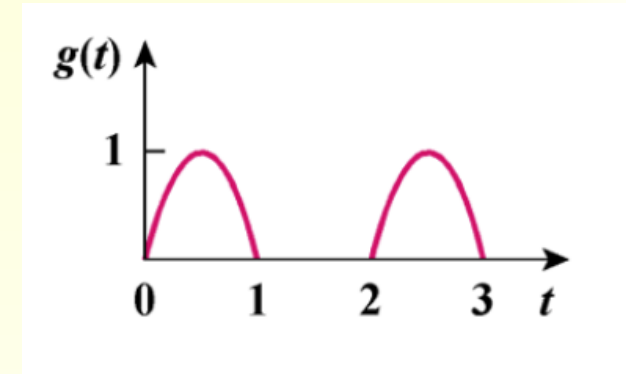
$$g_1(t) = \sin(\pi t) [u(t) - u(t-1)]$$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}g_1(t) &= \sin(\pi t) u(t) - \sin(\pi t) u(t-1) \\&= \sin(\pi t) u(t) - \sin(\pi t - \pi + \pi) u(t-1) \\&= \sin(\pi t) u(t) - \sin[\pi + \pi(t-1)] u(t-1) \\&= \sin(\pi t) u(t) + \sin[\pi(t-1)] u(t-1)\end{aligned}$$

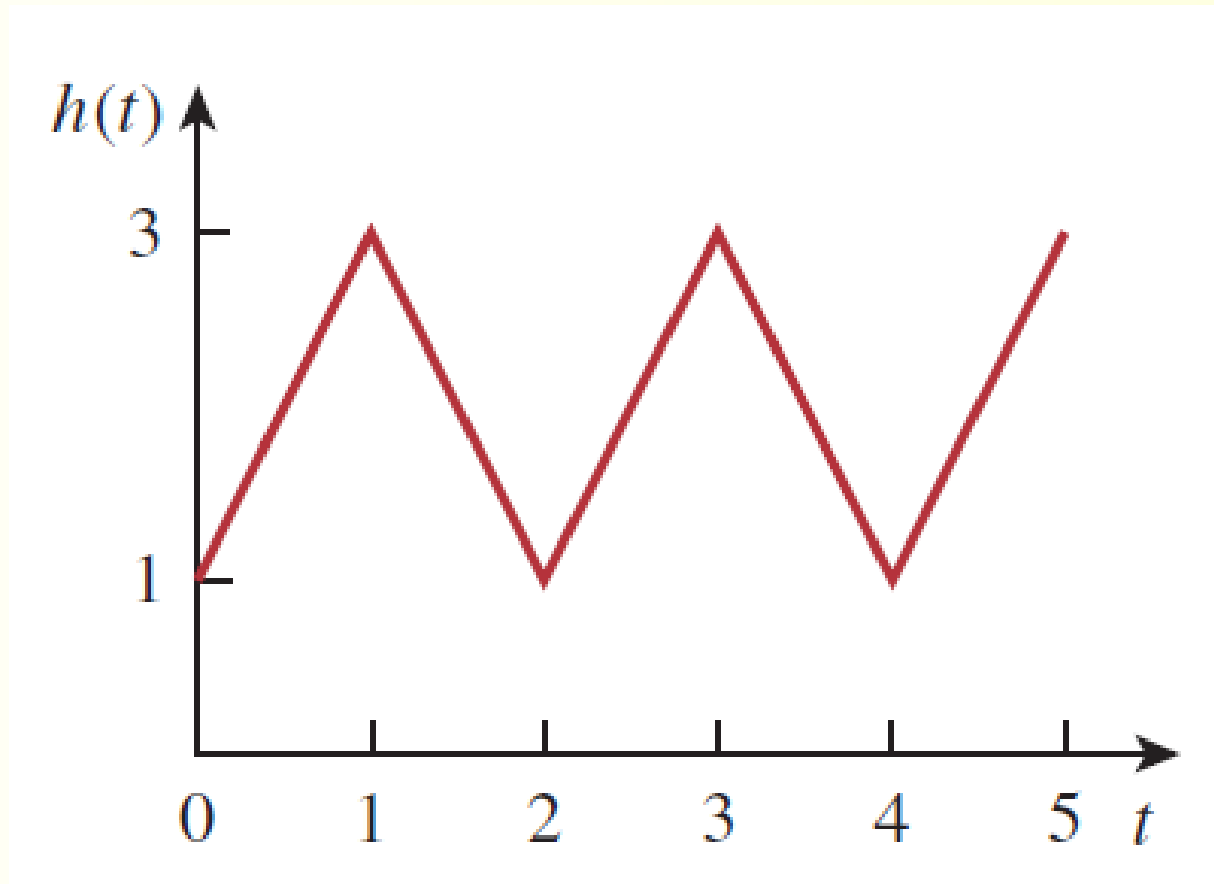


- Έτσι ώστε τελικά να πάρουμε:

$$G_1(s) = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} (1 + e^{-s}) \Rightarrow G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - e^{-2s}} = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \frac{(1 + e^{-s})}{(1 - e^{-2s})} = \boxed{\frac{\pi}{(s^2 + \pi^2)(1 - e^{-s})}}$$

13

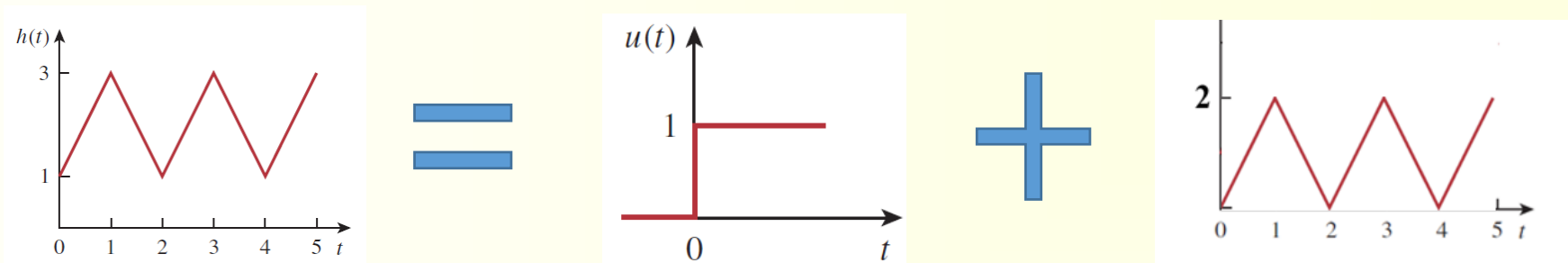
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ



- Για το δοθέν σήμα να βρεθεί μια κατάλληλη μαθηματική αναπαράσταση και ο μετασχηματισμός Laplace

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

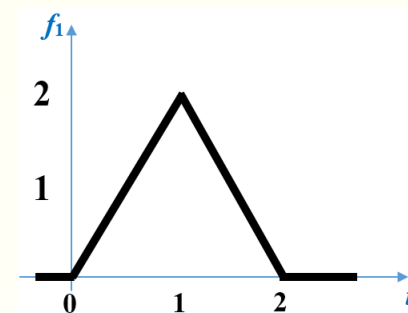
- Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι συνδυασμός ενός τριγωνικού σήματος με ένα σταθερό σήμα (dc)



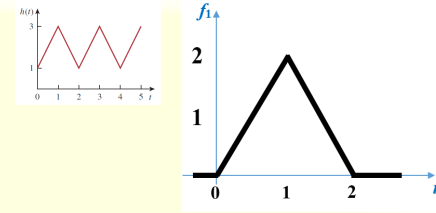
$$h(t) = u(t) + f_0(t) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s} + F_0(s)$$

- Άρα, επικεντρωνόμαστε στο τριγωνικό σήμα f_0 που είναι περιοδικό με $T = 2$, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace ανάγεται στην 1^η περίοδο f_1 :

$$F_0(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-2s}}$$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ



- Το σήμα f_1 γράφεται μαθηματικά:

$$f_1(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 1 \\ 4 - 2t, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

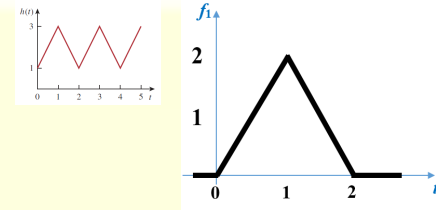
- Και πιο «βολικά»:

$$f_1(t) = 2t[u(t) - u(t-1)] + (4 - 2t)[u(t-1) - u(t-2)]$$

- Συνεχίζοντας

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2tu(t) - 2tu(t-1) + 4u(t-1) - 2tu(t-1) - 4u(t-2) + 2tu(t-2) \\ &= 2tu(t) - 4(t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2) \end{aligned}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΗΜΑΤΩΝ



- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας: $2tu(t) \rightarrow 2\frac{1}{s^2}$
 $-4(t-1)u(t-1) \rightarrow -4\frac{1}{s^2}e^{-s}$
 $2(t-2)u(t-2) \rightarrow 2\frac{1}{s^2}e^{-2s}$
- Και τελικά:

$$\mathcal{L}\{f_1\} = \frac{2 - 4e^{-s} + 2e^{-2s}}{s^2} = \frac{2(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})}{s^2} = \frac{2(1 - e^{-s})^2}{s^2} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{f_0\} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \frac{2(1 - e^{-s})^2}{s^2} = \frac{1}{(1 + e^{-s})(1 - e^{-s})} \frac{2(1 - e^{-s})^2}{s^2} = \frac{2(1 - e^{-s})}{s^2(1 + e^{-s})}$$

$$\mathcal{L}\{h\} = \frac{1}{s} + \frac{2(1 - e^{-s})}{s^2(1 + e^{-s})}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

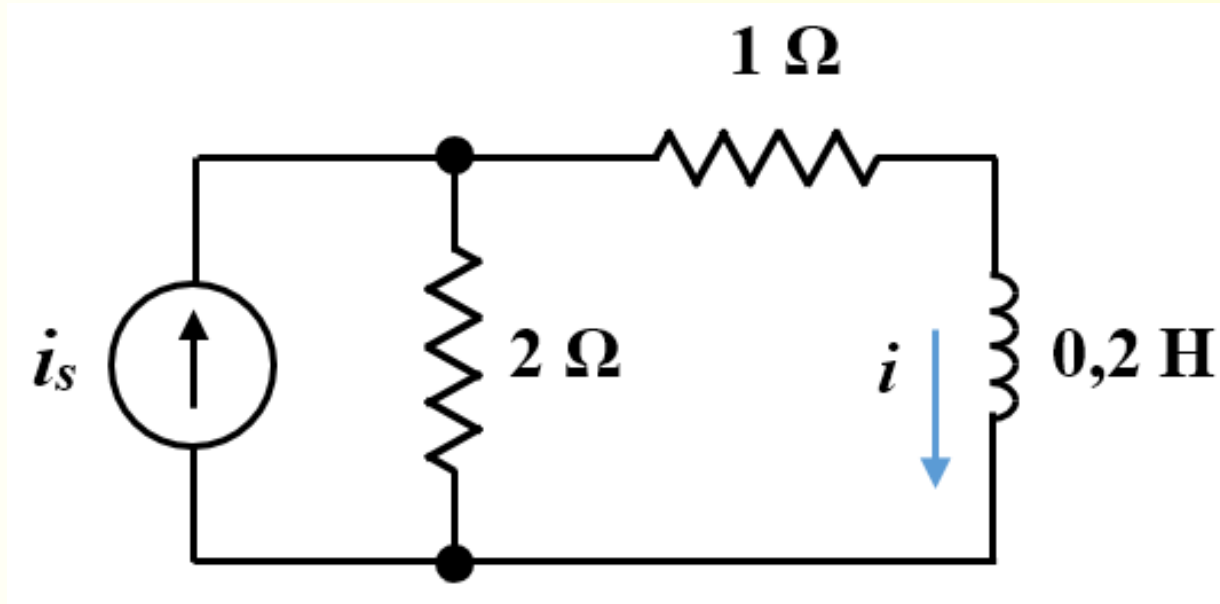
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΚΑΙ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

14

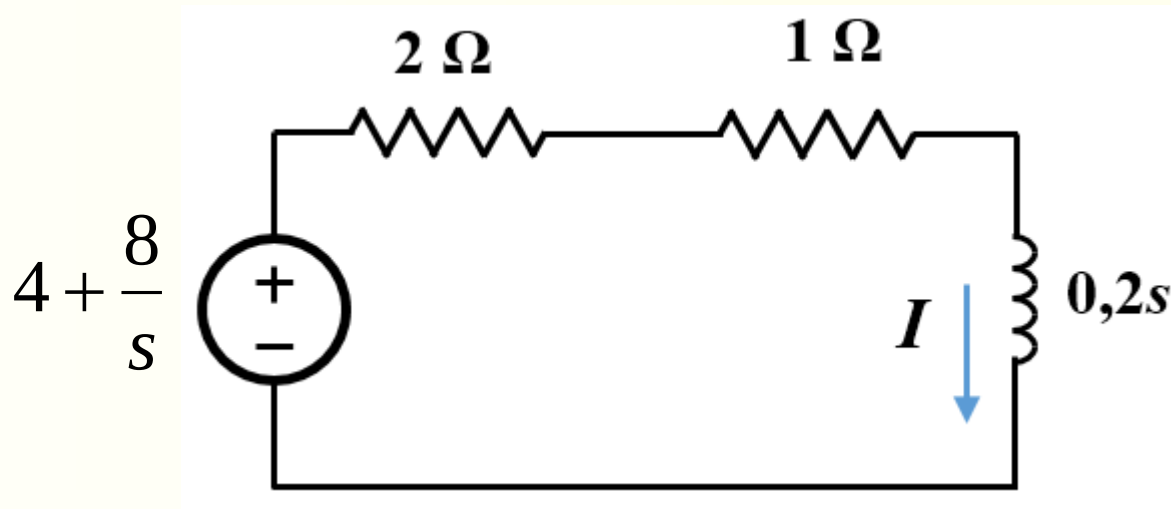
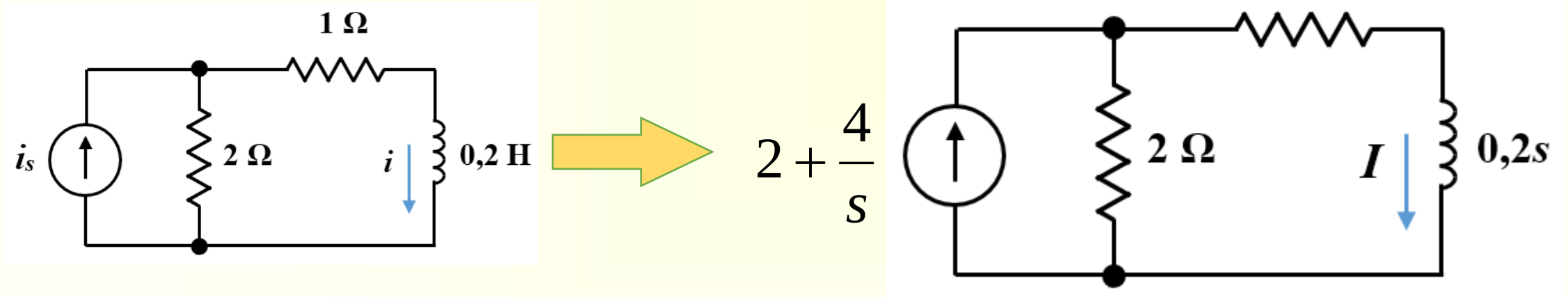
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



- Να υπολογιστεί το ρεύμα $i(t)$ όταν $i_s(t) = 2\delta(t) + 4u(t)\ \text{A}$
- Ισχύει η αρχή τής επαλληλίας;

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας



$$I(s) = \frac{4 + \frac{8}{s}}{3 + 0,2s} = \frac{40 + 20s}{s(s + 15)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 15}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Βρίσκουμε ότι

$$A = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

- Και αντίστοιχα

$$\frac{40 + 20s}{s} = \frac{8(s + 15)}{3s} + B \stackrel{s=-15}{\Rightarrow} B = \frac{52}{3}$$

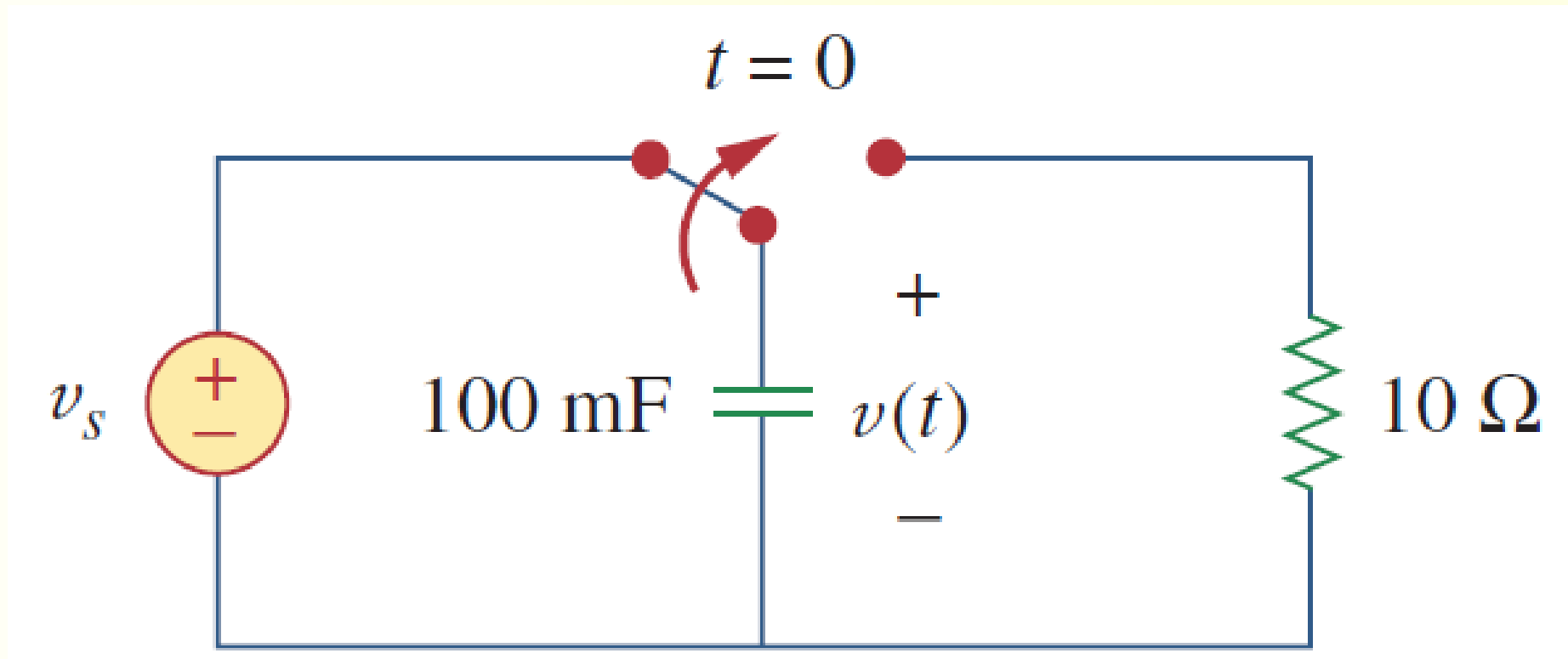
- Οπότε

$$I(s) = \frac{8/3}{s} + \frac{52/3}{s + 15} \Rightarrow i(t) = \left(\frac{8}{3} + \frac{52}{3} e^{-15t} \right) u(t)$$

- Ναι! Ισχύει η αρχή τής επαλληλίας επειδή αν είχαμε «σπάσει» την είσοδο σε $2\delta(t)$ και $4u(t)$, θα παίρναμε το ίδιο αποτέλεσμα

15

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

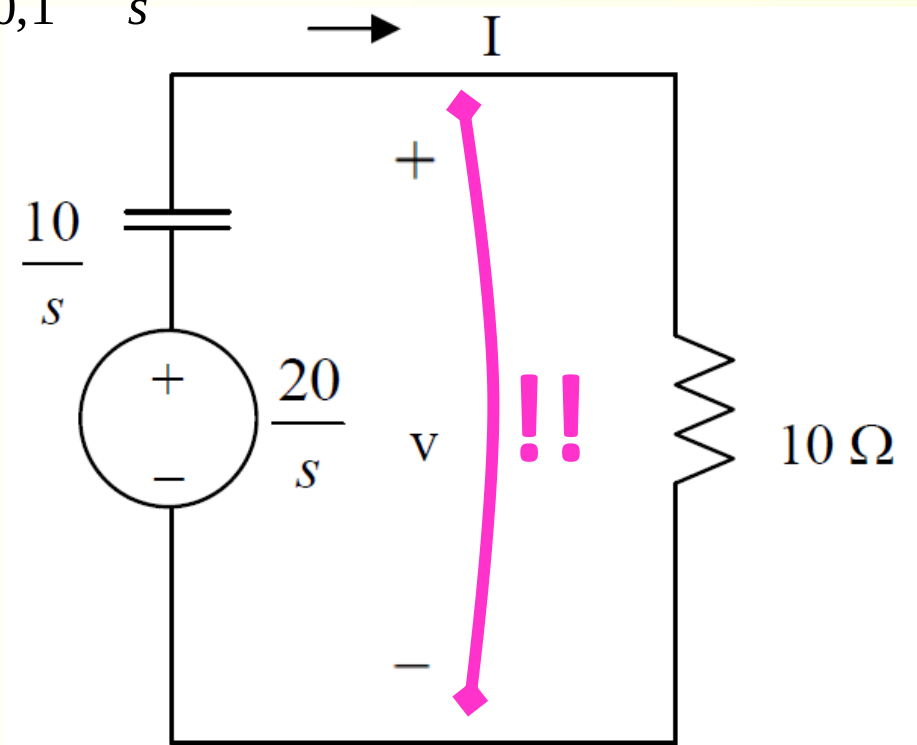


- Να υπολογιστεί η τάση $v(t)$ του πυκνωτή για $t > 0$ όταν $v_s = 20 \text{ V}$

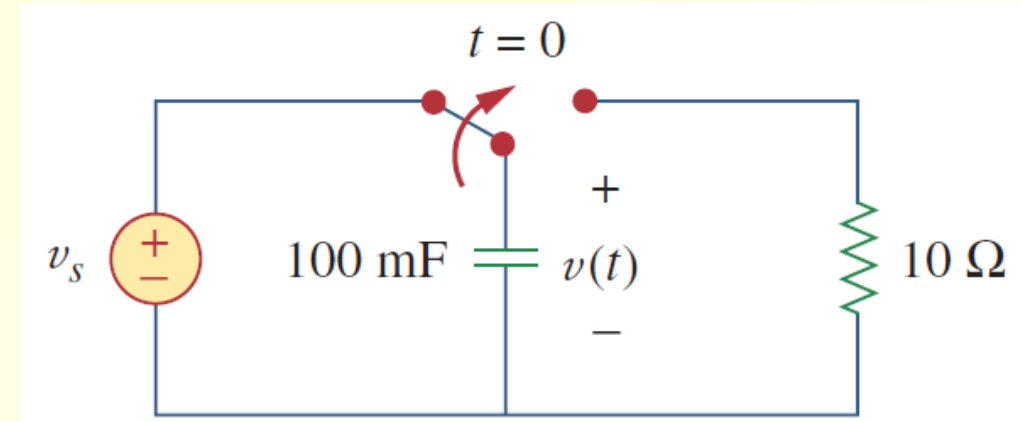
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Προφανώς, $v(0^-) = 20 \text{ V} = v(0^+)$
- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας:

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{s \cdot 0,1} = \frac{10}{s}$$



Τάση του πυκνωτή



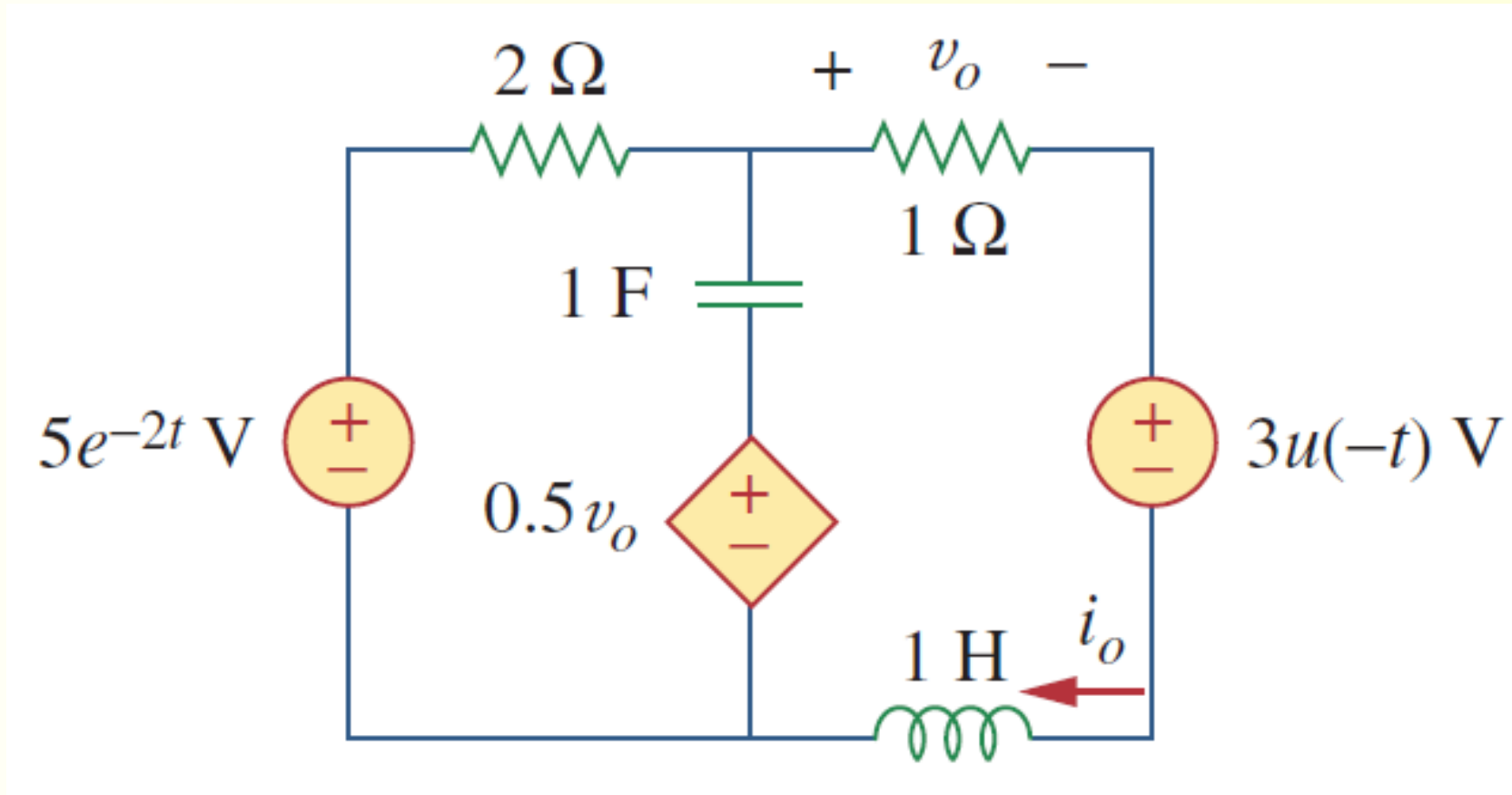
$$I(s) = \frac{\frac{20}{s}}{10 + \frac{10}{s}} = \frac{2}{s+1} \Rightarrow$$

$$V(s) = 10I(s) = \frac{20}{s+1} \Rightarrow$$

$$v(t) = 20e^{-t}u(t)$$

16

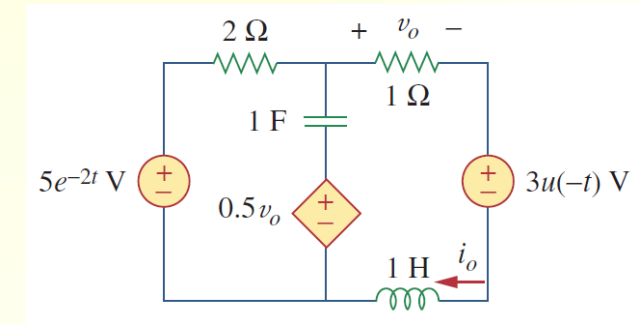
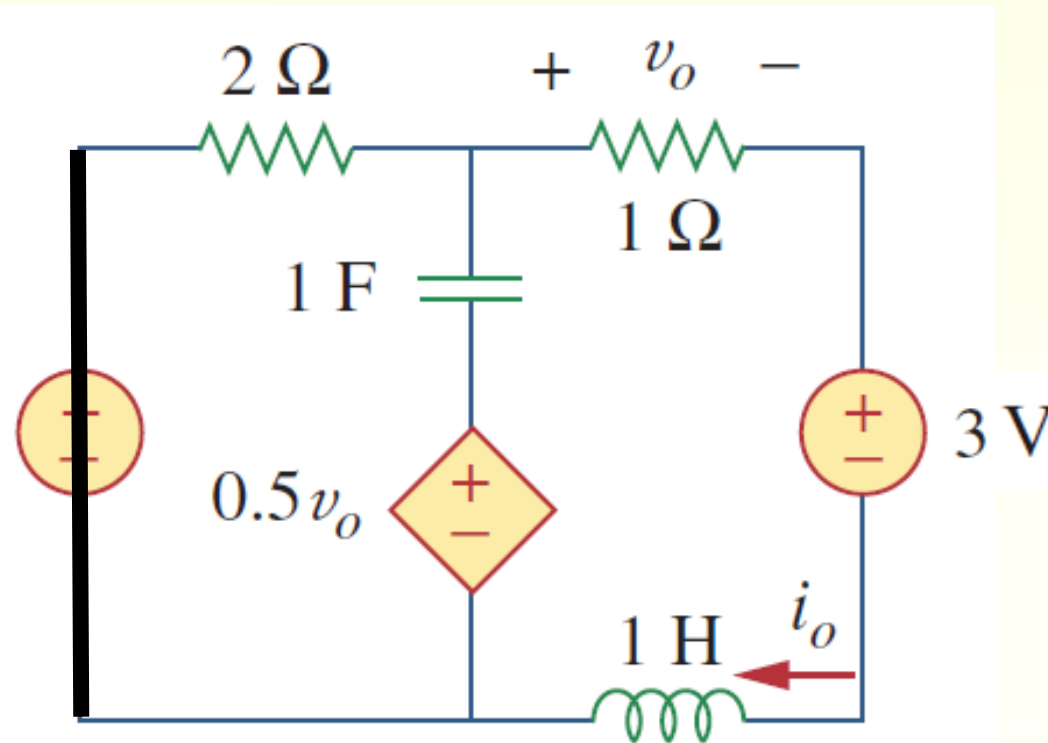
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



- Να υπολογιστεί το ρεύμα $i_o(t)$ για $t > 0$

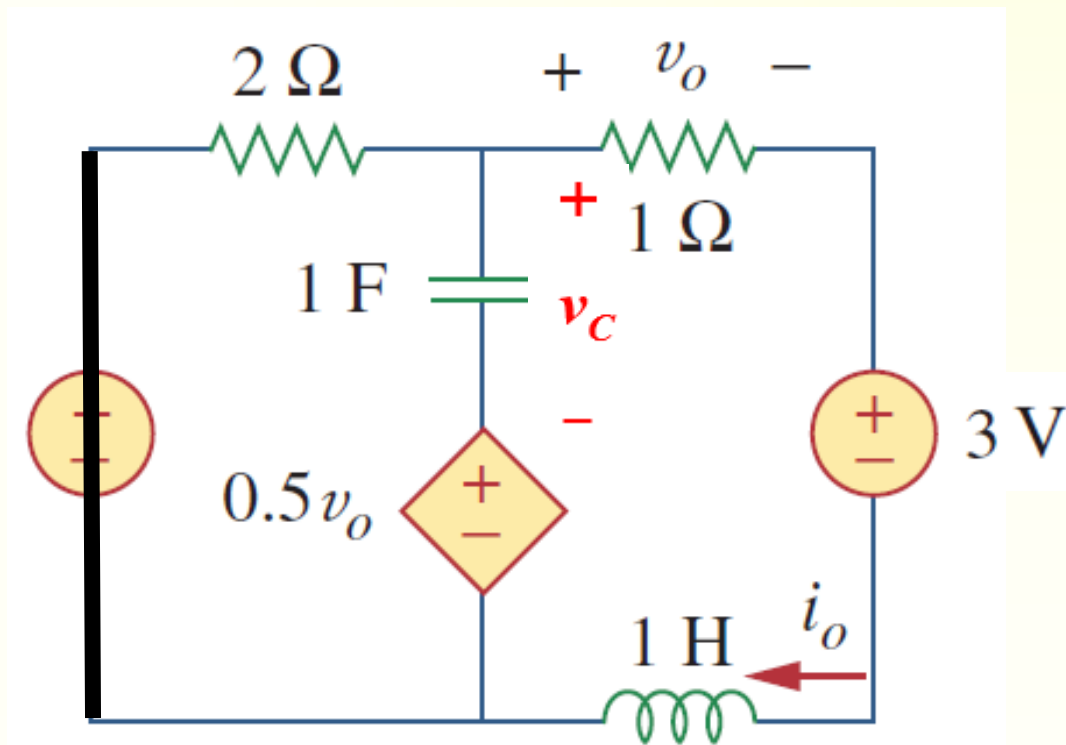
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Παρατηρούμε ότι εξ αιτίας τής πηγής τάσης στα δεξιά, το κύκλωμα λειτουργεί για $t < 0$
- Άρα, πρέπει να υπολογιστούν οι αρχικές συνθήκες στο $t = 0$
- Το κύκλωμα είναι για $t < 0$:



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Παρατηρούμε ότι εξ αιτίας τής πηγής τάσης στα δεξιά, το κύκλωμα λειτουργεί για $t < 0$
- Άρα, πρέπει να υπολογιστούν οι αρχικές συνθήκες στο $t = 0$
- Το κύκλωμα είναι για $t < 0$:



$$\frac{3}{2+1} = 1 \Rightarrow i_o = -1\text{ A} \Rightarrow$$

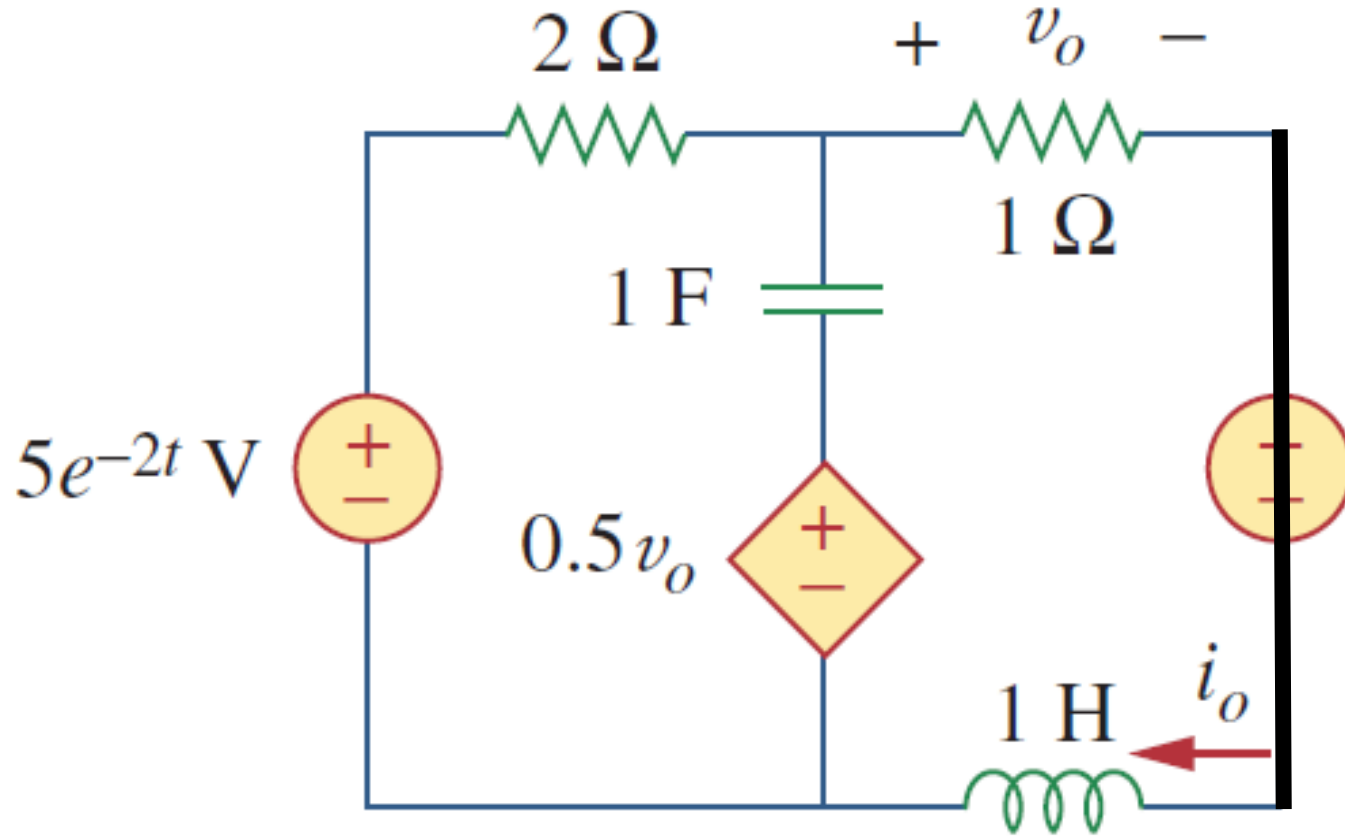
$$i_L(0) = -1 \Rightarrow$$

$$v_o(0) = -1\text{ V} \Rightarrow$$

$$v_C(0) = (2 \times 1) - (-0,5) = 2,5\text{ V}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Το κύκλωμα για $t > 0$ γίνεται



$$\frac{3}{2+1} = 1 \Rightarrow i_o = -1 \text{ A} \Rightarrow$$

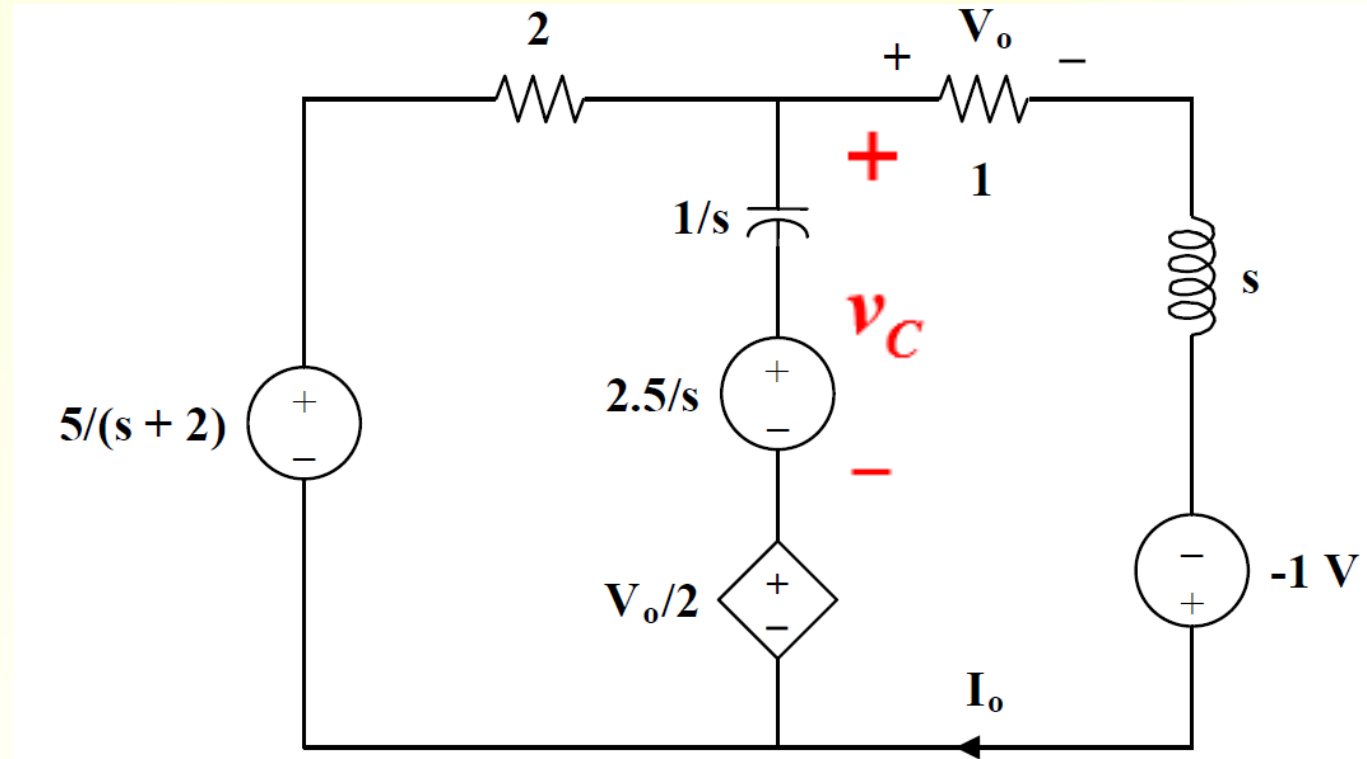
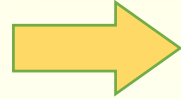
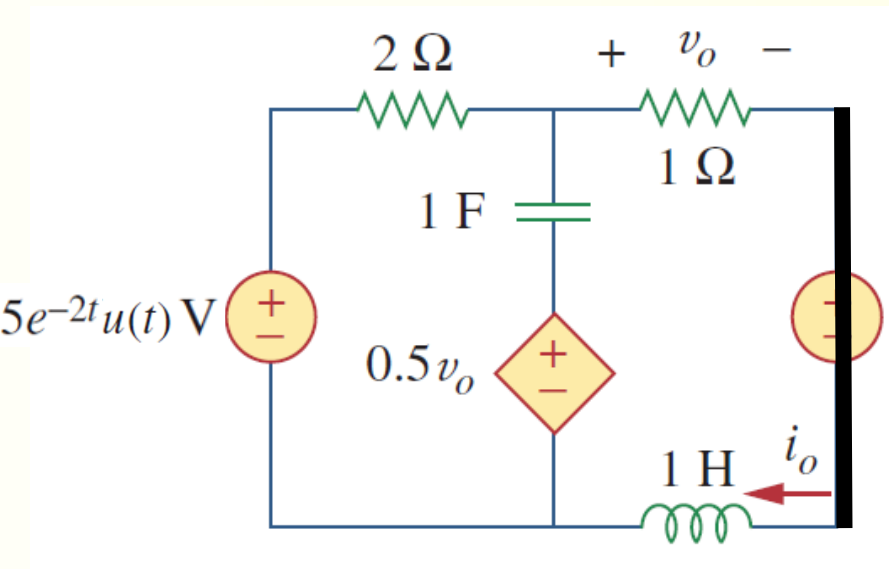
$$i_L(0) = -1 \Rightarrow$$

$$v_o(0) = -1 \text{ V} \Rightarrow$$

$$v_C(0) = (2 \times 1) - (-0,5) = 2,5 \text{ V}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας:



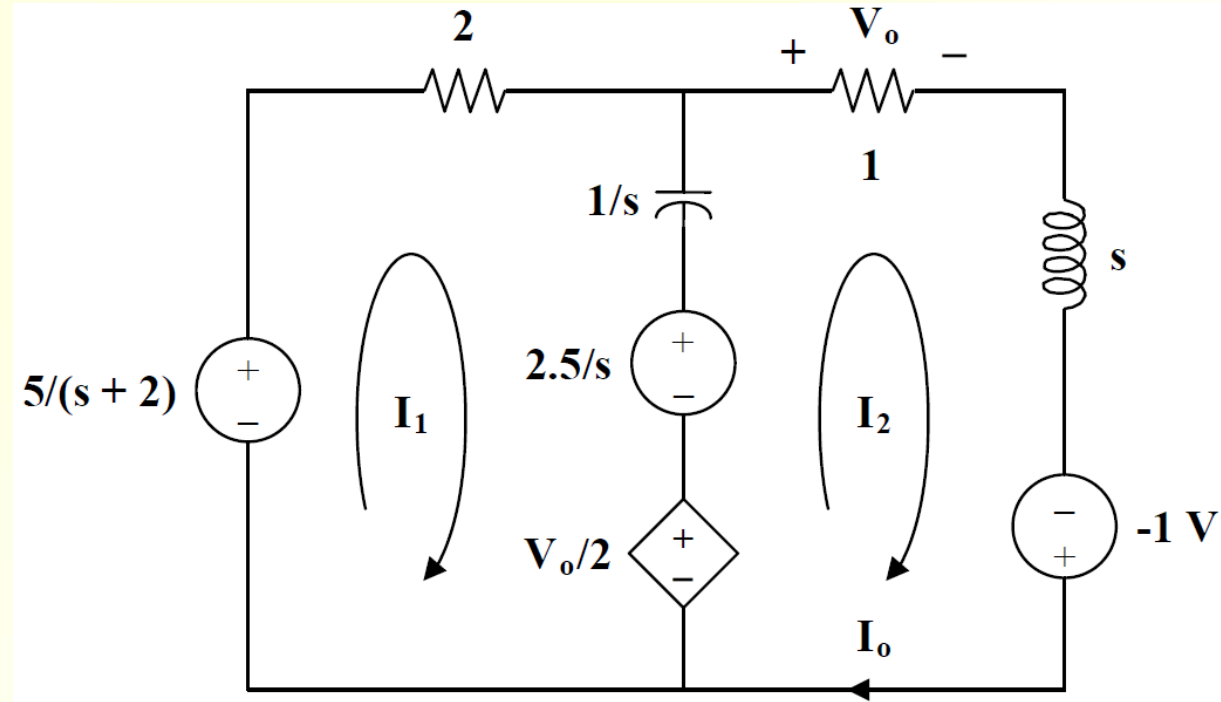
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Επιλύουμε με βροχικές εντάσεις:

$$\frac{-5}{s+2} + \left(2 + \frac{1}{s}\right) I_1 - \frac{1}{s} I_2 + \frac{2,5}{s} + \frac{V_0}{2} = 0$$

$$V_0 = I_0 = I_2 \Rightarrow$$

$$\left(2 + \frac{1}{s}\right) I_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right) I_2 = \frac{5}{s+2} - \frac{2,5}{s}$$



$$\left(1 + s + \frac{1}{s}\right) I_2 - \frac{1}{s} I_1 + 1 - \frac{V_0}{2} - \frac{2,5}{s} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{s} I_1 + \left(\frac{1}{2} + s + \frac{1}{s}\right) I_2 = \frac{2,5}{s} - 1$$

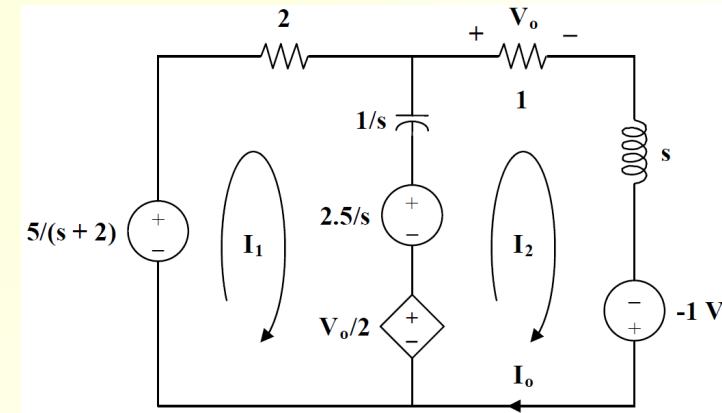
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Επιλύουμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{s} & \frac{1}{2} - \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{2} + s + \frac{1}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{s+2} - \frac{2,5}{s} \\ \frac{2,5}{s} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 2s + 2 + \frac{3}{s} \quad \Delta_2 = -2 + \frac{4}{s} + \frac{5}{s(s+2)} = 0$$

$$I_0 = I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2s^2 + 13}{(s+2)(2s^2 + 2s + 3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+0,5-j1,12} + \frac{B^*}{s+0,5+j1,12}$$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

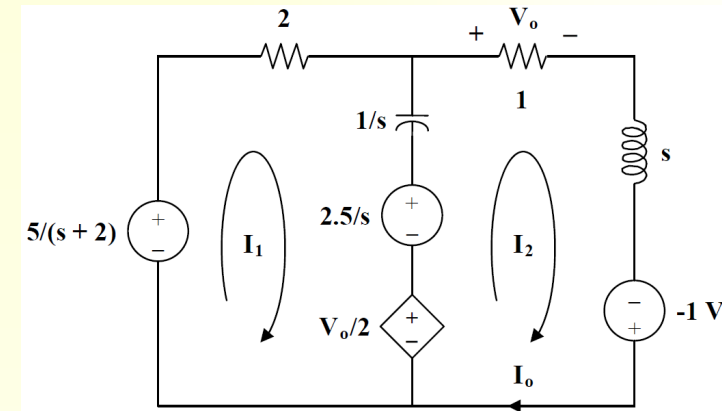
$$I_0 = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+0,5-j1,12} + \frac{B^*}{s+0,5+j1,12}$$

$$= \frac{0,71}{s+2} + \frac{-1,71-j3,19}{s+0,5-j1,12} + \frac{-1,71+j3,19}{s+0,5+j1,12}$$

$\Rightarrow$

$$i_0(t) = \left[0,71e^{-2t} - 1,71e^{-0,5t} \cos(1,12t) + 3,19e^{-0,5t} \sin(1,12t) \right] u(t) \text{ A}$$

$$i_0(t) = \left[0,71e^{-2t} - 3,63 \cos(1,12t + 61,78^\circ) e^{-0,5t} \right] u(t) \text{ A}$$

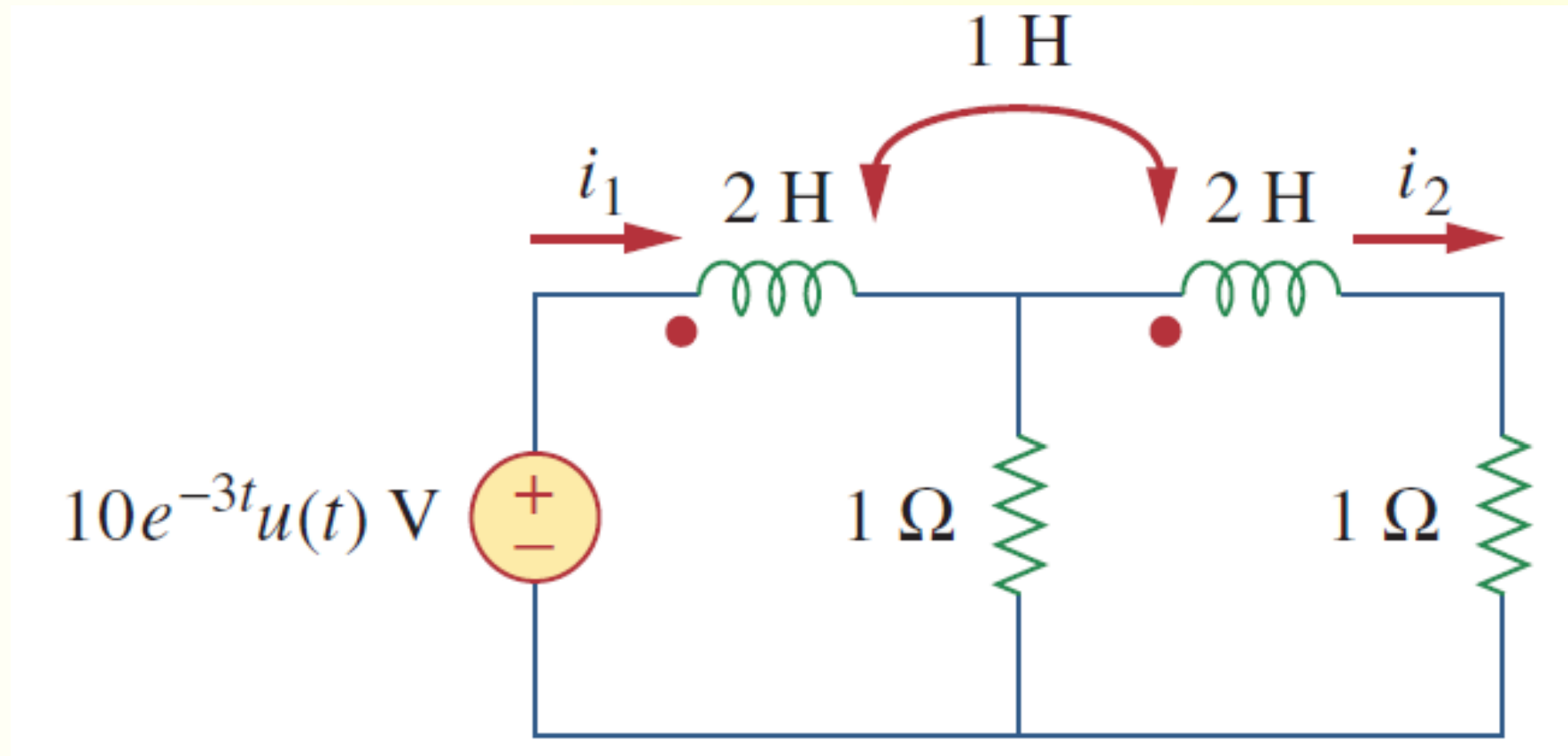


$$\frac{\gamma + j\delta}{s + \alpha - j\beta} + \frac{\gamma - j\delta}{s + \alpha + j\beta} = 2e^{-\alpha t} [\gamma \cos(\beta t) + \delta \sin(\beta t)]$$

$$\frac{|K|e^{j\theta}}{s + \alpha - j\beta} + \frac{|K|e^{-j\theta}}{s + \alpha + j\beta} = 2|K|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$

17

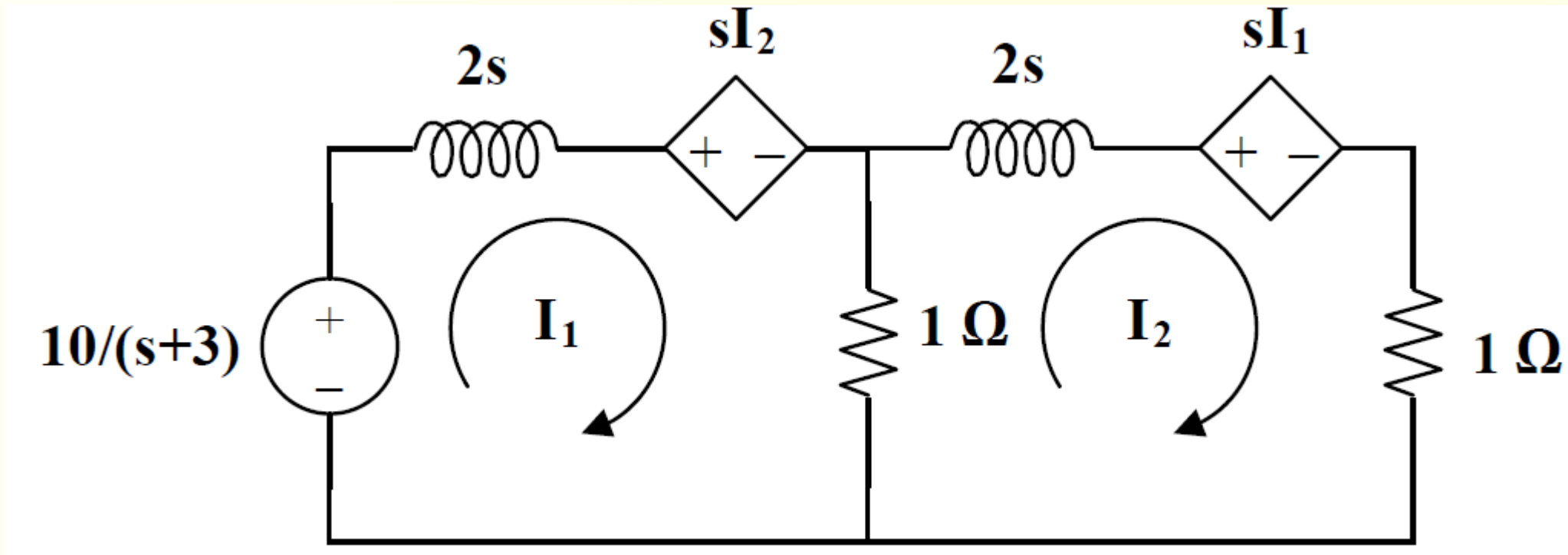
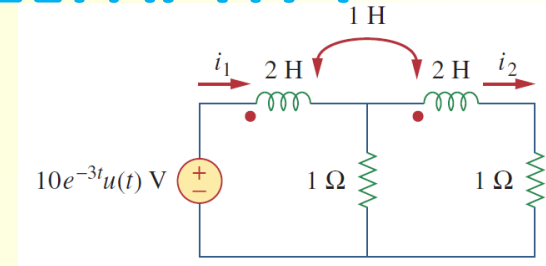
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



- Να υπολογιστούν τα ρεύματα $I_1(s)$ και $I_2(s)$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

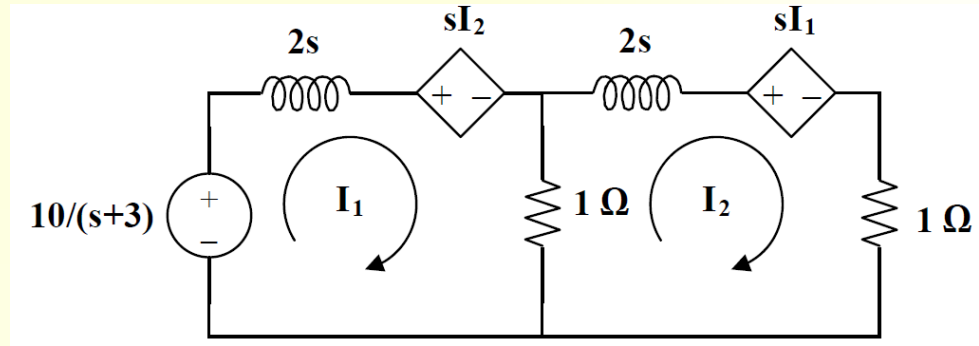
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε βροχικές εντάσεις
- Οι αρχικές συνθήκες είναι εμφανώς μηδενικές
- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας:



- Οι αμοιβαία επαγόμενες τάσεις καταγράφονται από τις εξαρτημένες πηγές

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

$$-\frac{10}{s+3} + 2sI_1 + sI_2 + 1 \cdot (I_1 - I_2) = 0$$
$$1 \cdot (I_2 - I_1) + 2sI_2 + sI_1 + 1 \cdot I_2 = 0$$



$$(2s + 1)I_1 + (s - 1)I_2 = \frac{10}{s + 3}$$

$$(s - 1)I_1 + (2s + 2)I_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2s + 1 & s - 1 \\ s - 1 & 2s + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{s + 3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

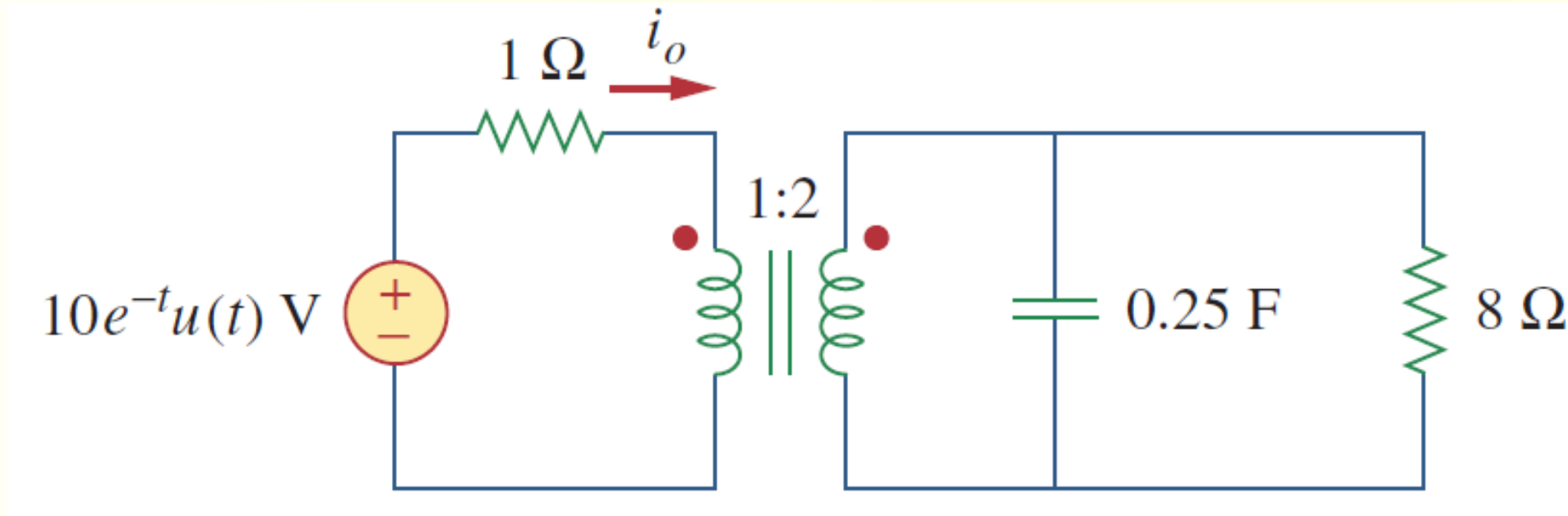
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

$$\begin{pmatrix} 2s+1 & s-1 \\ s-1 & 2s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{10}{s+3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(2s+1)(2s+2) - (s-1)^2} \begin{pmatrix} 2s+2 & -s+1 \\ -s+1 & 2s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{s+3} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$= \frac{1}{3s^2 + 8s + 1} \begin{pmatrix} 2s+2 & -s+1 \\ -s+1 & 2s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{s+3} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20(s+1)}{(3s^2 + 8s + 1)(s+3)} \\ \frac{-10(s-1)}{(3s^2 + 8s + 1)(s+3)} \end{pmatrix}$$

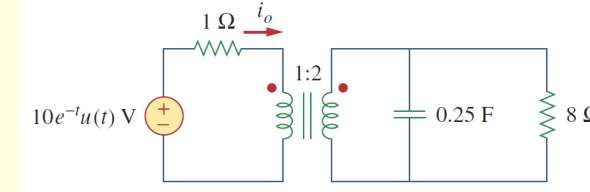
18

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

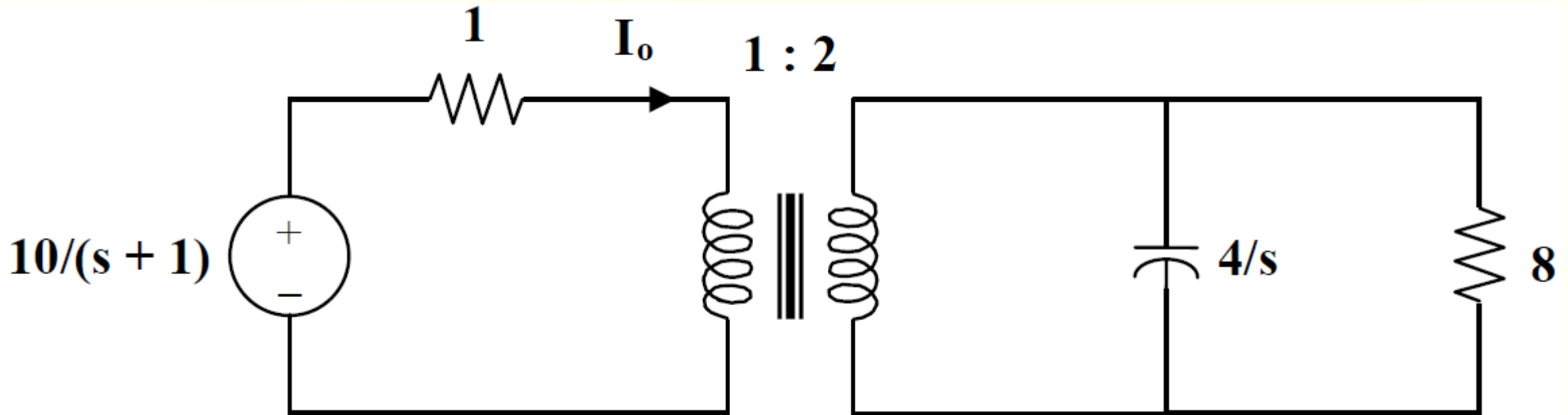


- Να υπολογιστεί το ρεύμα $i_o(t)$ για $t > 0$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

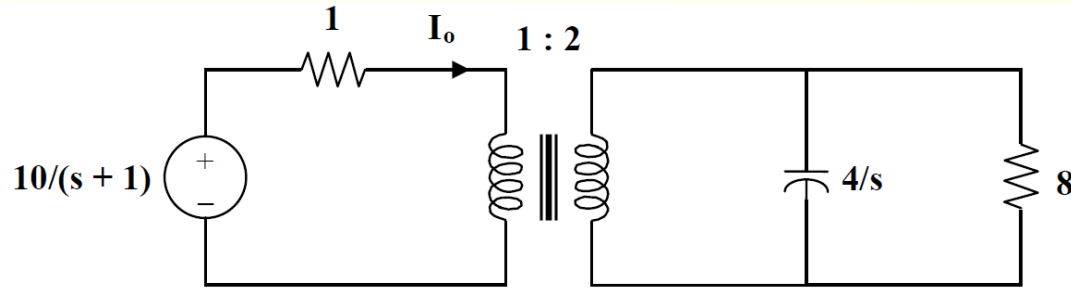


- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας (μηδενικές αρχικές συνθήκες)



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Θεωρούμε τον παράλληλο συνδυασμό 8Ω και $4/s$ σαν Z_L και υπολογίζουμε την ανάκλασή του στο πρωτεύον



$$Z_L = 8 \parallel \frac{4}{s} = \frac{(8)(4/s)}{8 + 4/s} = \frac{8}{2s + 1}$$

$$Z_{eq}(j\omega) = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 Z_L(j\omega) \Rightarrow$$

$$Z_{in} = 1 + \frac{Z_L}{n^2}, \quad n = 2$$

$$Z_{in} = 1 + \frac{2}{2s + 1} = \frac{2s + 3}{2s + 1}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Όστε να πάρουμε ότι

$$I_o = \frac{10}{s+1} \cdot \frac{1}{Z_{in}} = \frac{10}{s+1} \cdot \frac{2s+1}{2s+3}$$

$$I_o = \frac{10s+5}{(s+1)(s+1.5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1.5}$$

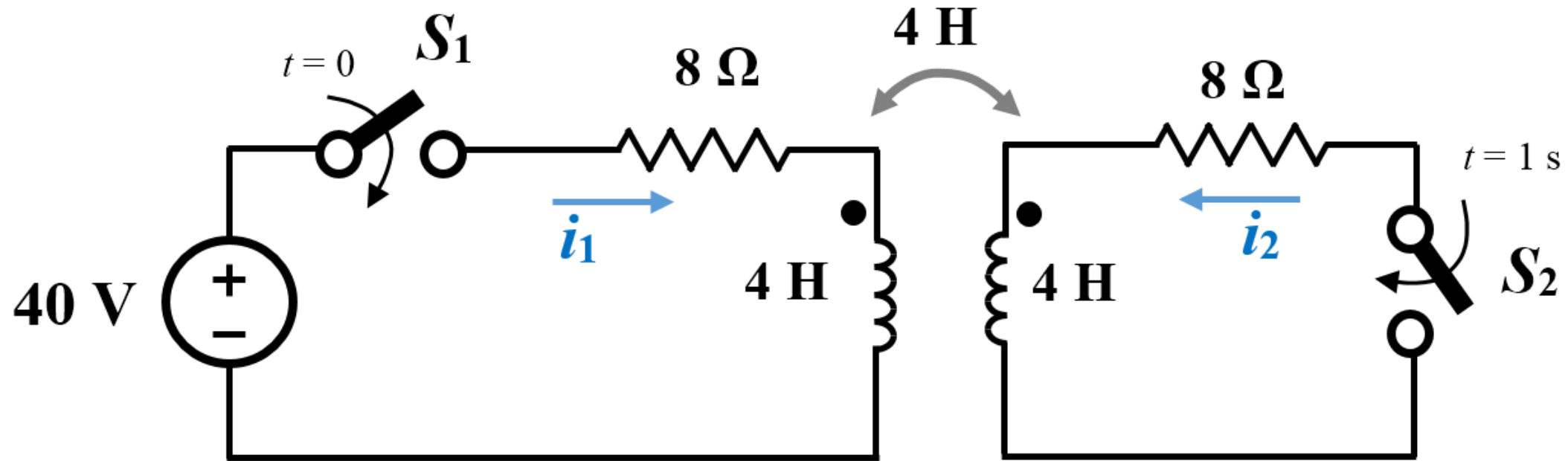
$$A = -10, \quad B = 20$$

$$I_o(s) = \frac{-10}{s+1} + \frac{20}{s+1.5}$$

$$i_o(t) = 10(2e^{-1,5t} - e^{-t})u(t) \quad A$$

19

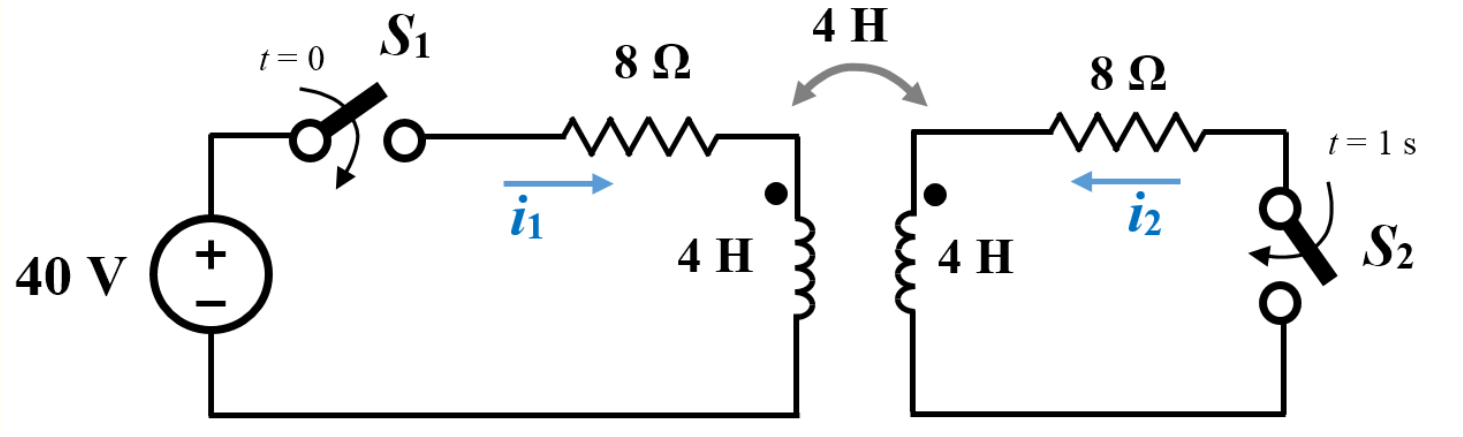
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



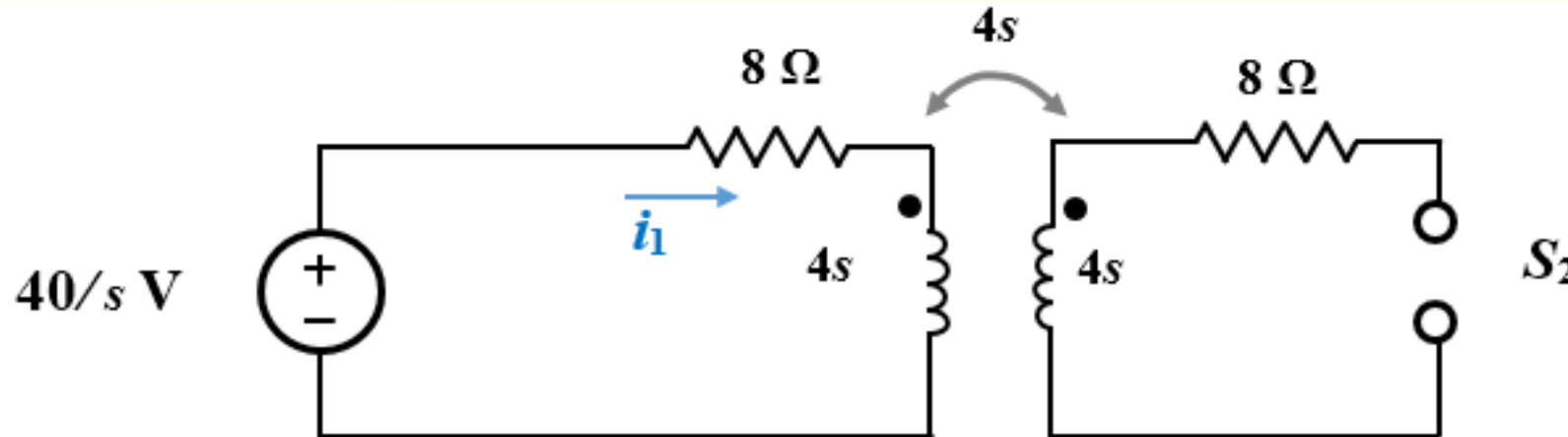
- Ο διακόπτης S_1 κλείνει όταν $t = 0$ και ο διακόπτης S_2 κλείνει όταν $t = 1 \text{ s}$
- Να υπολογιστούν τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ για $t > 0$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Για $0 < t < 1$ το κύκλωμα είναι:

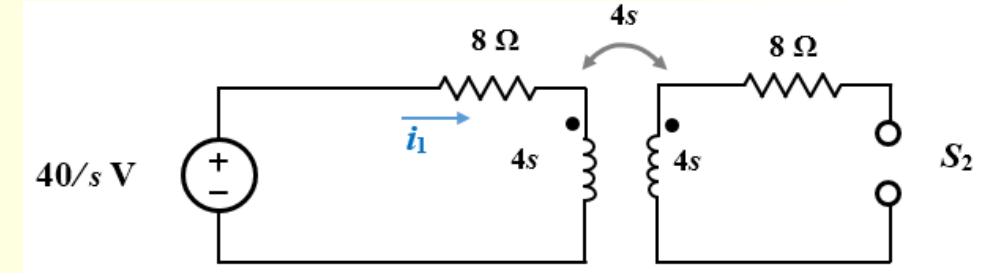


- Και στο πεδίο συχνότητας γίνεται:



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

$$(4s + 8)I_1 = \frac{40}{s} \Rightarrow I_1(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+2}$$



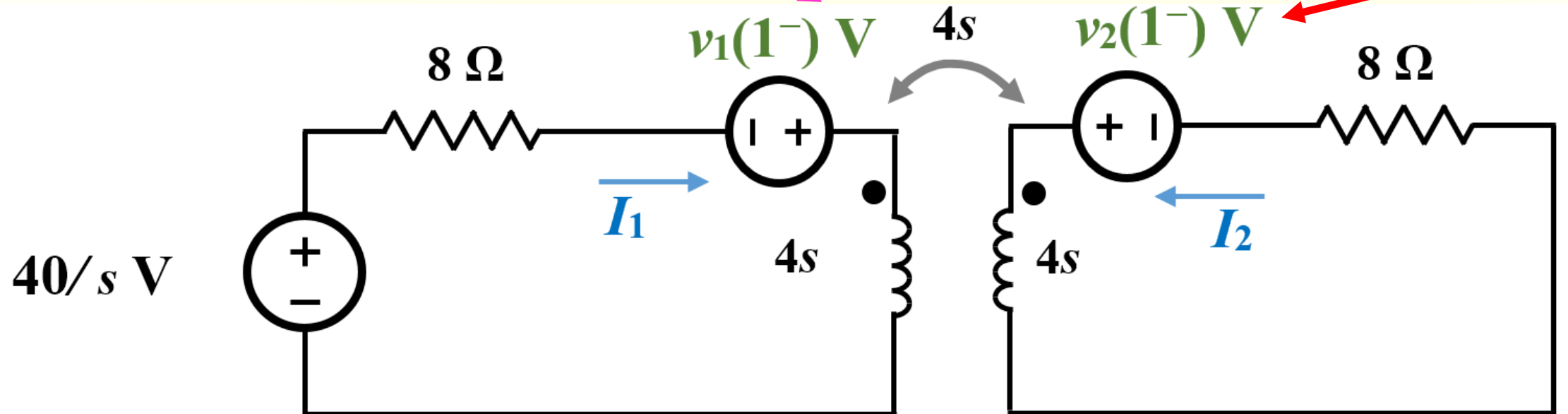
$$i_1(t) = 5(1 - e^{-2t}) \text{ A}, \quad 0 < t < 1$$

$$i_1(1) = 5(1 - e^{-2}) = 4,3233 \text{ A}$$

Για $t \geq 1$ το κύκλωμα είναι:

Από την αυτεπαγωγή

Από την αμοιβαία επαγωγή

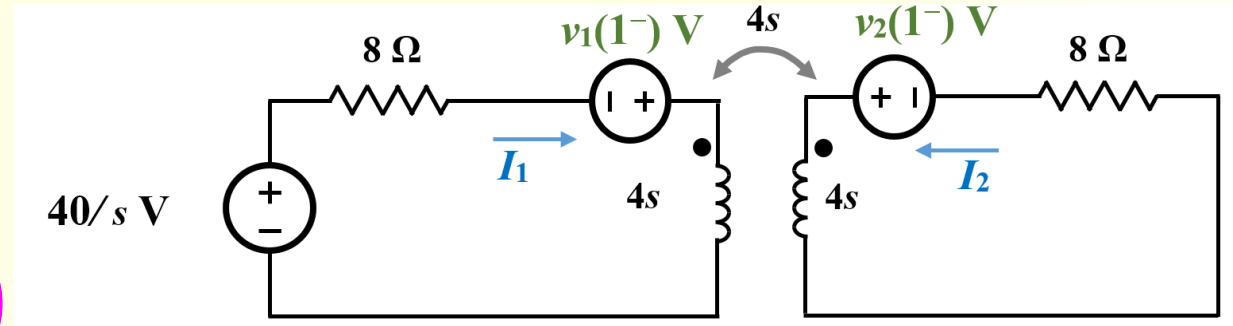


ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Υπολογίζουμε:

$$v_1(1^-) = 4 \times 4,3233 = 17,3 \text{ V} = L_1 \times i_1(1^-)$$

$$v_2(1^-) = 4 \times 4,3233 = 17,3 \text{ V} = M \times i_1(1^-)$$



$$(4s + 8)I_1(s) + 4sI_2(s) = \frac{40}{s} + 17,3$$

$$4sI_1(s) + (4s + 8)I_2(s) = 17,3$$

$$I_1(s) = 4,662 \frac{s + 1,073}{s(s + 1)} = \frac{5}{s} + \frac{0,338}{s + 1}$$

$$I_2(s) = \frac{-0,338}{s + 1}$$

$$(s + 2)I_1 + sI_2 = \frac{10}{s} + 4,32$$

$$sI_1 + (s + 2)I_2 = 4,32$$

$$i_1(t) = 5u(t) - 0,338e^{-t}u(t)$$

$$i_2(t) = -0,338e^{-t}u(t)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο χρόνος t δεν είναι ο σωστός (έπρεπε να ήταν z π.χ.)

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Πρέπει να λάβουμε υπόψη τις πραγματικές συνθήκες για τον χρόνο γιατί η έκφραση που βρήκαμε είναι σωστή δομικά αλλά πρέπει να μεταφερθεί στη σωστή θέση χρονικά:

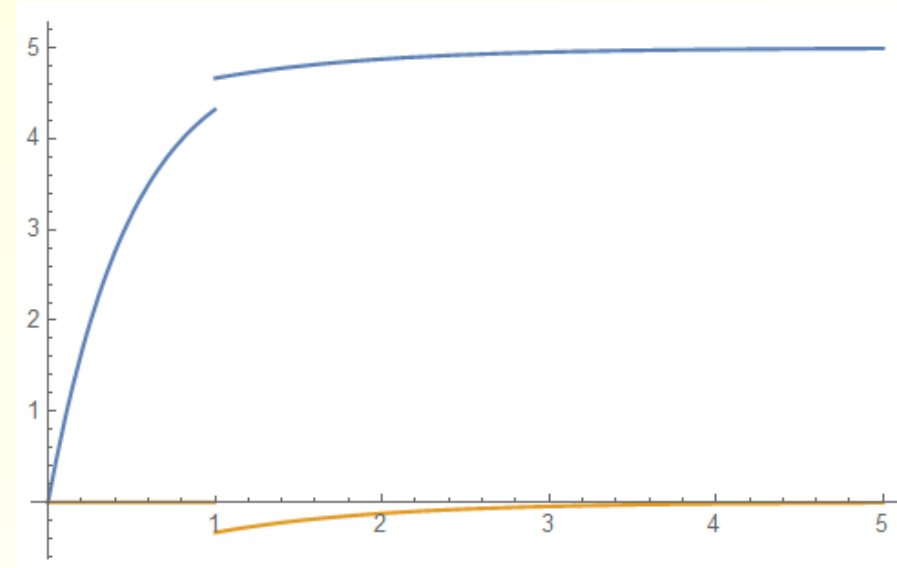
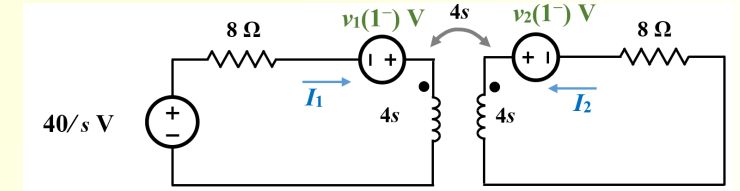
$$i_1(t) = 5u(t-1) - 0,338e^{-(t-1)}u(t-1) \text{ A}$$

$$i_2(t) = -0,338e^{-(t-1)}u(t-1) \text{ A}$$

Τελικά και συνολικά:

$$i_1(t) = 5(1 - e^{-2t})[u(t) - u(t-1)] + 5u(t-1) - 0,338e^{-(t-1)}u(t-1) \text{ A}$$

$$i_2(t) = -0,338e^{-(t-1)}u(t-1) \text{ A}$$

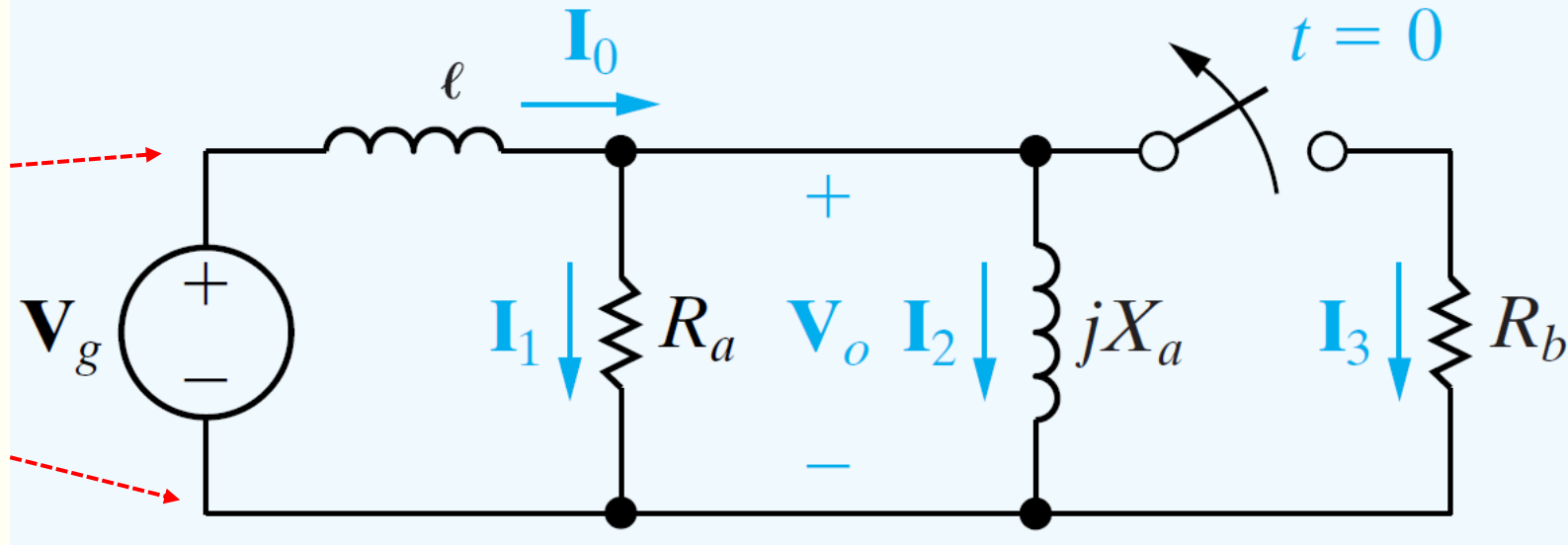


20

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΦΑΣΗ
ΦΑΣΗ

ΟΥΔΕΤΕΡΟΣ
ΟΥΔΕΤΕΡΟΣ



- Ένα **οικιακό** κύκλωμα με τρία φορτία, δυο ωμικά και ένα επαγωγικό, λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Το ένα ωμικό φορτίο αποσυνδέεται (ανοίγει ο διακόπτης) όταν $t = 0$
- Η τυπική **οικιακή** τάση είναι 230 V **rms**
- Υποθέτουμε ότι η τάση V_o είναι 230 V rms $\angle 0^\circ$ όταν $t = 0$
- Να διερευνηθούν οι τιμές που παίρνει η τάση V_o για $t > 0$

“ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ” ΡΕΥΜΑ

ΜΕΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΤΙΜΗ (RMS)

- Η μέση τετραγωνική τιμή (Root Mean Square) περιέχει:
 - μια ύψωση στο τετράγωνο (Square)
 - τη λήψη μιας μέσης τιμής (Mean) και
 - μια τετραγωνική ρίζα (Root)

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} f^2(t) dt}$$

- Μπορεί να οριστεί για οποιαδήποτε συνάρτηση

“ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ” ΡΕΥΜΑ

ΜΕΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΤΙΜΗ (RMS)—ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ

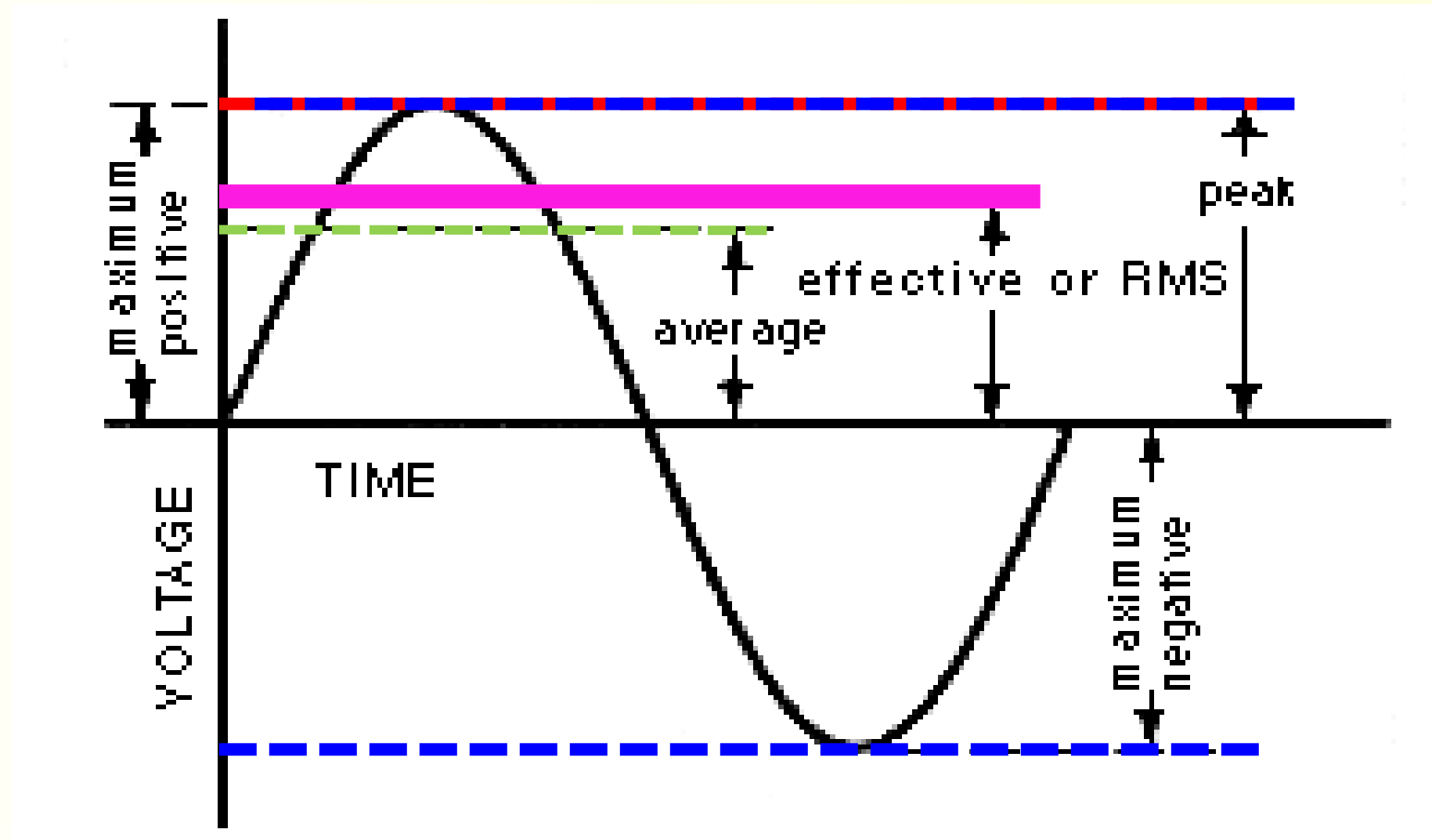
- Η μέση τετραγωνική τιμή για το «εναλλασσόμενο» υπολογίζεται:

$$\begin{aligned} f_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [A \cos(\omega t)]^2 dt} = \sqrt{A^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt} \\ &= \sqrt{A^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t)] dt} = \sqrt{\frac{A^2 T}{2T} + A^2 \frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t) dt} \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{A^2}{2} + 0} \\ &= \frac{A}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Για την ημιτονοειδή (cos) γράφουμε: $V_{rms} = V_{dc}$ εννοώντας ότι η τιμή rms στο εναλλασσόμενο είναι το ισοδύναμο του συνεχούς ρεύματος (κύρια χρήση σε θέματα ισχύος και μετρήσεις)

“ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ” ΡΕΥΜΑ

- ΜΕΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΤΙΜΗ (RMS)



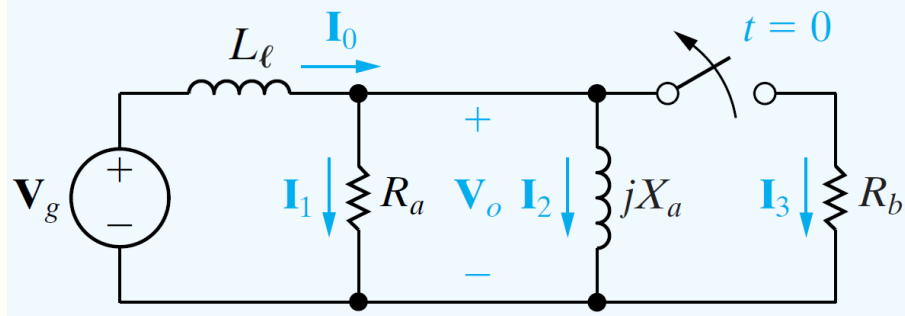
$$A \cos(\omega t)$$

Peak-to-peak

RMS

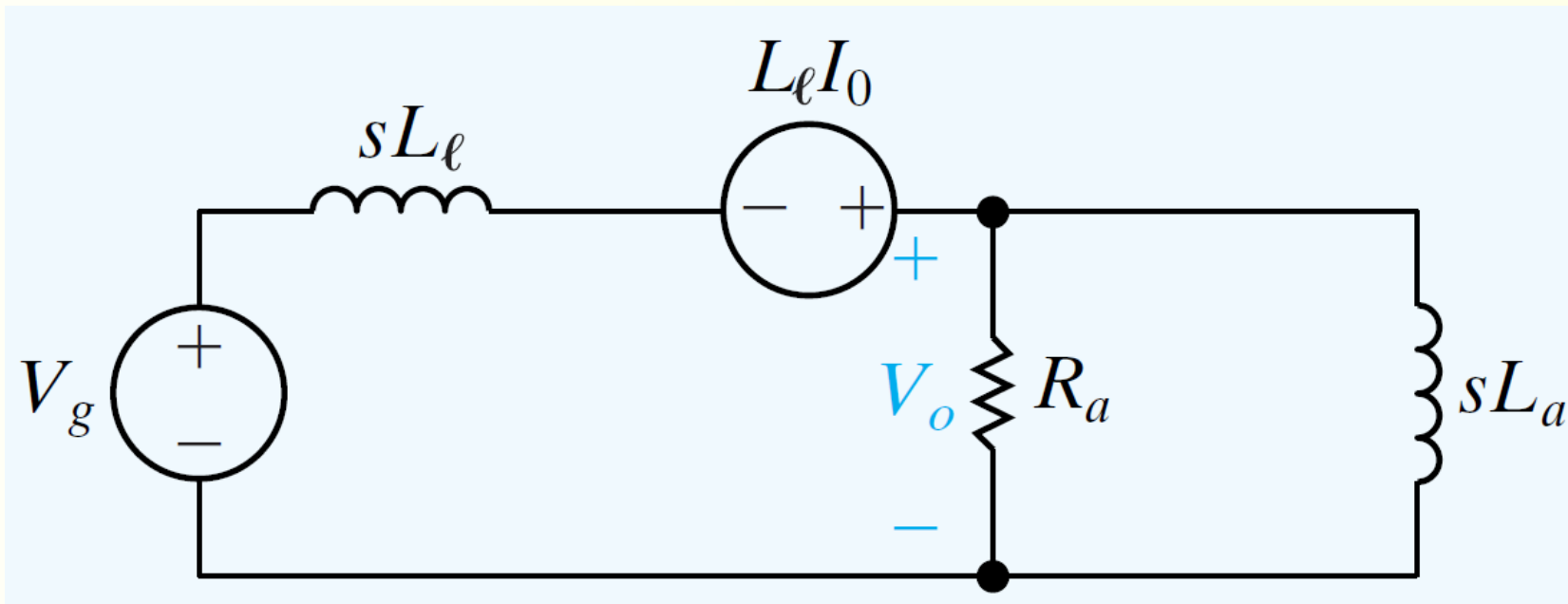
Average

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

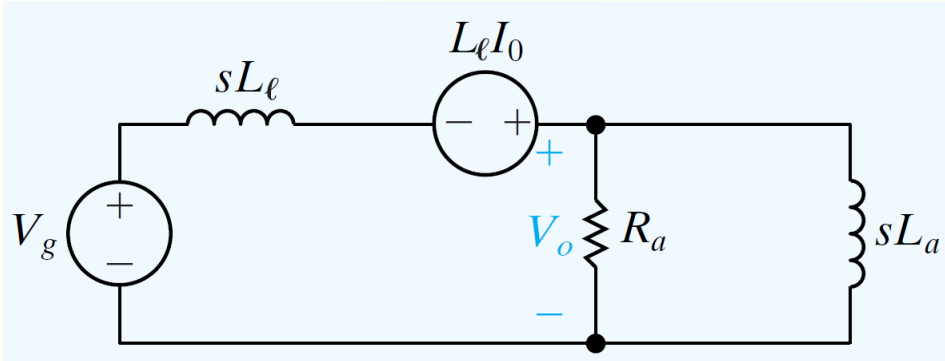


- Υποθέτουμε ότι η τάση V_o είναι $230 \text{ V rms } \angle 0^\circ$ όταν $t = 0$
- Ο διακόπτης ανοίγει όταν $t = 0$

- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας και το κύκλωμα γίνεται

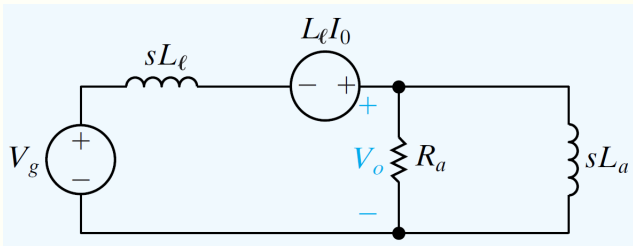


ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



- Το κύκλωμα διαμορφώθηκε έτσι επειδή όταν $t = 0$:
 1. Υπάρχει ένα αρχικό ρεύμα I_0 από τη λειτουργία έως το $t = 0$
 2. Το αρχικό ρεύμα τού επαγωγικού φορτίου είναι 0 A επειδή η φάση τού V_o είναι 0° (αυτό φαίνεται καλύτερα στο πεδίο τού χρόνου)
 3. Φυσικά, το επαγωγικό φορτίο δεν θα έχει αρχική συνθήκη ($= 0$)
 4. Αυτό σημαίνει ότι η τάση αντιστοιχεί σε ωμικά φορτία μόνο
 5. Η αρχική ημιτονοειδής τάση V_o έχει πλάτος $230 \times 1,414 = 325,27 \text{ V}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



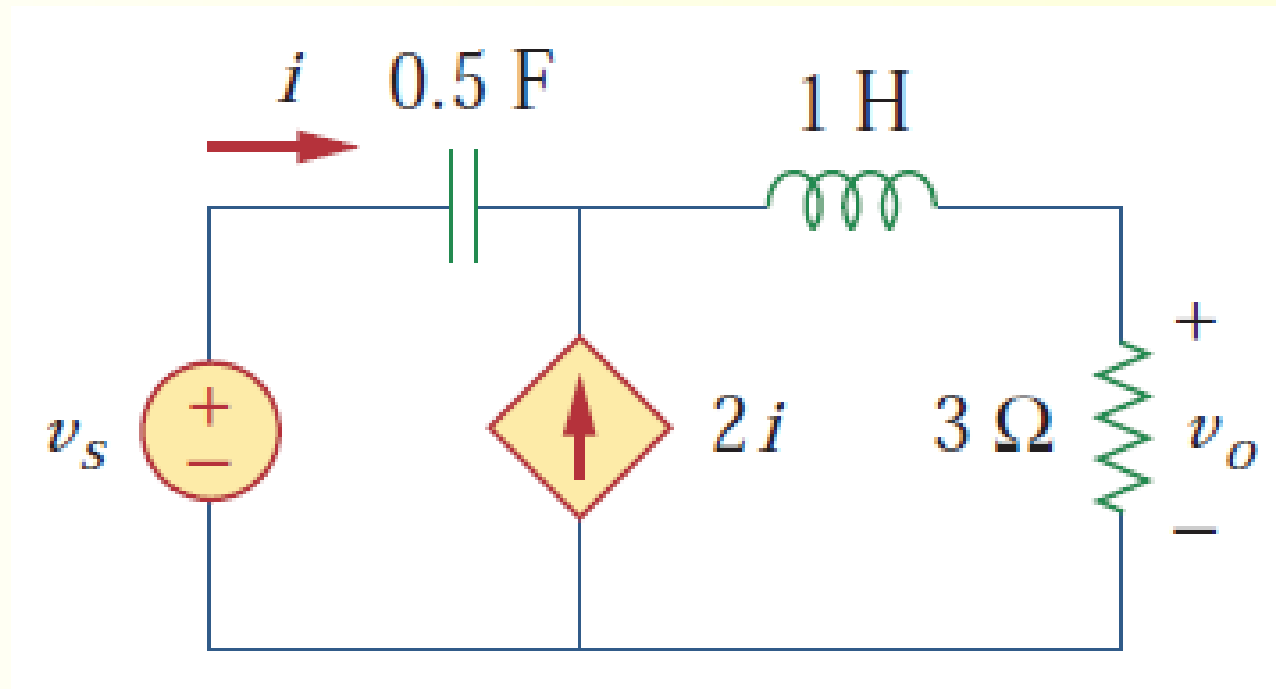
- Όταν ο διακόπτης ανοίξει, το πηνίο θα διατηρήσει το ρεύμα του ($= 0 \text{ A}$)
- Το αρχικό ρεύμα που θα εισρεύσει στο κύκλωμα, θα περάσει αναγκαστικά από το ωμικό φορτίο μόνο
- Το ωμικό φορτίο θα πρέπει να αντέξει στις νέες συνθήκες
- Π.χ. αν το αρχικό ρεύμα είναι $30 \text{ A rms } \angle 0^\circ$ και το ωμικό φορτίο είναι 15Ω , η τάση V_o θα είναι

$$30 \times 1,414 \times 15 = \mathbf{636,4 \text{ V}}$$

- Με τέτοιες τιμές ίσως χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε προστασία από υπέρταση (transient voltage surge suppressor)

21

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



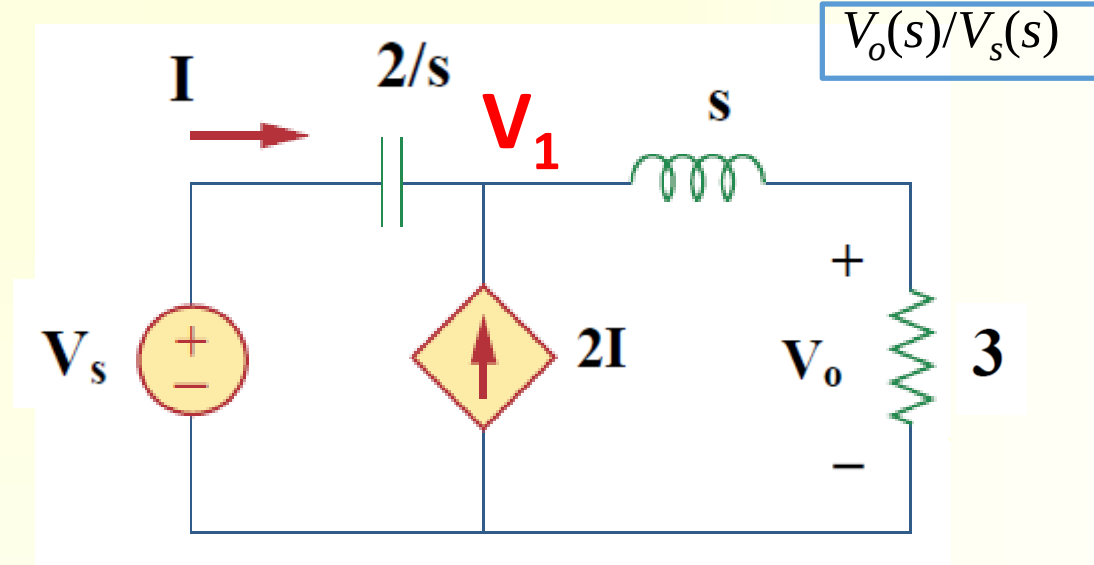
- Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = V_o(s)/V_s(s)$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας
- Με κομβικές τάσεις:

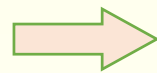
$$2I + I = \frac{V_1}{s+3}$$

$$I = \frac{V_s - V_1}{2/s}$$

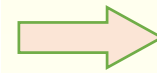


- Που δίνει

$$3 \cdot \frac{V_s - V_1}{2/s} = \frac{V_1}{s+3}$$



$$\frac{V_1}{s+3} = \frac{3s}{2} V_s - \frac{3s}{2} V_1$$



$$\left(\frac{1}{s+3} + \frac{3s}{2} \right) V_1 = \frac{3s}{2} V_s$$

- Καταλήγοντας ότι

$$V_1 = \frac{3s(s+3)}{3s^2 + 9s + 2} V_s$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Επίσης, από την αντίσταση:

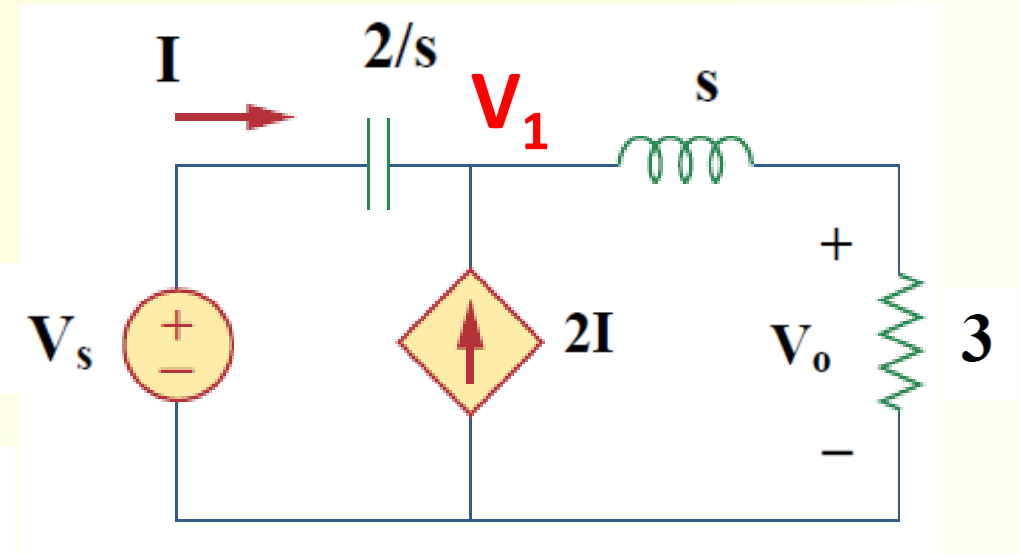
$$V_o = \frac{3}{s+3} V_1$$

- Που γίνεται

$$V_o = \frac{3}{s+3} V_1 = \frac{9s}{3s^2 + 9s + 2} V_s$$

- Και τελικά

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{9s}{3s^2 + 9s + 2}$$



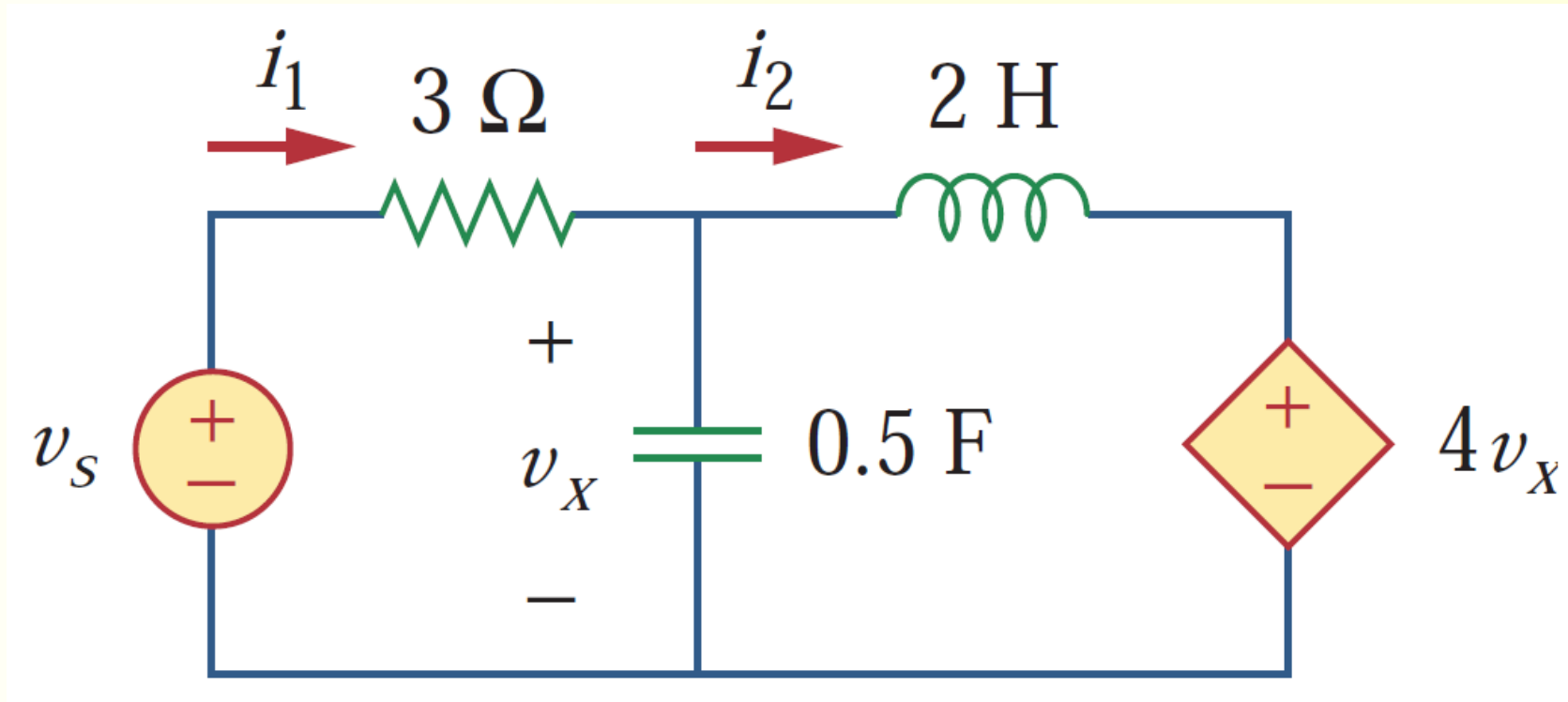
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΒΑΣΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

- Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε μια συνάρτηση κυκλώματος, θα χρησιμοποιούμε τις βασικές τεχνικές (κομβικές τάσεις και βροχικές εντάσεις) όχι με σκοπό να επιλύσουμε το κύκλωμα αλλά για να μάς δώσουν τα μεγέθη που σχηματίζουν τον λόγο που ψάχνουμε (στο παράδειγμα ήταν το $V_o(s)/V_s(s)$ και χρειάστηκε η κομβική τάση σαν «ενδιάμεση»)
- Αυτό θα απαιτήσει ίσως κάποια ευρηματικότητα και ευελιξία και συνεχή εποπτεία κατά τη λύση επειδή τώρα εμείς πρέπει να κατευθύνουμε τη λύση προς τη σωστή κατεύθυνση και να επεμβαίνουμε όταν εμφανίζονται τα μεγέθη που αναζητούμε

22

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



- Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις κυκλώματος $I_1(s)/V_s(s)$ και $I_2(s)/V_x(s)$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

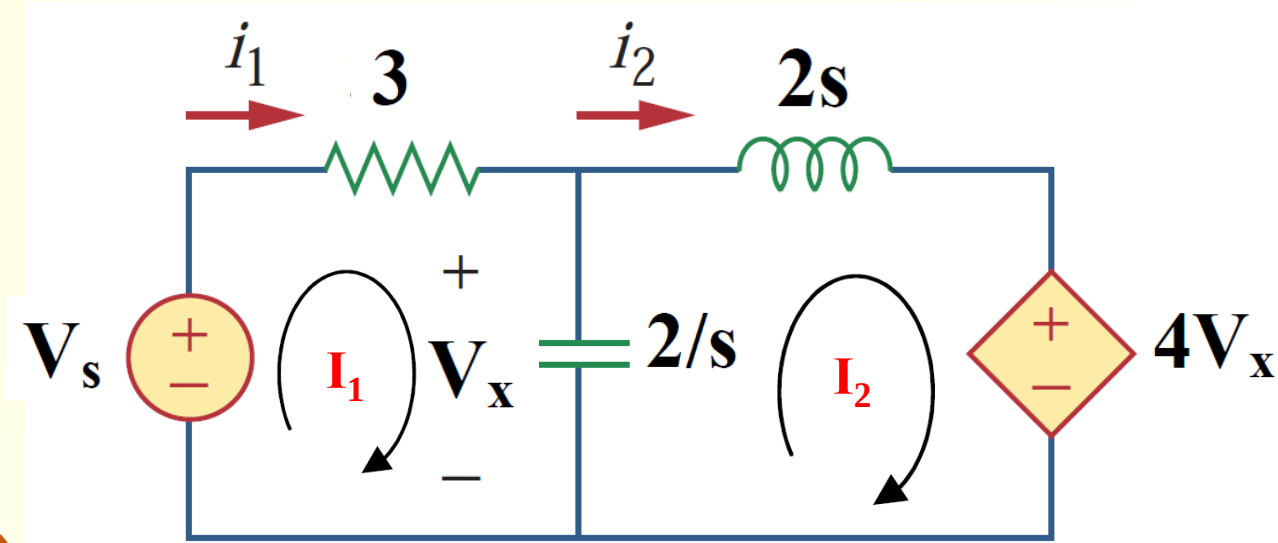
- Περνάμε στο πεδίο συχνότητας
- Με βροχικές εντάσεις:

$$V_s = \left(3 + \frac{2}{s}\right) I_1 - \frac{2}{s} I_2$$

$$4V_x + \left(2s + \frac{2}{s}\right) I_2 - \frac{2}{s} I_1 = 0$$

- Και επειδή ισχύει ότι

$$V_x = (I_1 - I_2) \left(\frac{2}{s}\right)$$



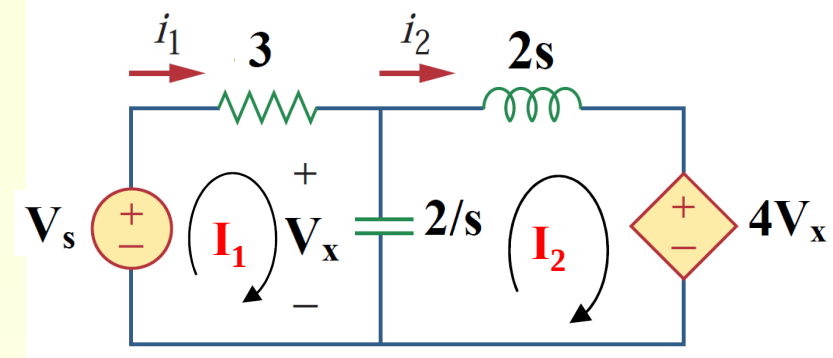
$$\frac{8}{s}(I_1 - I_2) + \left(2s + \frac{2}{s}\right) I_2 - \frac{2}{s} I_1 = 0$$

$$0 = \frac{-6}{s} I_1 + \left(\frac{6}{s} - 2s\right) I_2$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Το τελικό σύστημα είναι

$$\begin{bmatrix} V_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2/s & -2/s \\ -6/s & 6/s - 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



- Που δίνει ότι

$$\Delta = \left(3 + \frac{2}{s}\right)\left(\frac{6}{s} - 2s\right) - \left(\frac{6}{s}\right)\left(\frac{2}{s}\right)$$

$$\Delta = \frac{18}{s} - 6s - 4$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{6}{s} - 2s\right)V_s, \quad \Delta_2 = \frac{6}{s}V_s$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(6/s - 2s)}{18/s - 4 - 6s} V_s$$

$$\frac{I_1}{V_s} = \frac{3/s - s}{9/s - 2 - 3} = \frac{s^2 - 3}{3s^2 + 2s - 9}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

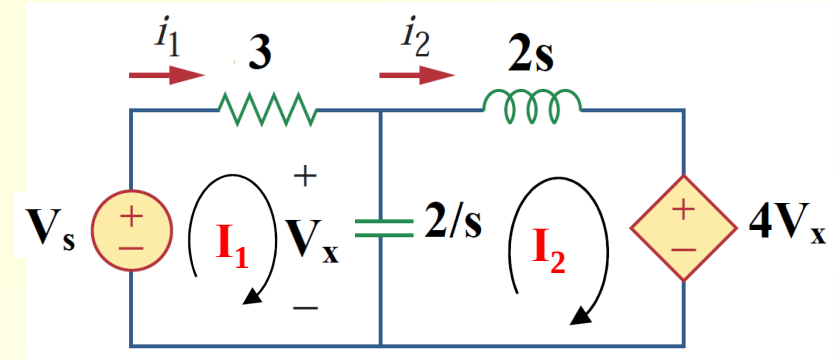
- Συνεχίζοντας:

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

- Και

$$V_x = \frac{2}{s}(I_1 - I_2) = \frac{2}{s} \left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta} \right)$$

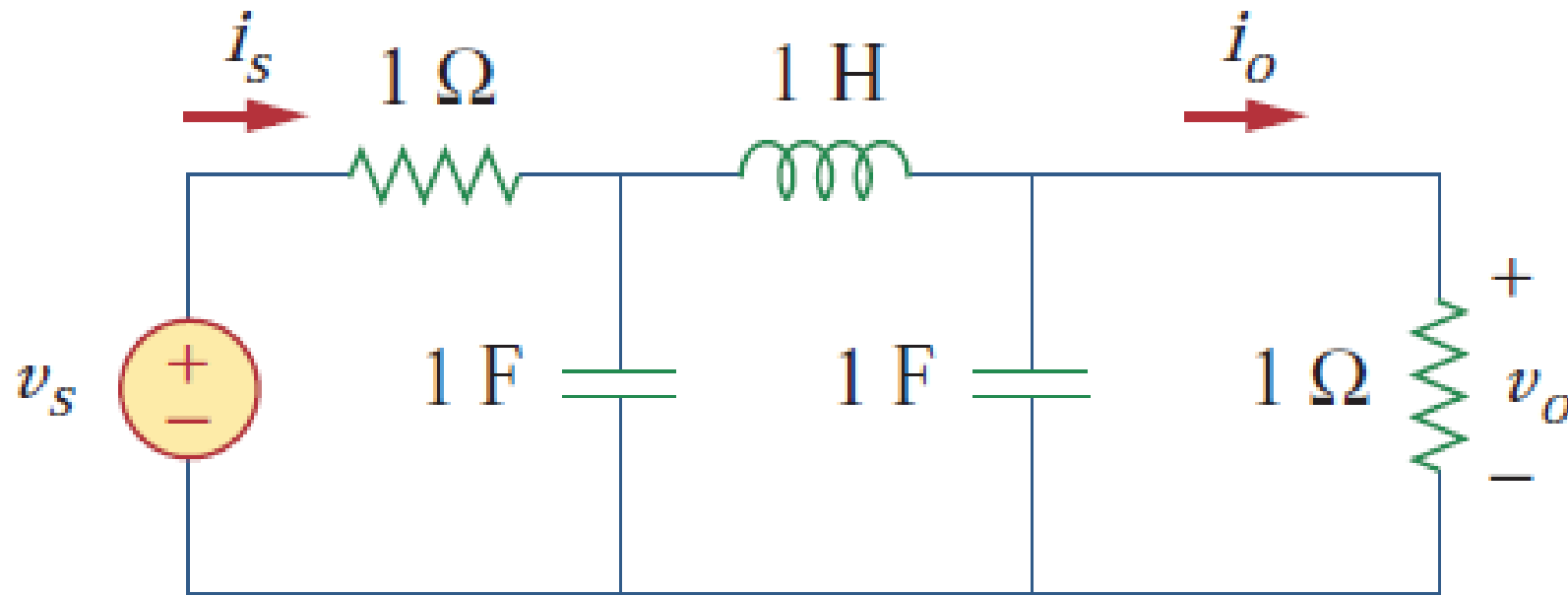
$$V_x = \frac{2/s V_s (6/s - 2s - 6/s)}{\Delta} = \frac{-4V_s}{\Delta}$$



$$\frac{I_2}{V_x} = \frac{6/s V_s}{-4V_s} = \frac{-3}{2s}$$

23

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις κυκλώματος:

(a) $H_1(s) = V_o(s)/V_s(s)$

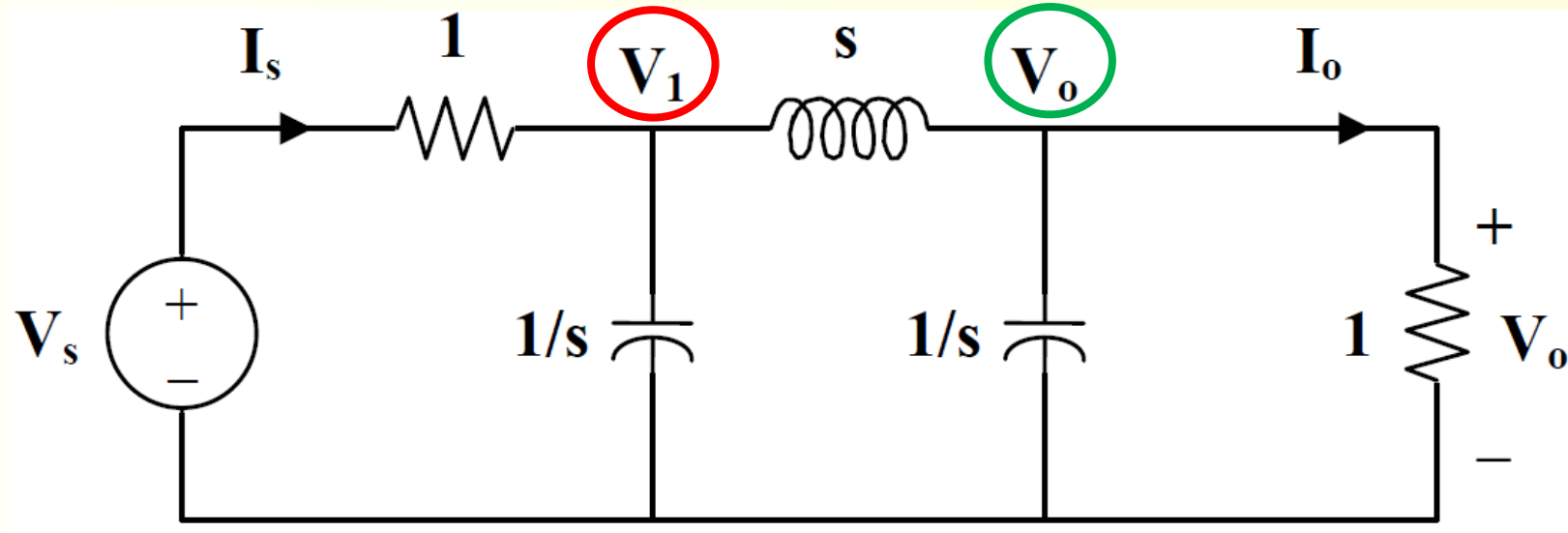
(b) $H_2(s) = V_o(s)/I_s(s)$

(c) $H_3(s) = I_o(s)/I_s(s)$

(d) $H_4(s) = I_o(s)/V_s(s)$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Περνάμε στο πεδίο συχνότητας



Οι κομβικές τάσεις φαίνονται πιο καλή επιλογή

$$\frac{V_s - V_1}{1} = s V_1 + \frac{V_1 - V_o}{s}$$

$$V_s = \left(1 + s + \frac{1}{s}\right) V_1 - \frac{1}{s} V_o$$

$$\frac{V_1 - V_o}{s} = s V_o + V_o = (s + 1) V_o$$

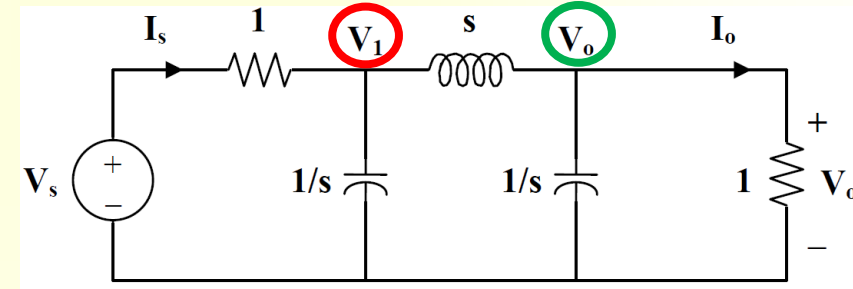
$$V_1 = (s^2 + s + 1) V_o$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Αντικαθιστώντας:

$$V_s = \left(1 + s + \frac{1}{s}\right) V_1 - \frac{1}{s} V_o$$

$$V_1 = (s^2 + s + 1) V_o$$



Θα πάρουμε

$$V_s = (s + 1 + 1/s)(s^2 + s + 1)V_o - 1/s V_o$$

$$V_s = (s^3 + 2s^2 + 3s + 2)V_o$$

Και για το (a):

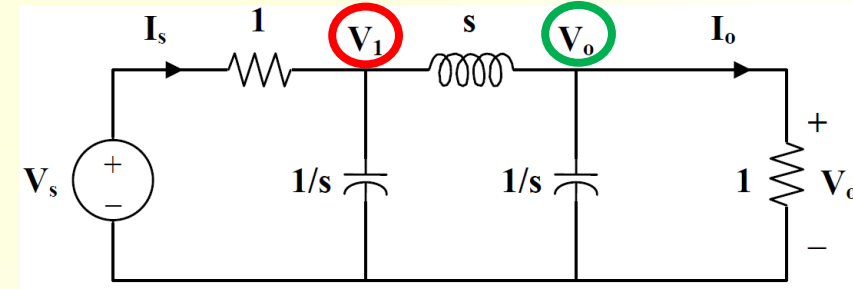
$$H_1(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Επίσης:

$$I_s = V_s - V_1 = (s^3 + 2s^2 + 3s + 2)V_o - (s^2 + s + 1)V_o$$

$$I_s = (s^3 + s^2 + 2s + 1)V_o$$



Θα πάρουμε για το (b):

$$H_2(s) = \frac{V_o}{I_s} = \frac{1}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$$

Και επειδή $I_o = \frac{V_o}{1}$

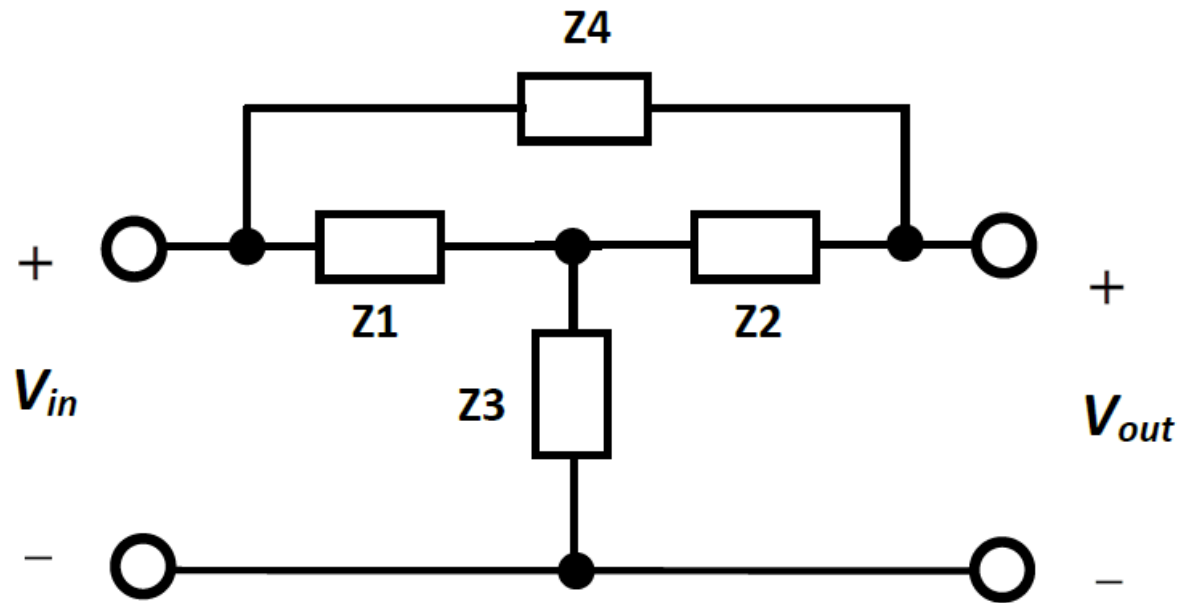
Θα ανακαλύψουμε ότι για το (c) και (d) ότι

$$H_3(s) = \frac{I_o}{I_s} = \frac{V_o}{I_s} = H_2(s)$$

$$H_4(s) = \frac{I_o}{V_s} = \frac{V_o}{V_s} = H_1(s)$$

24

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



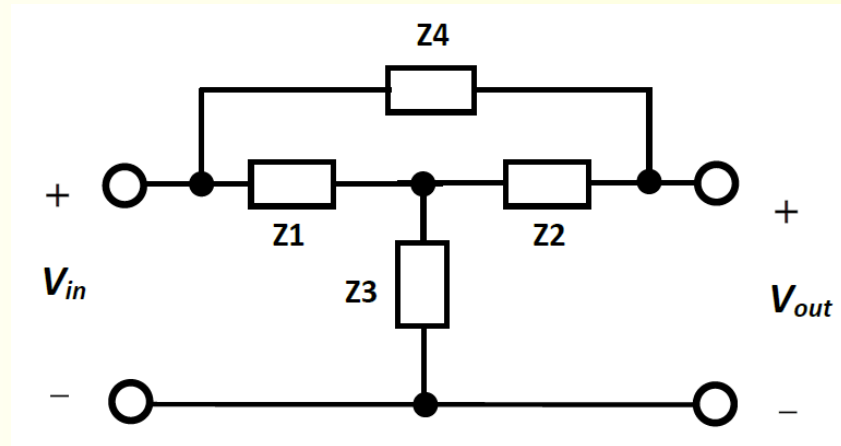
- Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = V_{out}(s)/V_{in}(s)$ για το **κύκλωμα γεφυρωμένου αστέρα** είναι:

$$H = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z1(Z2 + Z3) + Z3(Z2 + Z4)}{Z3(Z2 + Z4) + Z1(Z2 + Z3 + Z4)}$$

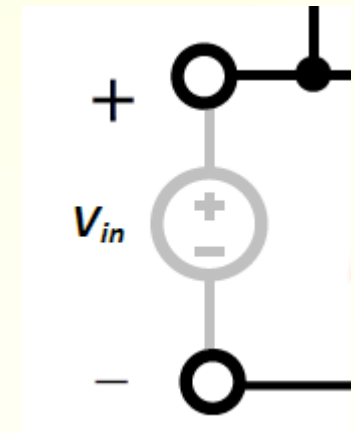
<http://www.sml.ece.upatras.gr/UploadedFiles/BridgedT-TF.pdf>

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

$$H = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$



- Η άσκηση αποτελεί μια υπενθύμιση ότι η είσοδος μπορεί βολικά να αναπαρασταθεί με μια κατάλληλη πηγή
- ...και ότι δουλεύουν και οι δυο τεχνικές



25

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κύκλωμα με συγκεκριμένη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{25}{s^2 + 10s + 125}$$

- Για το ίδιο κύκλωμα έχουμε μια άλλη προδιαγραφή σχετικά με τη βηματική απόκριση, που πρέπει να είναι

$$v_{out}(t) = 0,1 \left[2 - e^{-5t} (3 \cos 10t + 2 \sin 10t) \right] u(t)$$

- Πριν ξεκινήσουμε τον σχεδιασμό, θα θέλαμε να διερευνήσουμε αν οι δυο προδιαγραφές είναι συμβατές μεταξύ τους

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Ο ευθύς τρόπος είναι να ελέγχουμε τις προδιαγραφές είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο τής συχνότητας, π.χ. πρέπει

$$\mathcal{L}\{v_{out}(t)\} = H(s) \cdot \frac{1}{s}$$

- Ο εναλλακτικός τρόπος είναι να ελέγχουμε τις προδιαγραφές σε ακραίες τιμές, δηλ. στο 0 και στο ∞
- Αυτό σημαίνει ότι θα χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής
- Αν οι τιμές στα άκρα **δεν συμπίπτουν** συνεπάγεται αμέσως ότι οι προδιαγραφές είναι **ασύμβατες** και σταματάμε
- Αν οι τιμές στα άκρα **συμπίπτουν** υπάρχει ακόμα αβεβαιότητα για το αν συμπίπτουν για όλες τις ενδιάμεσες τιμές και **πρέπει να ακολουθήσουμε τον κανονικό δρόμο** (έχοντας ήδη ξοδέψει κάποιο χρόνο «άδικα»)

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Οπότε, με το θεώρημα τελικής τιμής:

$$\begin{aligned} v_{out}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s H(s) \cdot \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s H(s) \cdot \frac{1}{s} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{25}{s^2 + 10s + 125} \right] = \frac{25}{125} = 0,2 \end{aligned}$$

- Ενώ για το $v_{out}(\infty)$ από τον ορισμό θα είναι

$$v_{out}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 0,1 \left[2 - e^{-5t} (3 \cos 10t + 2 \sin 10t) \right] \right\} = 0,1 \cdot (2 - 0) = 0,2$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Τώρα, με το θεώρημα αρχικής τιμής:

$$\begin{aligned} v_{out}(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[s H(s) \cdot \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[s H(s) \cdot \frac{1}{s} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{25}{s^2 + 10s + 125} \right] = 0 \end{aligned}$$

- Ενώ για το $v_{out}(0)$ από τον ορισμό θα είναι

$$v_{out}(0) = 0,1 \left[2 - e^{-0} (3 \cos 0 + 2 \sin 0) \right] = 0,1 \cdot \left[2 - 1(3 + 0) \right] = -0,1$$

Σταθήκαμε τυχεροί!... 

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ίδιο σενάριο, με ίδια $H(s)$ αλλά με

$$v_{out}(t) = 0,1 \left[2 - e^{-5t} (2 \cos 10t + 3 \sin 10t) \right] u(t)$$

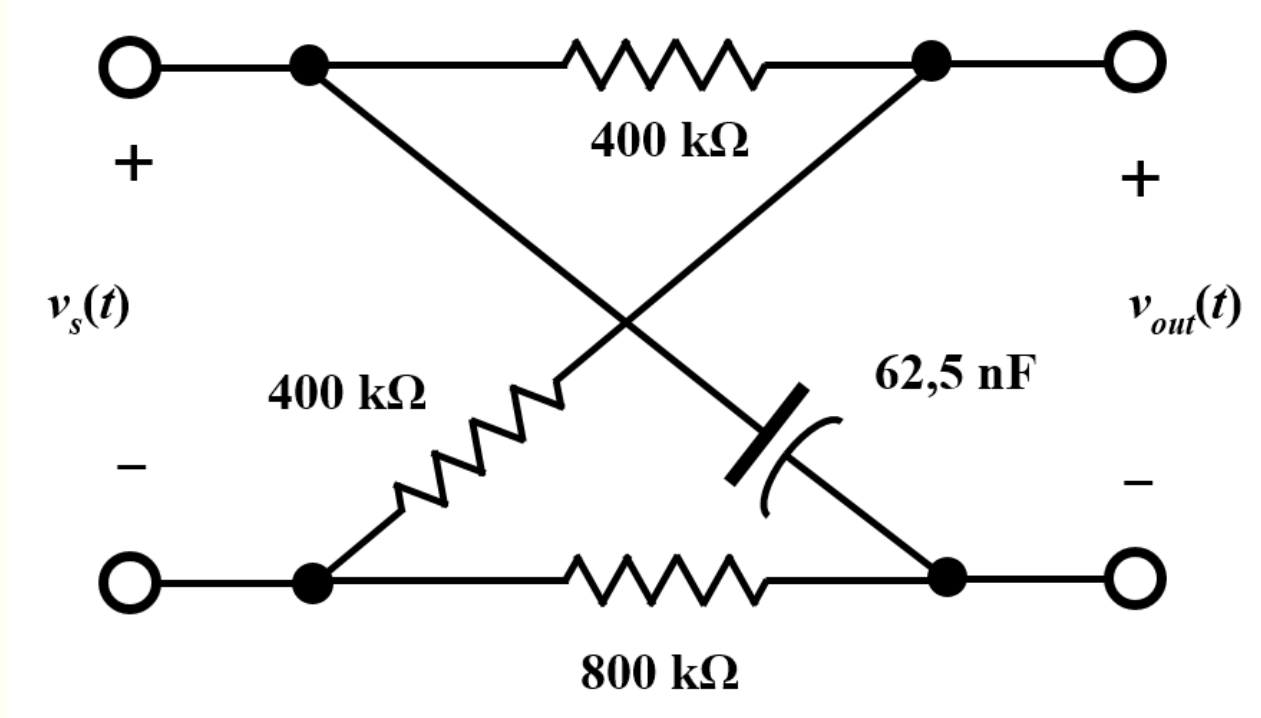
- Ο έλεγχος με το θεώρημα τελικής τιμής δείχνει ότι οι προδιαγραφές συμπίπτουν (τιμή: 0,2)
- Ο έλεγχος με το θεώρημα αρχικής τιμής δείχνει ότι οι προδιαγραφές επίσης συμπίπτουν (τιμή: 0)

- Αλλά:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ 0,1 \left[2 - e^{-5t} (2 \cos 10t + 3 \sin 10t) \right] u(t) \right\} &= 0,1 \left[\frac{2}{s} - 2 \frac{(s+5)}{(s+5)^2 + 10^2} - 3 \frac{10}{(s+5)^2 + 10^2} \right] \\ &= 0,1 \left[\frac{2}{s} - \frac{2s+40}{s^2 + 10s + 125} \right] \\ &= \frac{-2s+25}{s(s^2 + 10s + 125)} \neq \frac{H(s)}{s} \end{aligned}$$

26

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



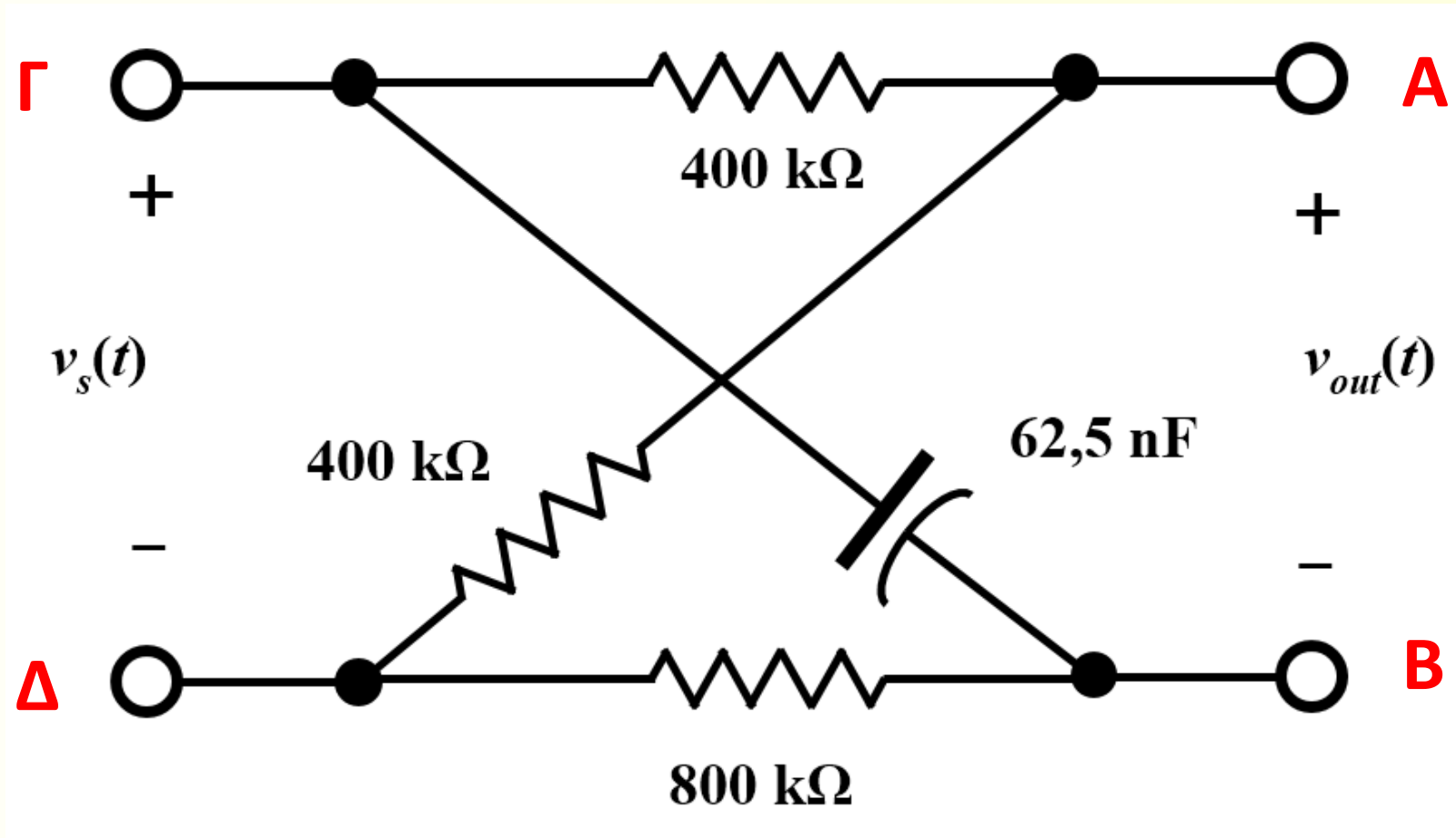
- Στο κύκλωμα αυτό, να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_V(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_s(s)}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πόλοι και τα μηδενικά της

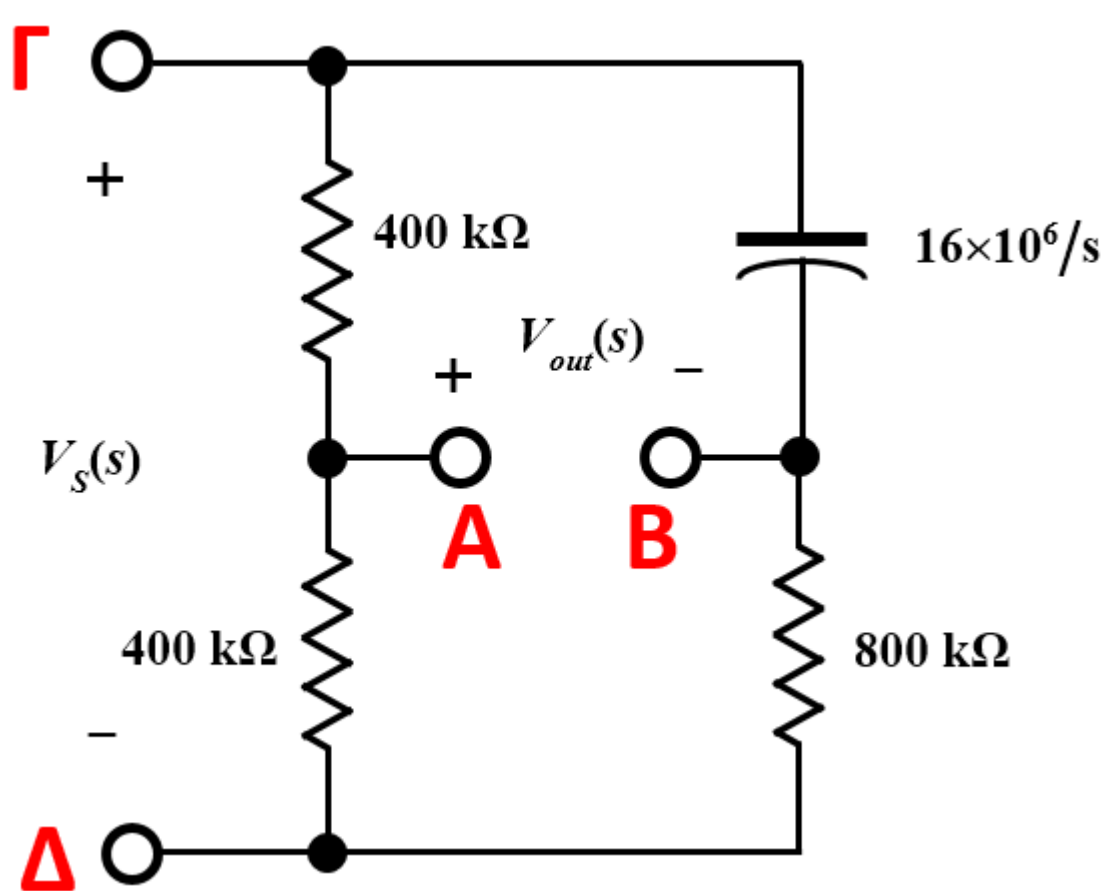
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Βάζουμε ονόματα στους κόμβους

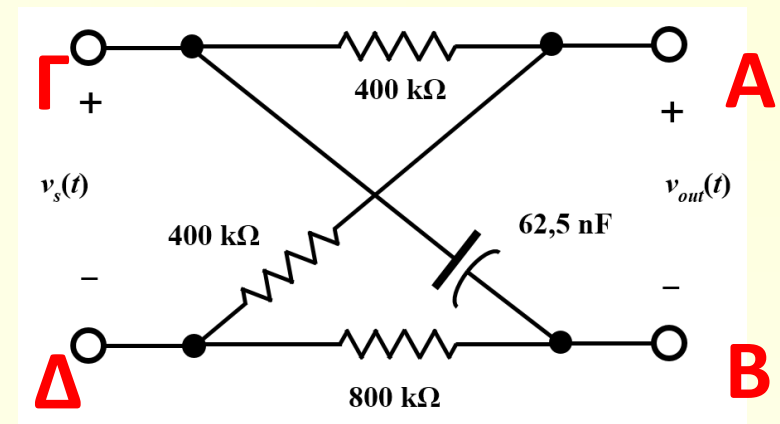


- Και ξανασχεδιάζουμε κατάλληλα στο πεδίο συχνότητας

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



$$V_{out} = V_A - V_B$$



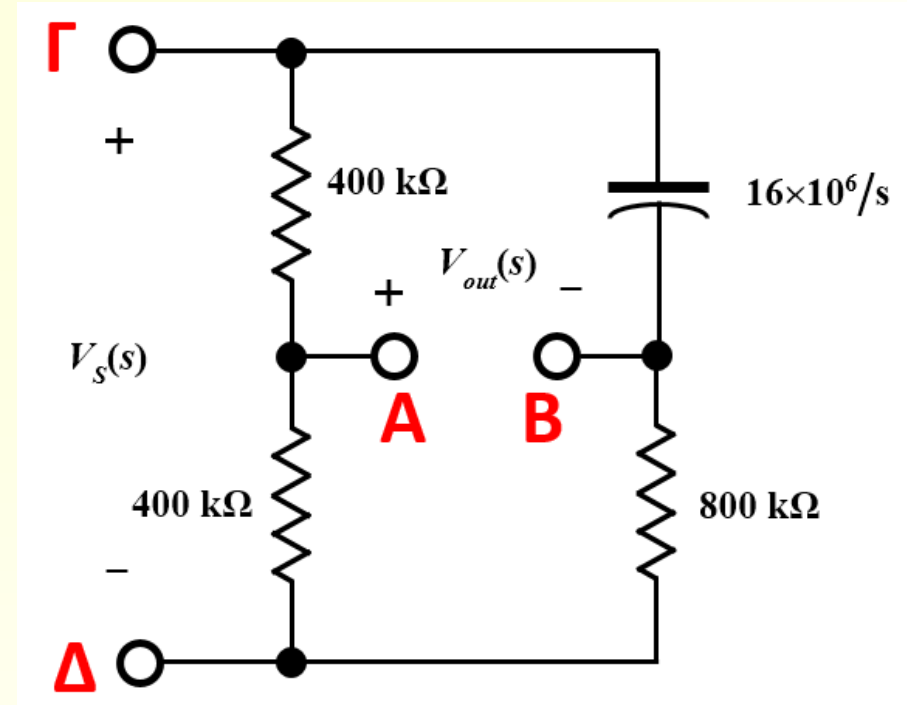
$$V_A = \frac{400000}{400000 + 400000} V_S = 0,5 V_S$$

$$V_B = \frac{800000}{800000 + \frac{16 \times 10^6}{s}} V_S$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

• Άρα:

$$V_{out} = 0,5 V_s - \frac{800000}{800000 + \frac{16 \times 10^6}{s}} V_s$$
$$= 0,5 V_s - \frac{s}{s + 20} V_s$$



• Και τελικά:

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_s} = 0,5 - \frac{s}{s + 20} = \frac{0,5(s + 20) - s}{s + 20} \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{-0,5(s - 20)}{s + 20}$$

← **ΜΗΔΕΝΙΚΟ:** 20 rad/s

← **ΠΟΛΟΣ:** -20 rad/s

27

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{10^4 (s + 6000)}{s^2 + 875s + 88 \times 10^6}$$

- Αν

$$v_{in}(t) = 12,5 \cos(8000t) \text{ V}$$

- Ποιά είναι η τιμή μόνιμης κατάστασης για την $v_{out}(t)$;

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Βασικά,

$$\begin{aligned} H(j8000) &= \frac{10^4 (j8000 + 6000)}{-8000^2 + 875j8000 + 88 \times 10^6} \\ &= \frac{10^7 (6 + j8)}{-64 \times 10^6 + j7 \times 10^6 + 88 \times 10^6} \\ &= \frac{10(6 + j8)10^6}{(24 + j7)10^6} \\ &= 4 \angle 36,87^\circ \end{aligned}$$

- Και

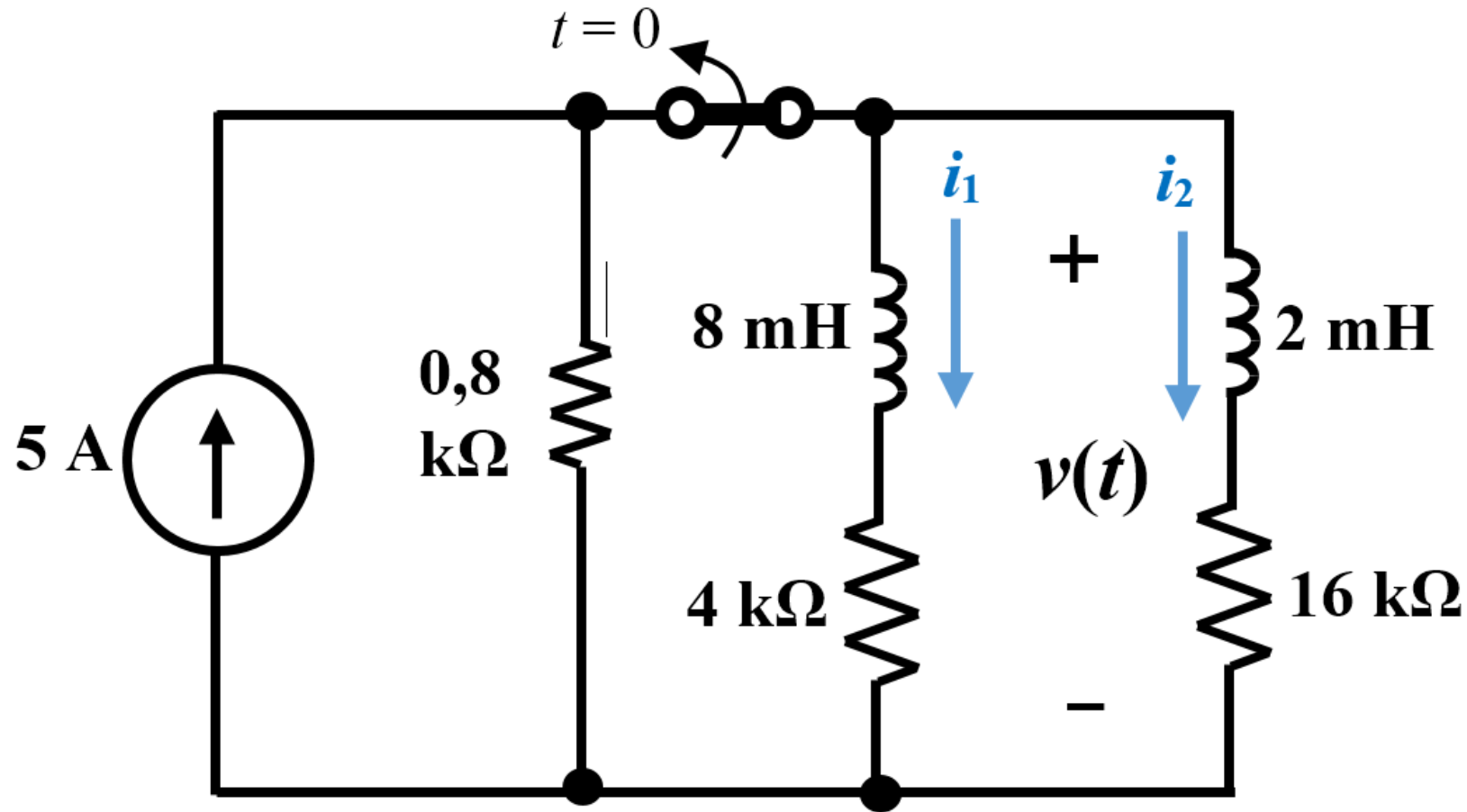
$$V_{out} = 12,5 \angle 0^\circ \times 4 \angle 36,87^\circ = 50 \angle 36,87^\circ \Rightarrow$$

$$v_{out}(t) = 50 \cos(8000t + 36,87^\circ) \text{ V}$$

Υπενθύμιση ότι ο μετ/μος
Laplace συμπεριλαμβάνει
τους φάσορες

28

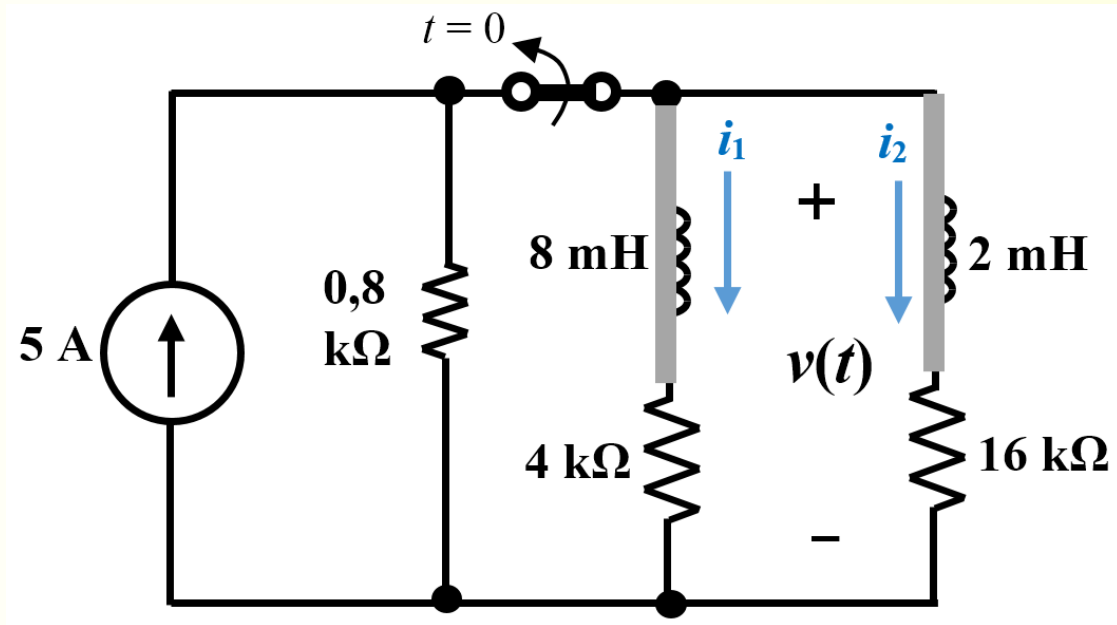
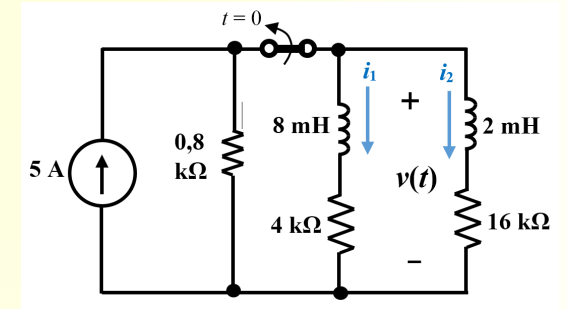
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ



- Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο
- Να υπολογιστεί η τάση $v(t)$ και τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Εξετάζουμε πρώτα για $t < 0$
- Εξαιτίας της πηγής συνεχούς ρεύματος, τα πηνία λειτουργούν σαν βραχυκυκλώματα



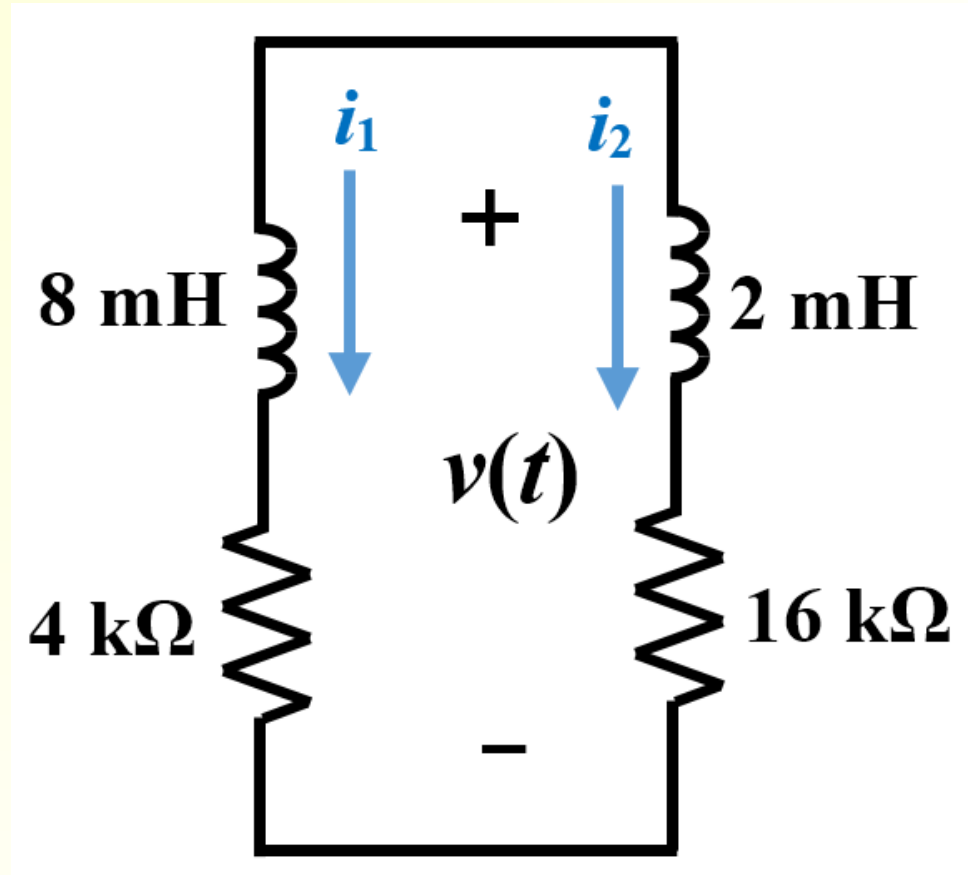
$$R_{ισοδ} = 0,8 \text{ k}\Omega \parallel 4 \text{ k}\Omega \parallel 16 \text{ k}\Omega = 0,64 \text{ k}\Omega \Rightarrow$$

$$v = 0,64 \text{ k}\Omega \times 5 = 3200 \text{ V}$$

$$i_1(0^-) = \frac{3200}{4000} = 0,8 \text{ A}$$
$$i_2(0^-) = \frac{3200}{16000} = 0,2 \text{ A}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Εξετάζουμε τώρα για $t > 0$
- Το αριστερό τμήμα τού κυκλώματος δεν μάς ενδιαφέρει πια
- Βεβαίως τα ρεύματα των πηνίων θα διατηρήσουν την τιμή τους όταν $t = 0^+$



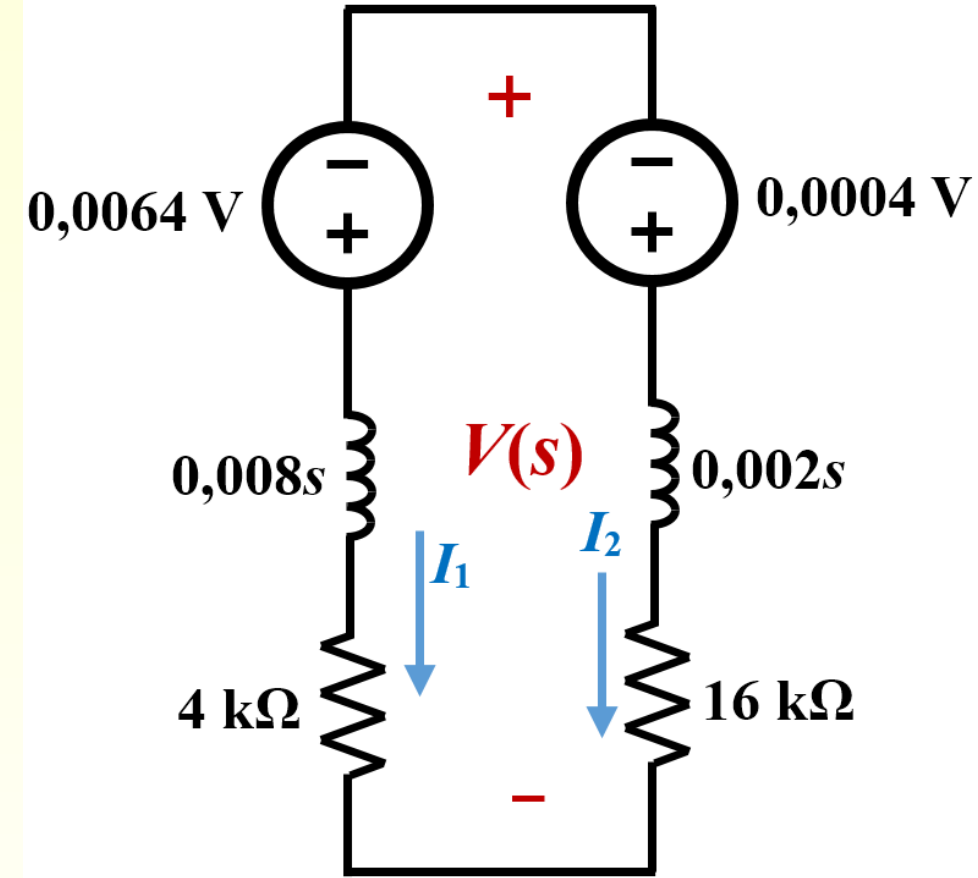
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Μετά τον υπολογισμό των αρχικών συνθηκών, περνάμε στο πεδίο συχνότητας και επιλύουμε:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{0,0064 - 0,0004}{4000 + 16000 + 0,002s + 0,008s} \\ &= \frac{0,006}{20000 + 0,01s} = \frac{0,6}{s + 2 \times 10^6} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$i_1(t) = 0,6e^{-2 \times 10^6 t} u(t) \text{ A}$$

$$i_2(t) = -0,6e^{-2 \times 10^6 t} u(t) \text{ A}$$

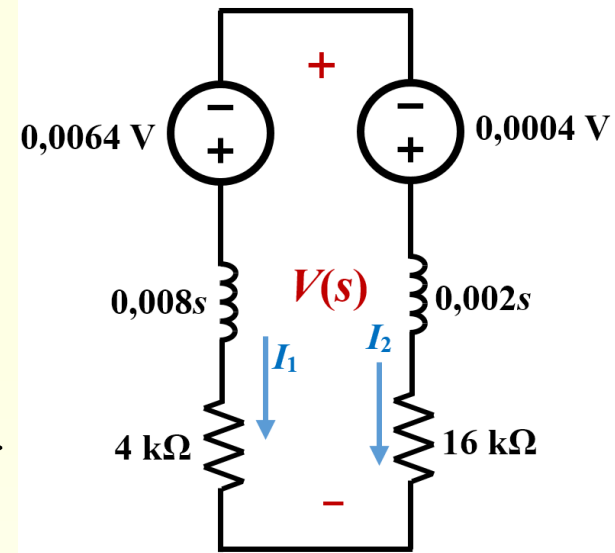


ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Και για την τάση:

$$\begin{aligned} V(s) &= -0,0064 + (0,008s + 4000) I_1(s) \\ &= \frac{-0,0016(s + 6,5 \times 10^6)}{s + 2 \times 10^6} = -1,6 \times 10^{-3} - \frac{7200}{s + 2 \times 10^6} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$v(t) = -1,6 \times 10^{-3} \delta(t) - 7200 e^{-2 \times 10^6 t} u(t) \text{ V}$$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- **ΕΡΩΤΗΣΗ:**

- Στα πλαίσια της επαλήθευσης, όταν $t = 0^+$ η λύση για τα ρεύματα είναι

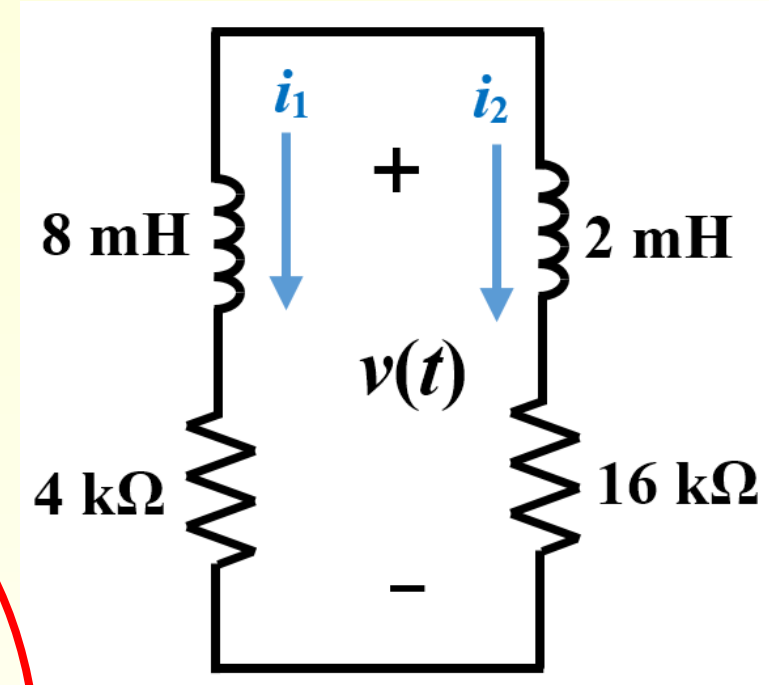
$$i_1(t) = 0,6e^{-2 \times 10^6 t} u(t) \Rightarrow i_1(0^+) = 0,6 \text{ A}$$

$$i_2(t) = -0,6e^{-2 \times 10^6 t} u(t) \Rightarrow i_2(0^+) = -0,6 \text{ A}$$

- Στην αρχική ανάλυση όμως είχαμε καταλήξει ότι:

$$i_1(0^-) = \frac{3200}{4000} = 0,8 \text{ A}$$

$$i_2(0^-) = \frac{3200}{16000} = 0,2 \text{ A}$$



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

- Εξ αιτίας τού βρόχου, θα είναι:

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) - i_2(0^-) = 0,8 - 0,2 = 0,6 \text{ A}$$

$$i_2(0^+) = i_2(0^-) - i_1(0^-) = 0,2 - 0,8 = -0,6 \text{ A}$$

- Επιβεβαίωση με NPK: $i_1(0^+) + i_2(0^+) = 0$

$$i_1(0^+) = 0,6 \text{ A}$$

$$i_2(0^+) = -0,6 \text{ A}$$

