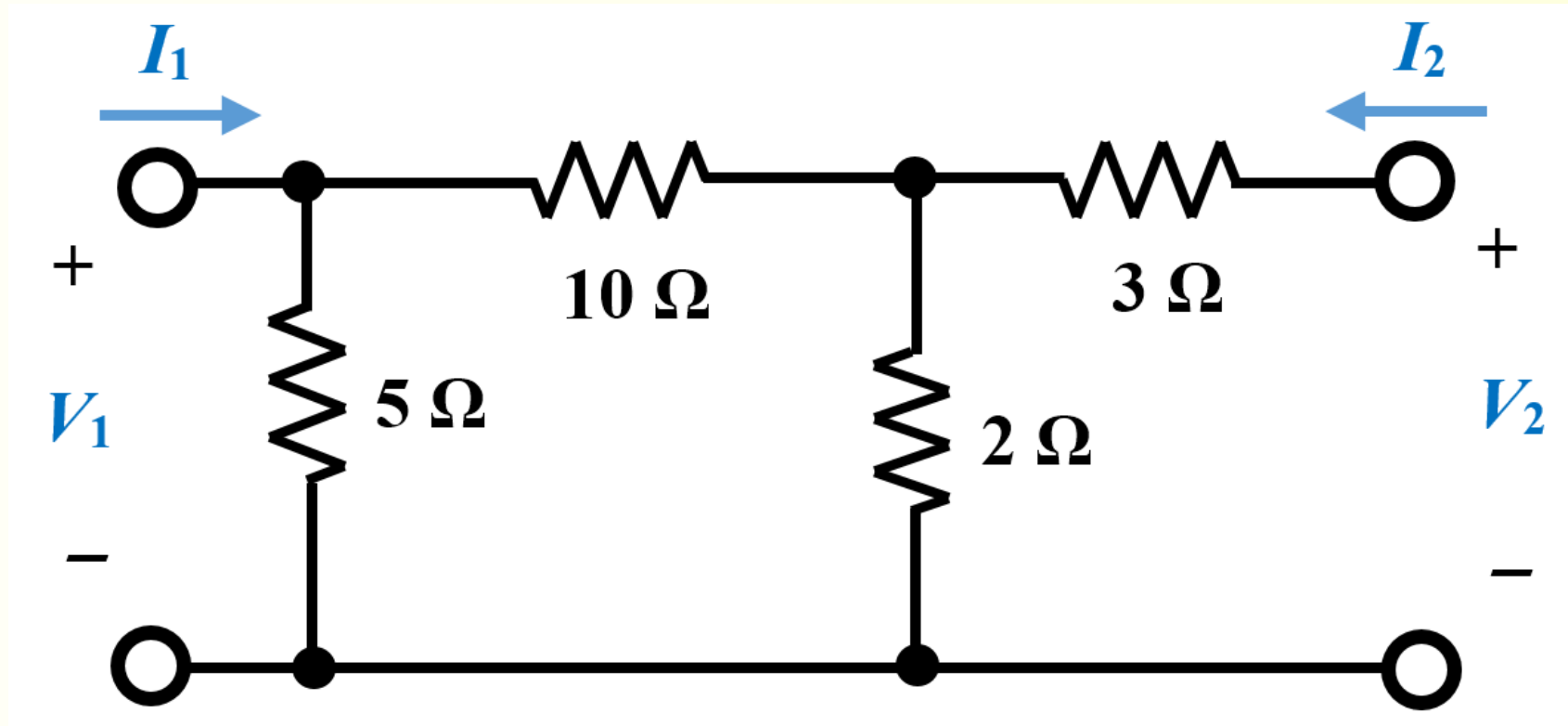


ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΔΙΘΥΡΑ

1

ΔΙΘΥΡΑ

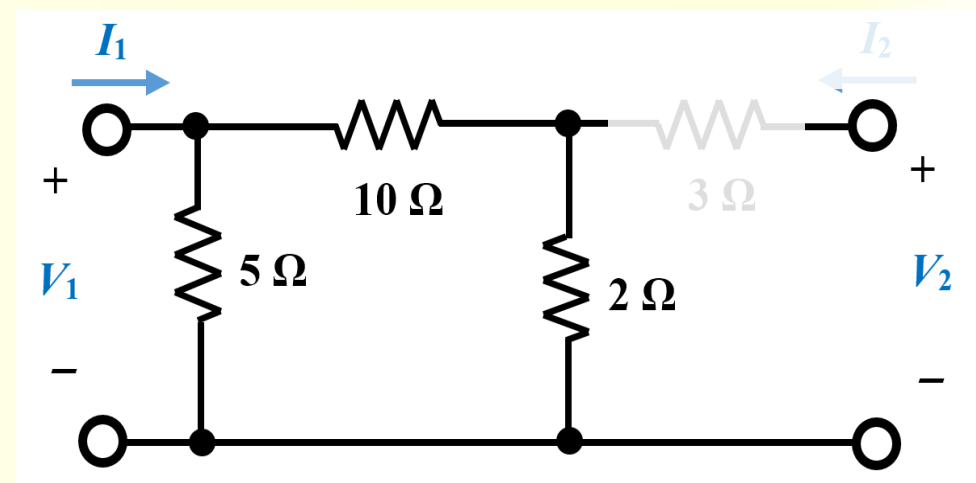


- Να υπολογιστούν οι παράμετροι z και h για το δίθυρο

ΔΙΘΥΡΑ

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$



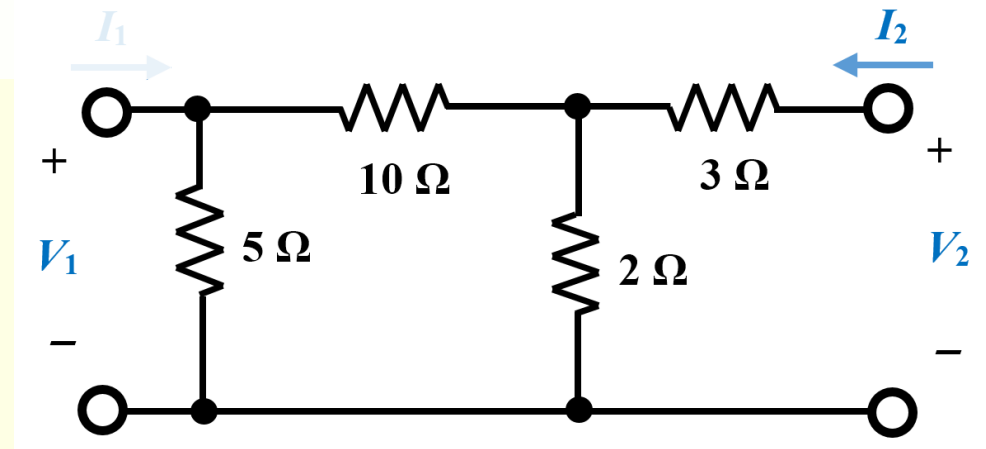
$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = 5 \parallel (10 + 2) = \frac{60}{17} = 3,529 \Rightarrow z_{11} = 3,529$$

- Αν i είναι το ρεύμα που διαρρέει τις $(10 + 2) \Omega$, τότε:

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \Rightarrow V_2 = 2 \times i = 2 \times \frac{5}{17} I_1 = \frac{10}{17} I_1 = 0,588 I_1 \Rightarrow z_{21} = 0,588$$

ΔΙΘΥΡΑ

- Λόγω παθητικότητας/αμοιβαιότητας:



$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_{21}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = 3 + 2 \parallel (10 + 5) = 3 + \frac{30}{17} = \frac{81}{17} = 4,765 \Rightarrow z_{22} = 4,765$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 3,529 & 0,588 \\ 0,588 & 4,769 \end{pmatrix} \Omega$$

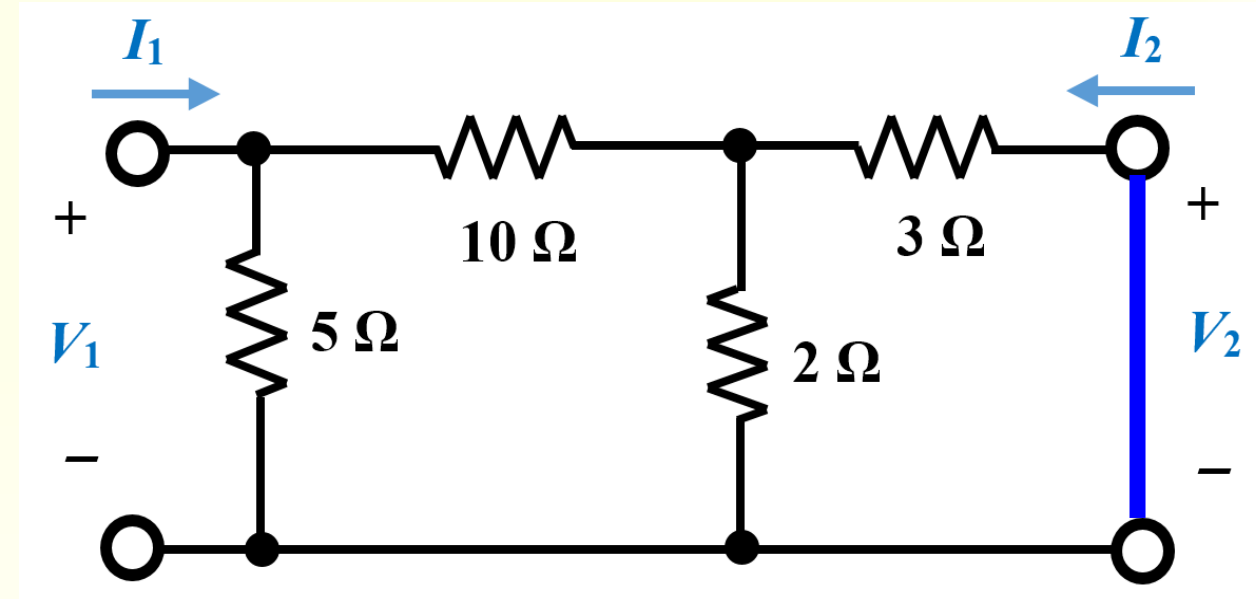
ΔΙΘΥΡΑ

- Παρόλο που μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους h από τον σχετικό πίνακα, ας τις υπολογίσουμε κανονικά

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} \quad \begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned}$$
$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

- Για $V_2 = 0$ η h_{11} είναι ίση με την αντίσταση εισόδου:

$$[(3 \parallel 2) + 10] \parallel 5 = \left[\frac{6}{5} + 10 \right] \parallel 5 = \frac{56}{5} \parallel 5 = \frac{280}{81} \Rightarrow h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = 3,456$$



ΔΙΘΥΡΑ

- Για $V_2 = 0$ η h_{21} υπολογίζεται:

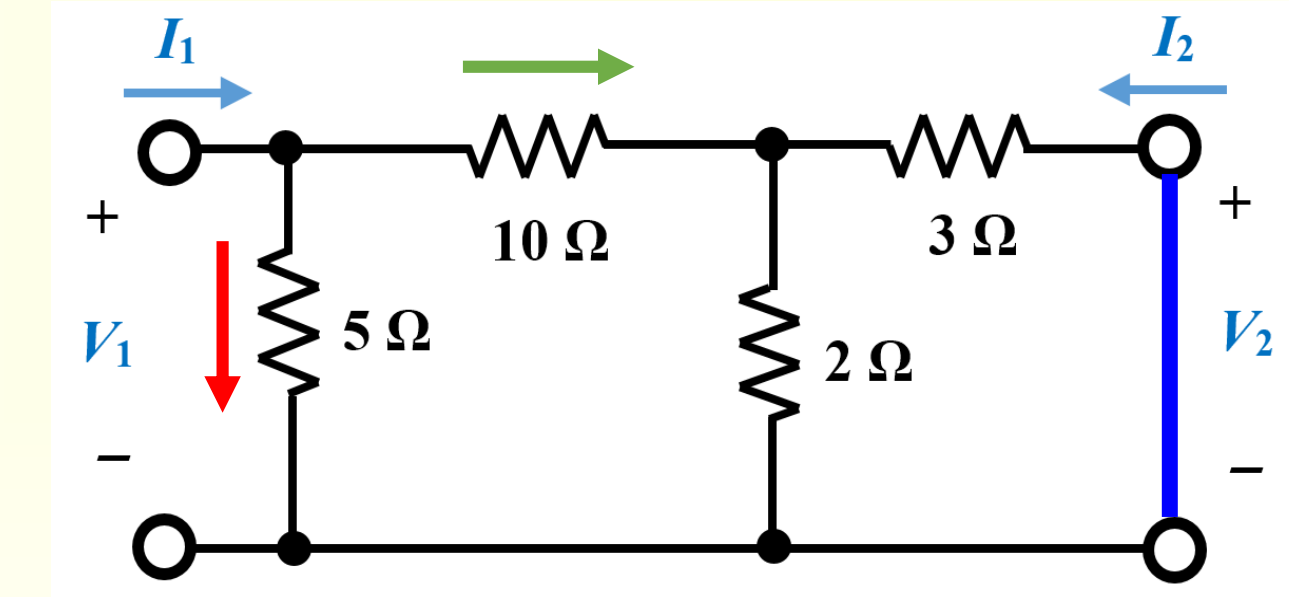
$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$I_1 = I_{5\Omega} + I_{10\Omega}$$

$$-I_2 = I_{10\Omega} \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} I_{10\Omega}$$

$$I_{10\Omega} = I_1 \frac{5}{5+10+(3||2)} =$$

$$= I_1 \frac{5}{5+\left(10+\frac{6}{5}\right)} = I_1 \frac{5}{\left(\frac{81}{5}\right)} = \frac{25}{81} I_1$$



$$-I_2 = \frac{2}{5} \frac{25}{81} I_1 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = -\frac{10}{81} \Rightarrow h_{21} = -0,123$$

ΔΙΘΥΡΑ

- Τώρα θέτουμε $I_1 = 0$ (νέο πρόβλημα!) και

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

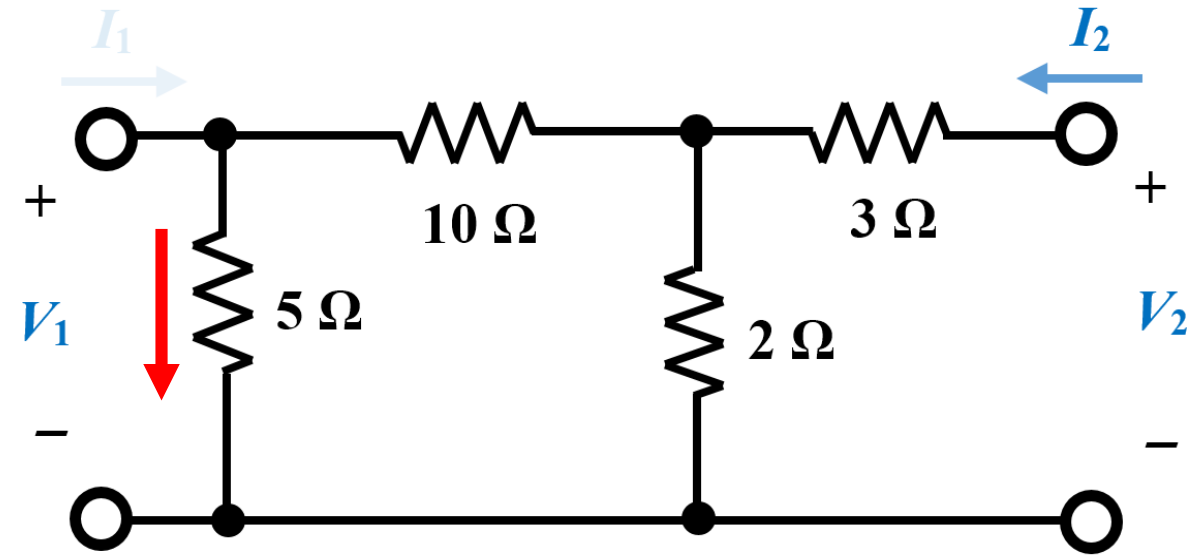
$$V_1 = 5 I_{5\Omega}$$

- Για το $I_{5\Omega}$ θα έχουμε:

$$I_2 = \frac{V_2}{3 + 2 \parallel 15} = \frac{V_2}{3 + \frac{30}{17}} = \frac{V_2}{\frac{81}{17}} = \frac{17}{81} V_2$$

$$I_{5\Omega} = \left(\frac{17V_2}{81} \right) \frac{2}{2 + (10 + 5)} = \frac{2}{81} V_2$$

$$\Rightarrow \left. \frac{V_1}{V_2} \right| = \frac{10}{81} \Rightarrow h_{12} = 0,123$$



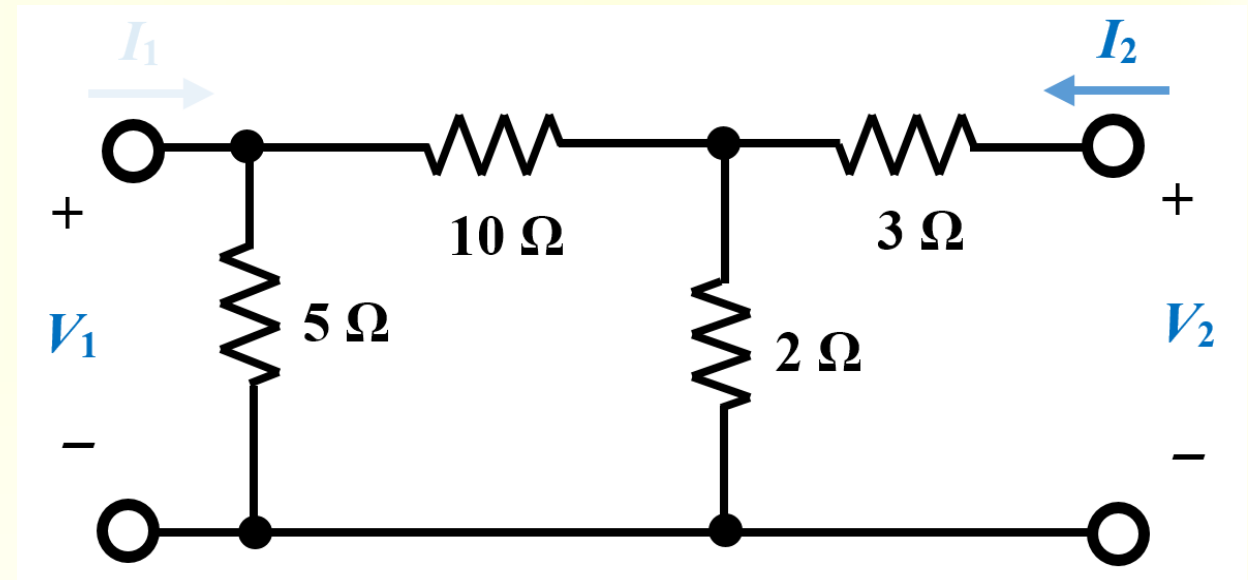
ΔΙΘΥΡΑ

- Με $I_1 = 0$ το h_{22} είναι η αγωγιμότητα εξόδου:

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

$$Z_{out} = 3 + [2 \parallel (10 + 5)] = \frac{81}{17} \Rightarrow$$

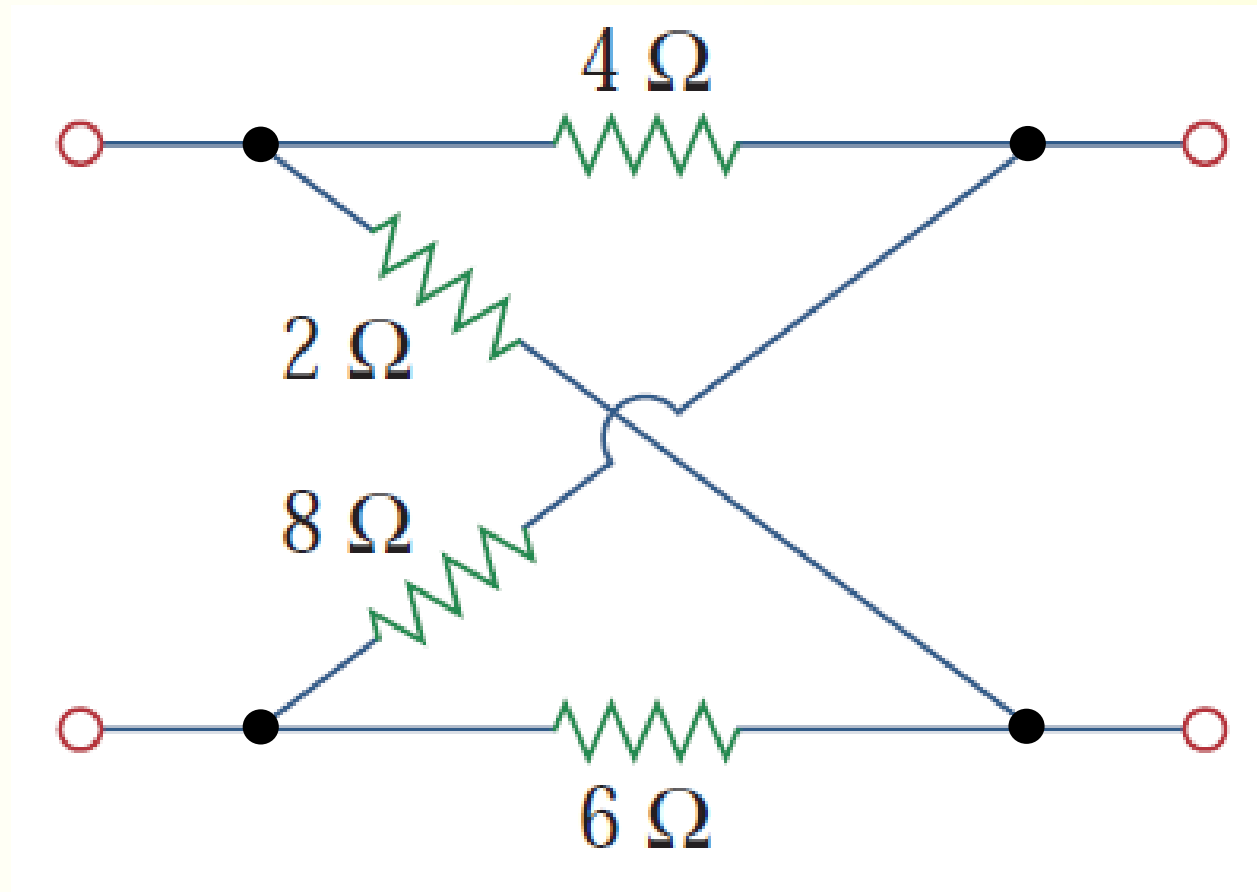
$$h_{22} = 0,21$$



$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3,456 \, \Omega & 0,123 \\ -0,123 & 0,21 \, \text{S} \end{pmatrix}$$

2

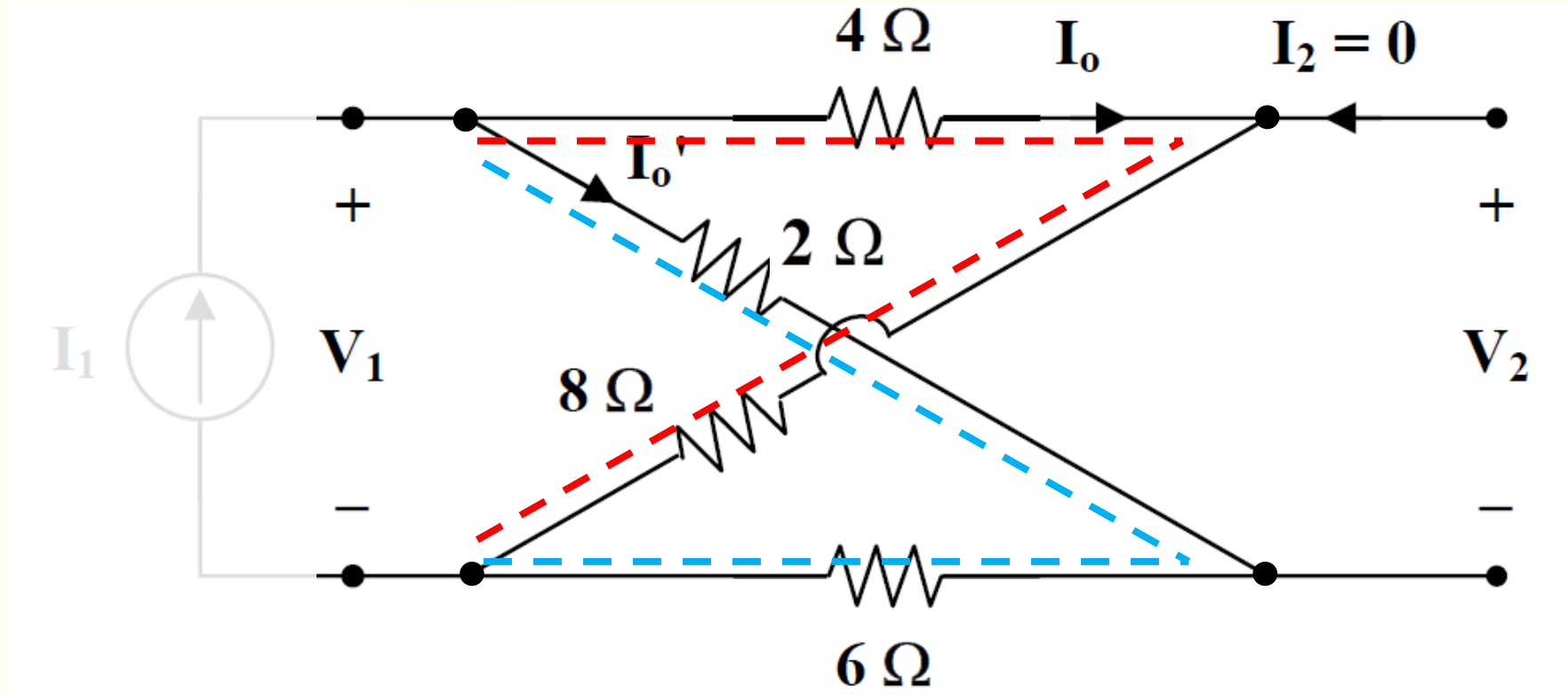
ΔΙΘΥΡΑ



- Να υπολογιστούν οι παράμετροι z και y για το δίθυρο

ΔΙΘΥΡΑ

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$



$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = (\underline{4 + 8}) \parallel (\underline{2 + 6}) = 12 \parallel 8 = \frac{(12)(8)}{20} = 4.8\ \Omega$$

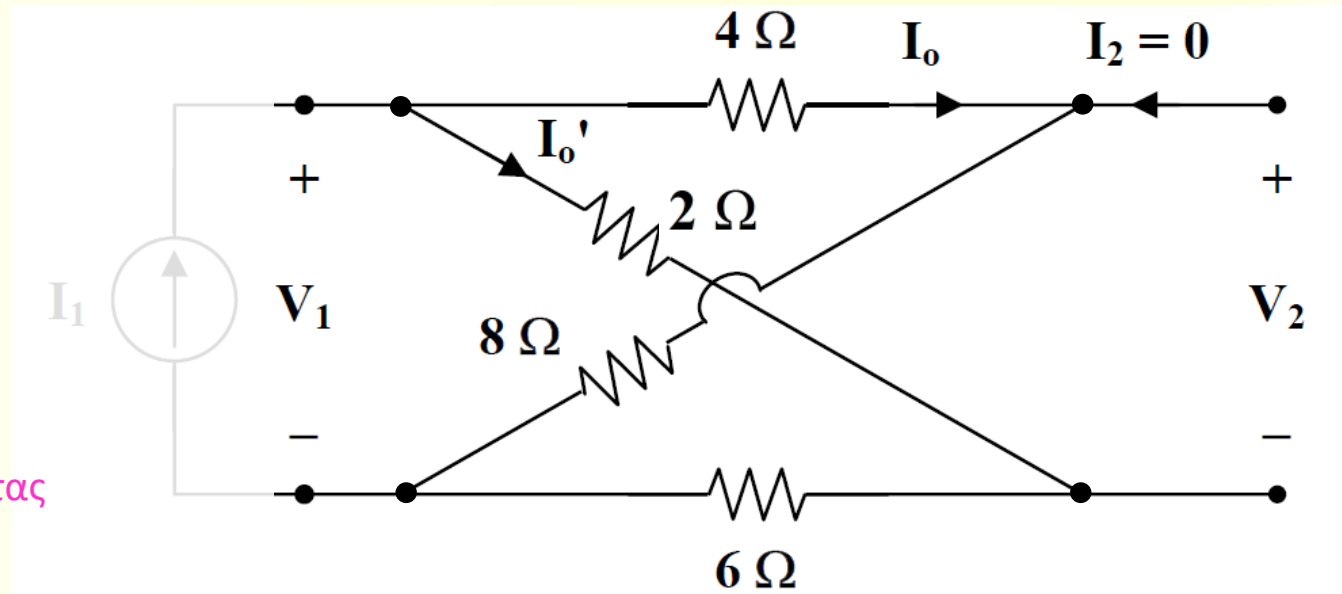
ΔΙΘΥΡΑ

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$I_0 = \frac{8}{8+12} I_1 = \frac{2}{5} I_1$$

$$I'_0 = \frac{3}{5} I_1$$

Από τον διαιρέτη ρεύματος
(Φαίνεται καλύτερα ξανασχεδιάζοντας
πιο «τακτικά» το κύκλωμα)

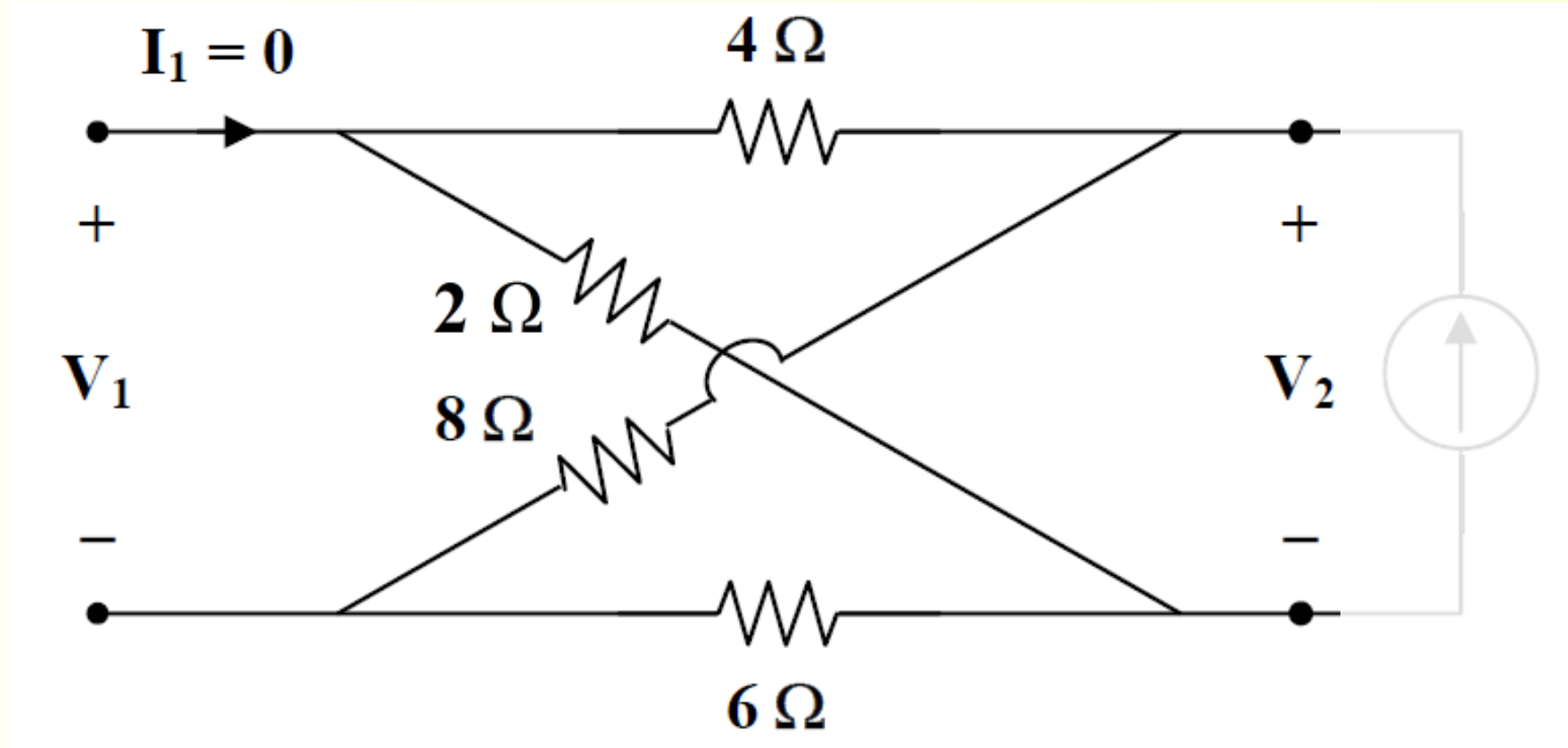


$$-V_2 - 4I_0 + 2I'_0 = 0 \Rightarrow$$

$$V_2 = -4I_0 + 2I'_0 = \frac{-8}{5} I_1 + \frac{6}{5} I_1 = \frac{-2}{5} I_1 \Rightarrow$$

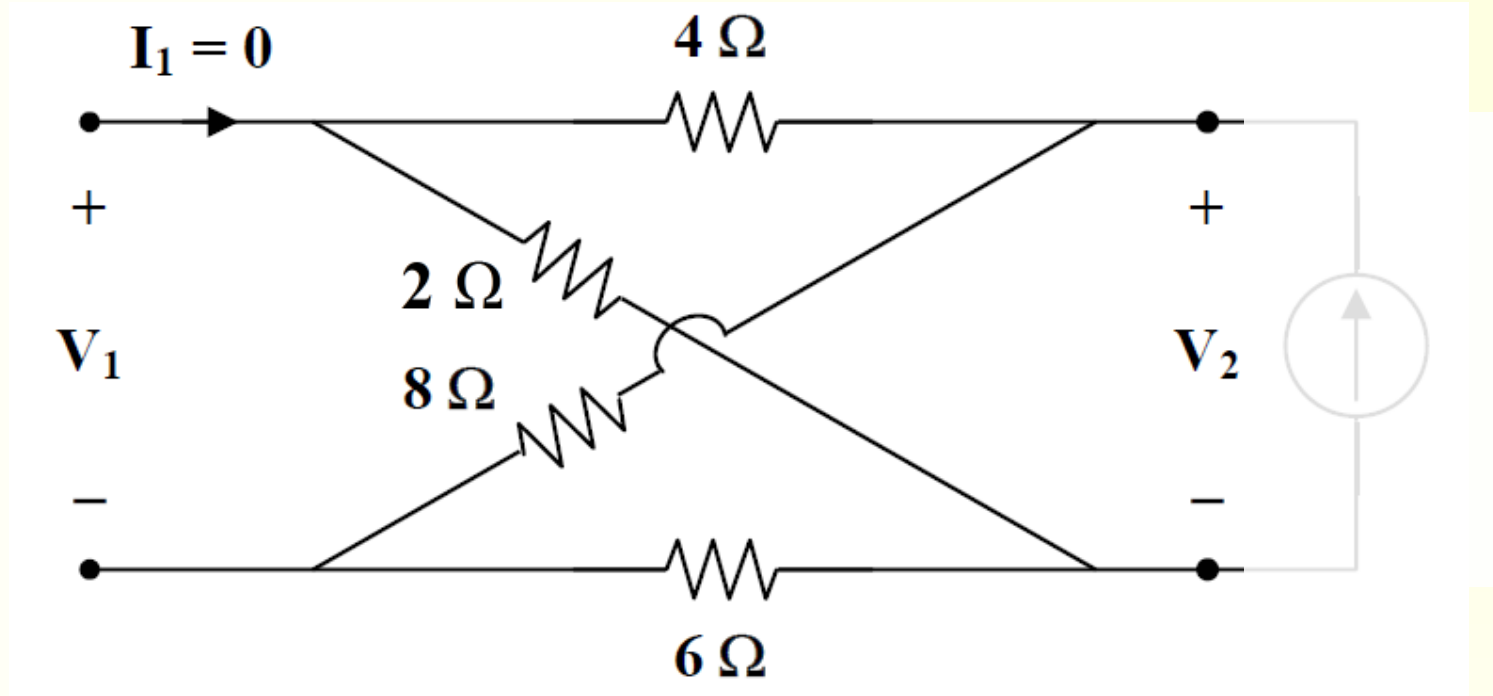
$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{-2}{5} \Rightarrow \boxed{z_{21} = -0,4 \Omega}$$

ΔΙΘΥΡΑ



$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = (4 + 2) \parallel (8 + 6) = 6 \parallel 14 = \frac{(6)(14)}{20} = 4.2\ \Omega$$

ΔΙΘΥΡΑ

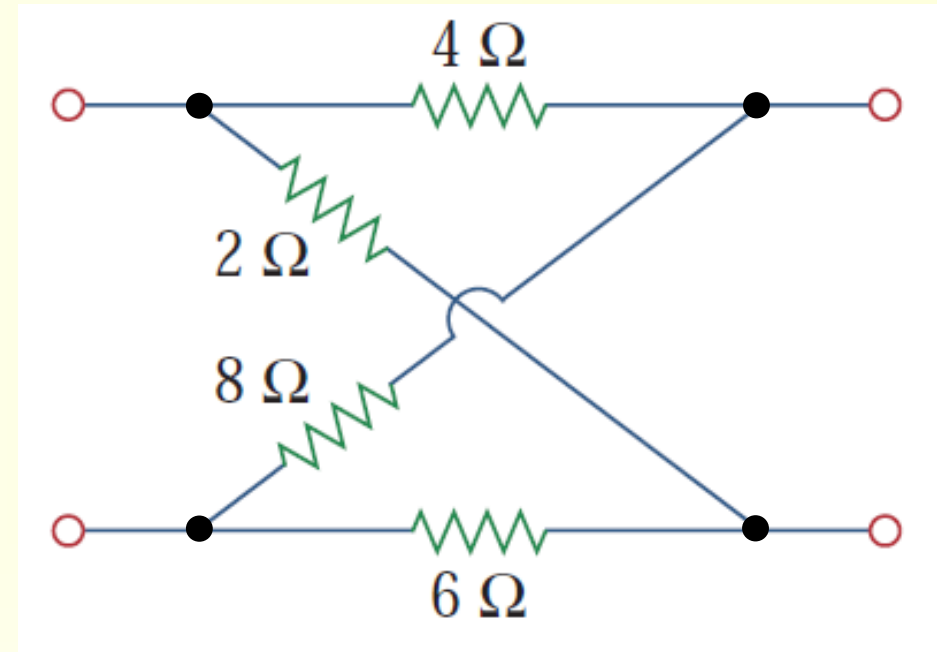


- Λόγω παθητικότητας/αμοιβαιότητας:

$$z_{12} = z_{21} = -0,4 \, \Omega$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 4,8 & -0,4 \\ -0,4 & 4,2 \end{pmatrix} \Omega$$

ΔΙΘΥΡΑ

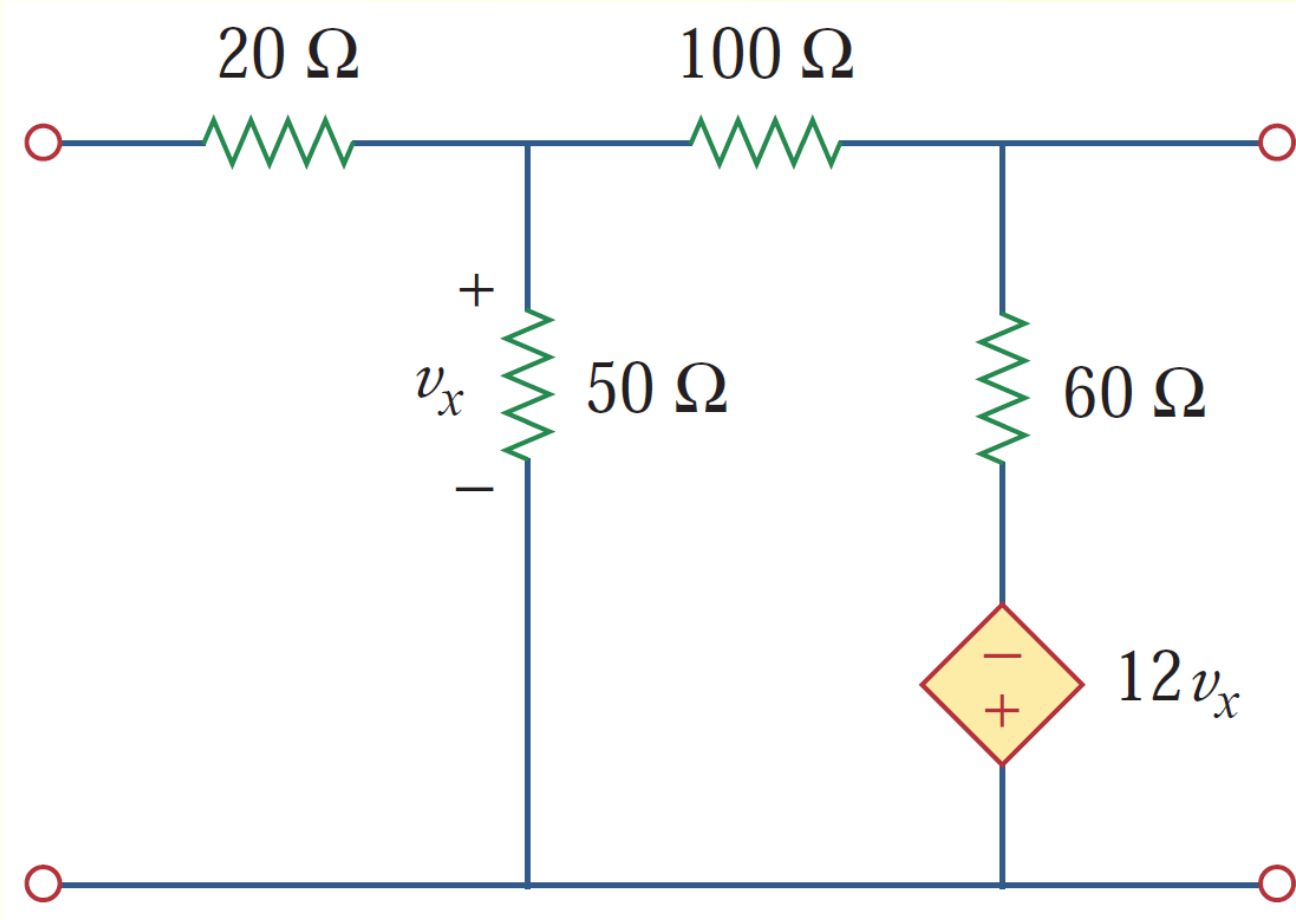


- Οι παράμετροι y υπολογίζονται από τις z :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \Rightarrow \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,02 \\ 0,02 & 0,24 \end{pmatrix} \text{S}$$

3

ΔΙΘΥΡΑ

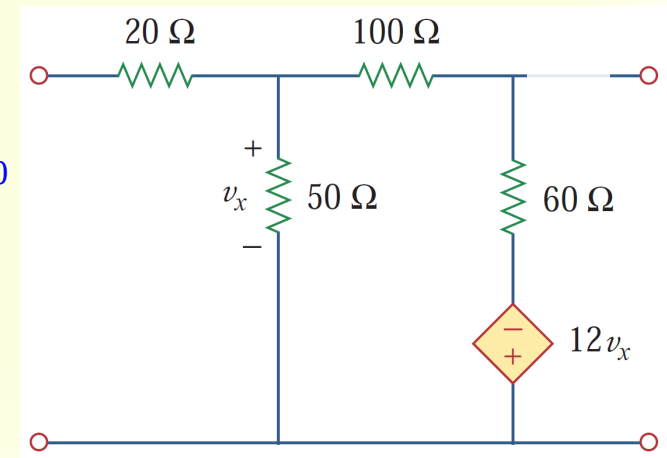


- Να υπολογιστούν οι παράμετροι z για το δίθυρο

ΔΙΘΥΡΑ

- Θεωρούμε ότι $I_2 = 0$
- Το κύκλωμα είναι αρκετά περίπλοκο οπότε καταφεύγουμε στις βασικές τεχνικές
- Με κομβικές τάσεις θα έχουμε

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$



$$\frac{v_x - V_1}{20} + \frac{v_x}{50} + \frac{v_x + 12v_x}{160} = 0 \Rightarrow v_x = \frac{40}{121} V_1$$

$$I_1 = \frac{V_1 - v_x}{20} = \frac{V_1 - \frac{40}{121} V_1}{20} = \frac{81}{121} \left(\frac{V_1}{20} \right) \Rightarrow \boxed{z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 29,88}$$

ΔΙΘΥΡΑ

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

- Θεωρούμε ότι $I_2 = 0$ και

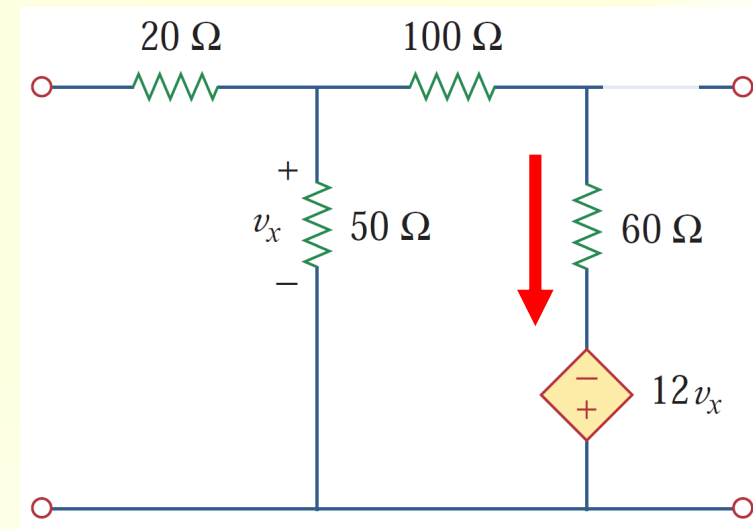
$$V_2 = 60 \times I_{60\Omega} - 12v_x = 60 \times \frac{v_x - (-12v_x)}{160} - 12v_x$$

$$= 60 \times \frac{13v_x}{160} - 12v_x = -\frac{57}{8}v_x = -\frac{57}{8} \frac{40}{121} V_1 = -\frac{57}{8} \frac{40}{121} \left(\frac{121}{81} 20I_1 \right)$$

$$= -70,37I_1$$

$\Rightarrow$

$$z_{21} = -70,37$$



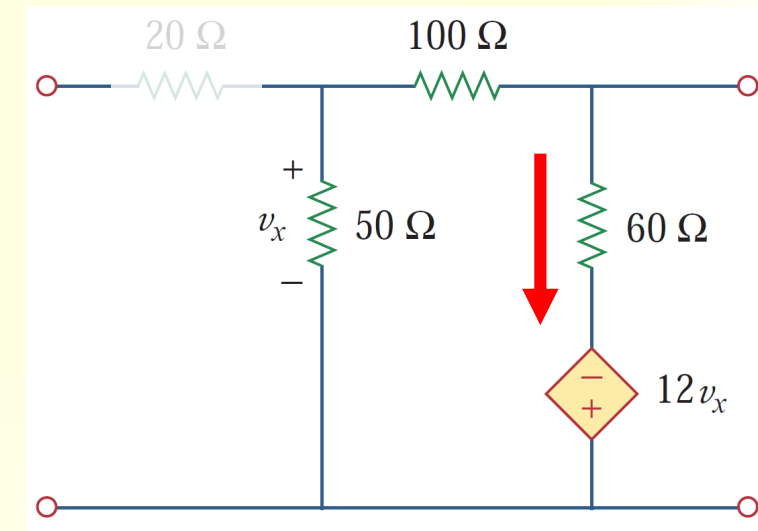
ΔΙΘΥΡΑ

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

- Θεωρούμε ότι $I_1 = 0$ οπότε

$$V_1 = v_x = \frac{50}{50 + 100} V_2 \Rightarrow z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{1}{3} \frac{V_2}{I_2} = \frac{1}{3} z_{22}$$

- Αναβάλλουμε λοιπόν μέχρι τον υπολογισμό του z_{22}

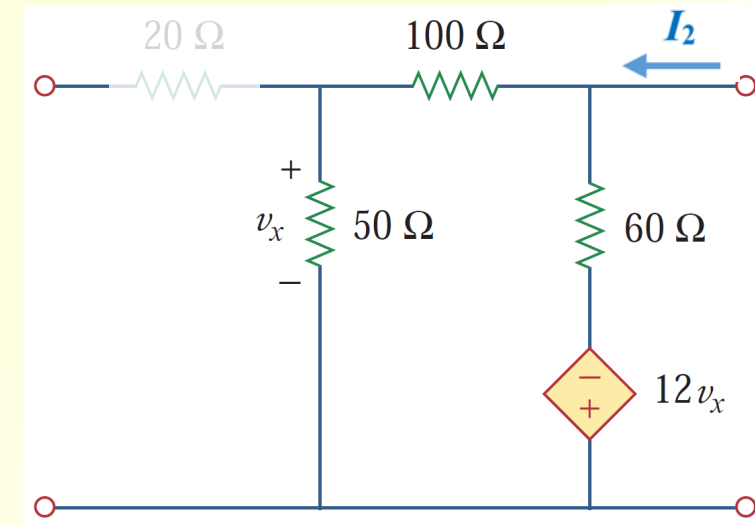


ΔΙΘΥΡΑ

- Θεωρούμε ότι $I_1 = 0$ και

$$v_x = \frac{50}{50 + 100} V_2 = \frac{V_2}{3}$$

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

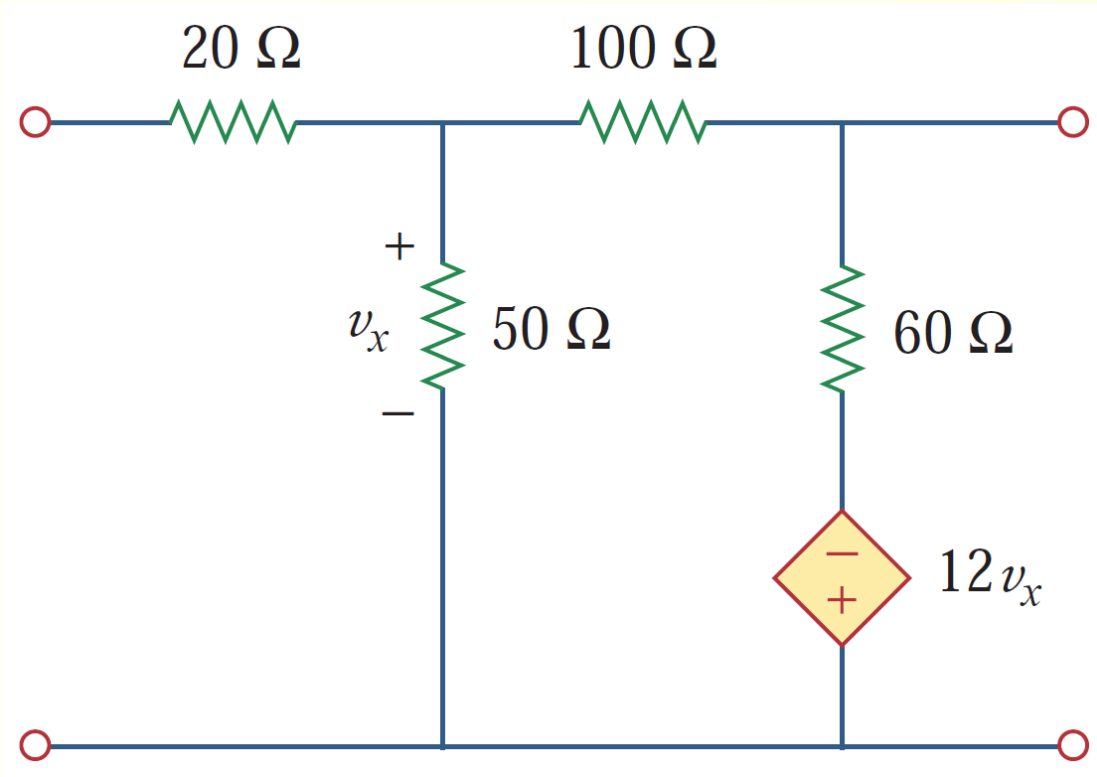


$$I_2 = \frac{V_2}{150} + \frac{V_2 - (-12v_x)}{60} = \frac{V_2}{150} + \frac{V_2 + 12v_x}{60} = \frac{V_2}{150} + \frac{V_2 + 4V_2}{60} = 0,09V_2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_2}{I_2} = \frac{1}{0,09} \Rightarrow \boxed{z_{22} = 11,11} \quad \Rightarrow \quad z_{12} = \frac{1}{3} z_{22} \Rightarrow \boxed{z_{12} = 3,70}$$

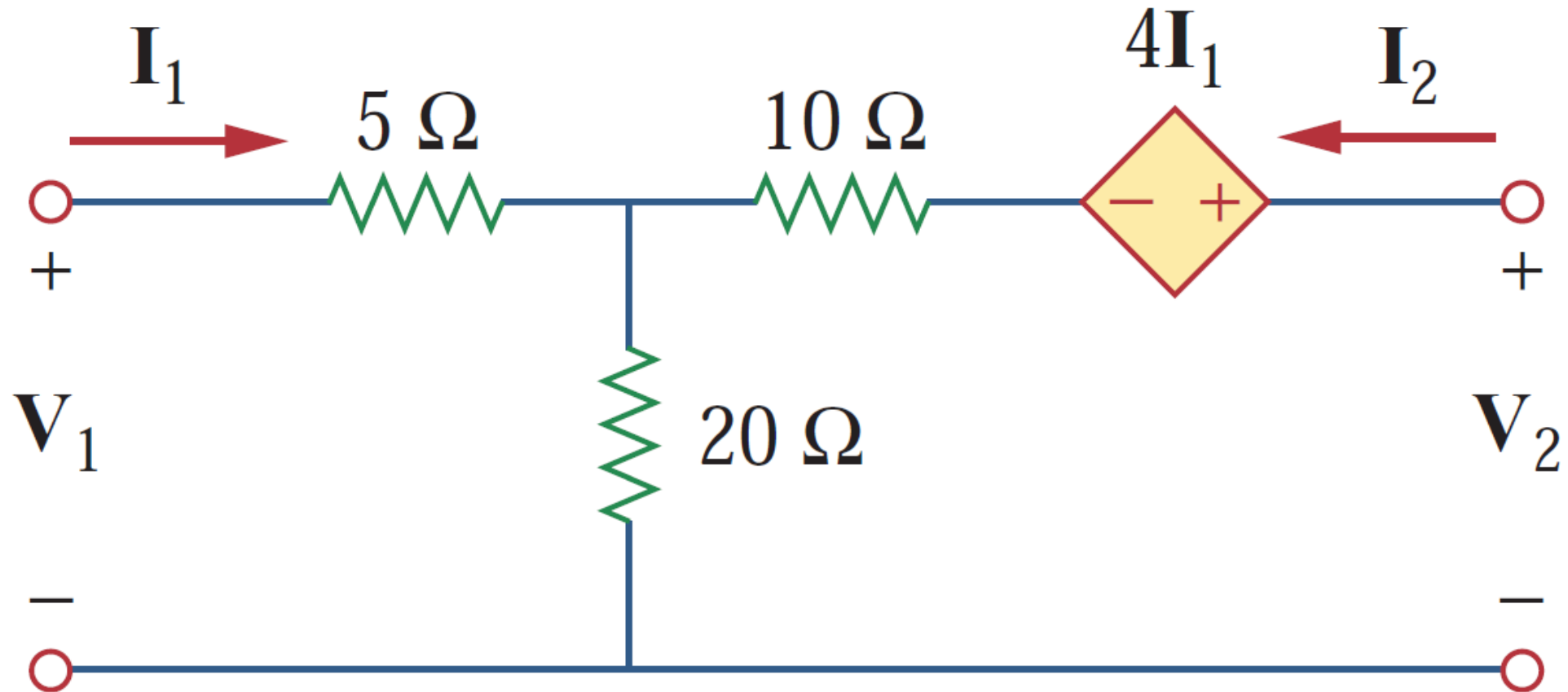
ΔΙΘΥΡΑ



$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 29,88 & 3,70 \\ -70,37 & 11,11 \end{pmatrix} \Omega$$

4

ΔΙΘΥΡΑ



- Να υπολογιστούν οι παράμετροι z για το δίθυρο

(βλ. παρόμοιο πρόβλημα για παραμέτρους T στη θεωρία)

ΔΙΘΥΡΑ

- Με $I_2 = 0$ θα έχουμε

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{(20 + 5)I_1}{I_1} = 25 \Omega$$

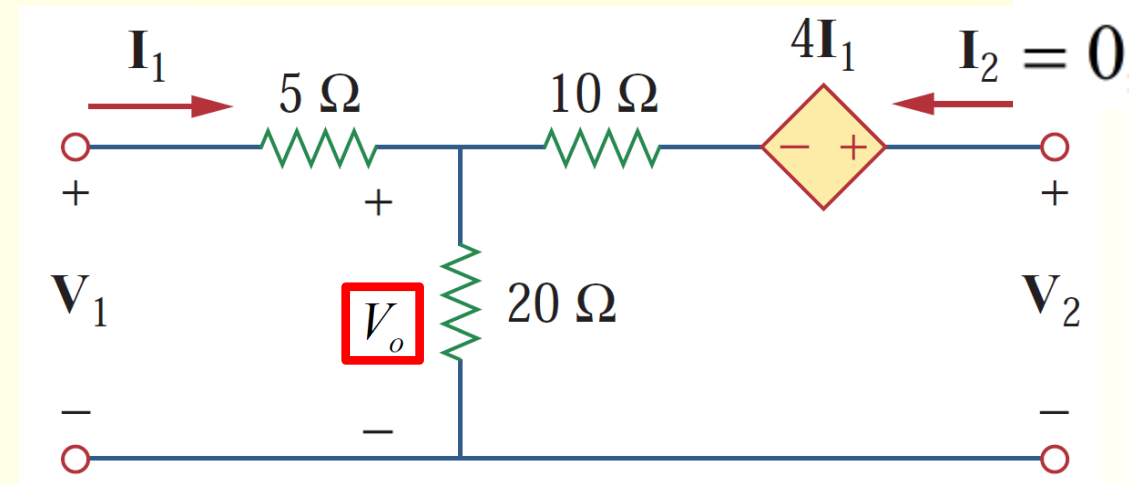
- Με ενδιάμεση τάση V_o :

$$V_o = \frac{20}{25} V_1 = 20 I_1$$

$$-V_o - 4I_1 + V_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad V_2 = V_o + 4I_1 = 20I_1 + 4I_1 = 24I_1$$

- Και τελικά:

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = 24 \Omega$$



$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

ΔΙΘΥΡΑ

- Με $I_1 = 0$ θα έχουμε

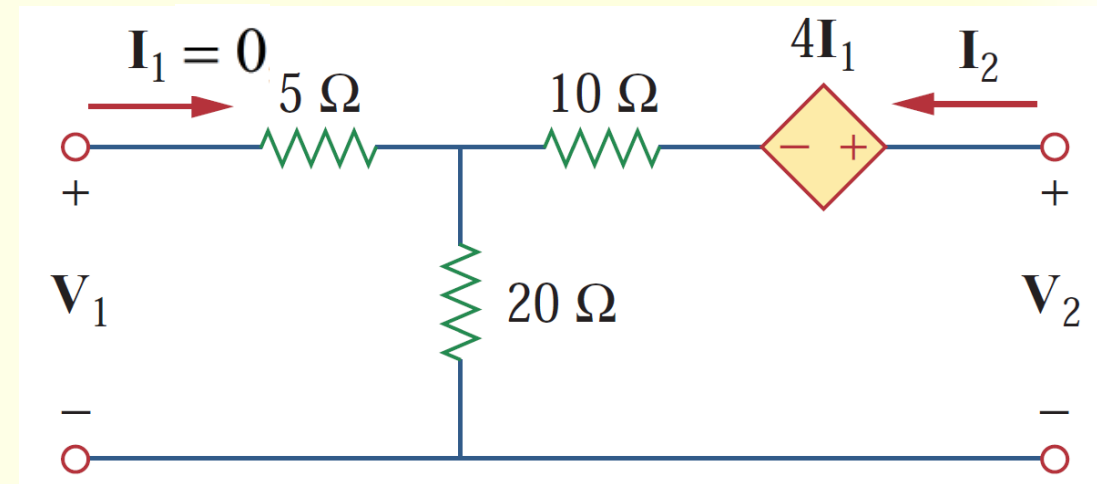
$$V_2 = (10 + 20)I_2 = 30I_2$$

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 30 \Omega$$

- Επίσης

$$V_1 = 20I_2$$

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = 20 \Omega$$

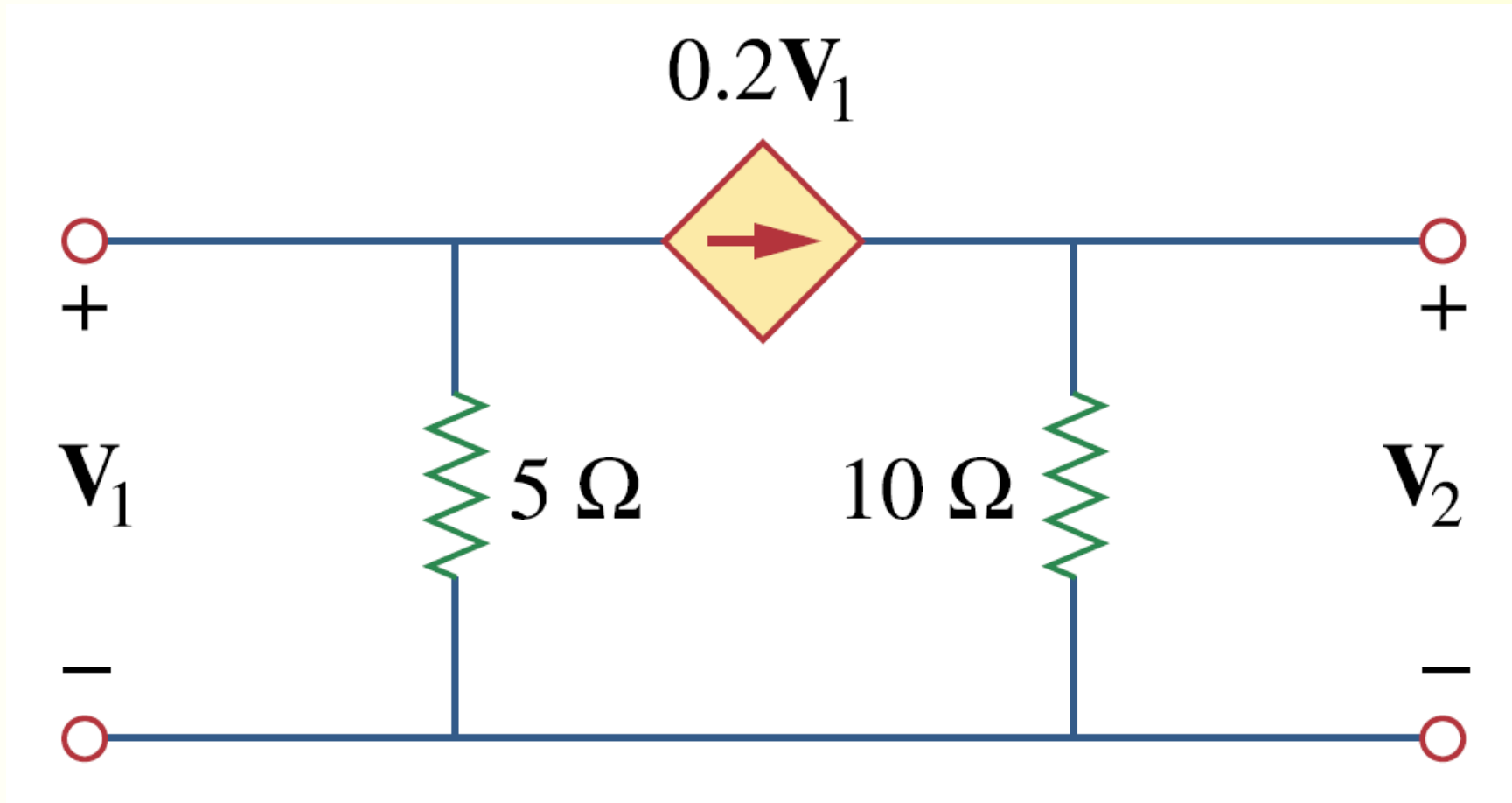


$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 24 & 30 \end{pmatrix} \Omega$$

5

ΔΙΘΥΡΑ



- Να υπολογιστούν οι παράμετροι y για το δίθυρο

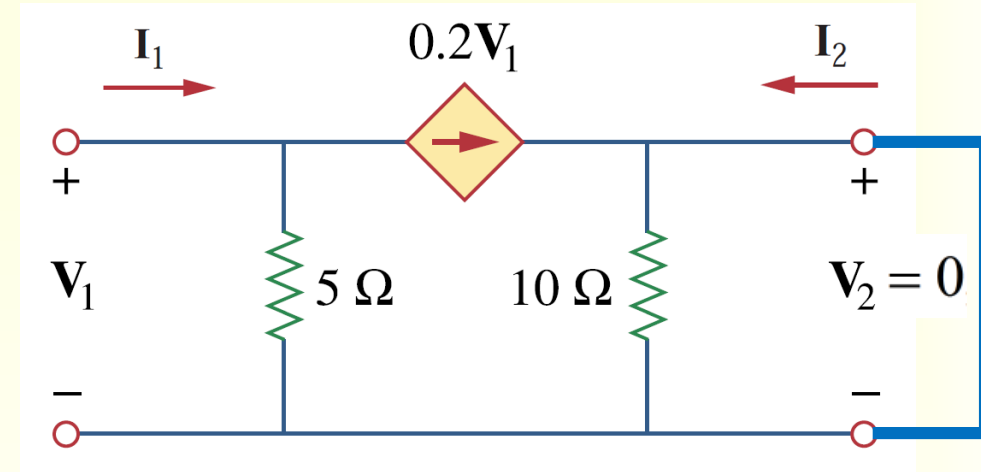
ΔΙΘΥΡΑ

- Με $V_2 = 0$ θα έχουμε:
- Στον κόμβο αριστερά από την εξαρτημένη πηγή

$$I_1 = \frac{V_1}{5} + 0.2 V_1 = 0.4 V_1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = 0.4$$

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$



- Στον κόμβο δεξιά από την εξαρτημένη πηγή

$$I_2 = -0.2 V_1 \longrightarrow y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -0.2$$

ΔΙΘΥΡΑ

- Με $V_1 = 0$ η εξαρτημένη πηγή γίνεται ανοικτό κύκλωμα και

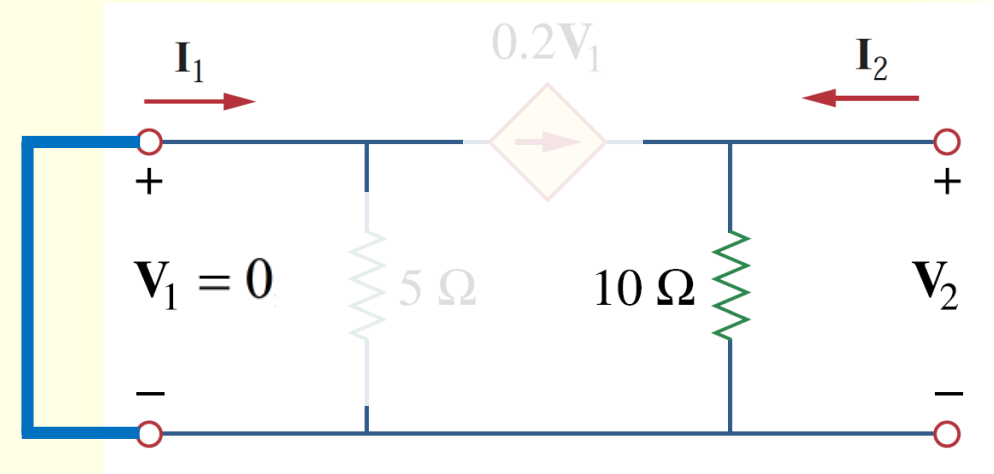
$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = 0$$

- Επίσης

$$V_2 = 10I_2 \longrightarrow y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{10} = 0.1$$

- Και τελικά

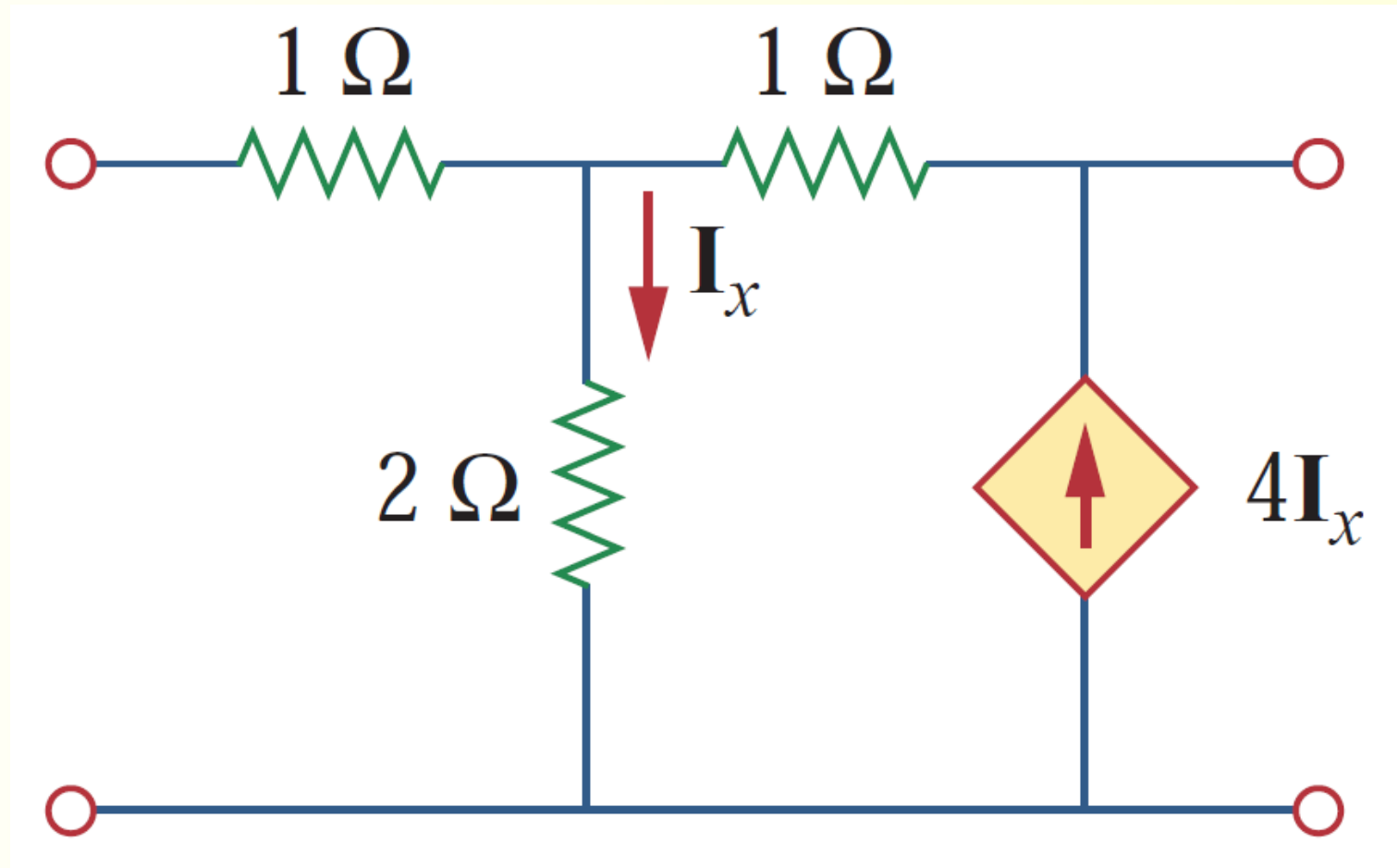
$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ -0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ S}$$



$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \quad y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

6

ΔΙΘΥΡΑ



- Να υπολογιστούν οι παράμετροι μεταφοράς για το δίθυρο

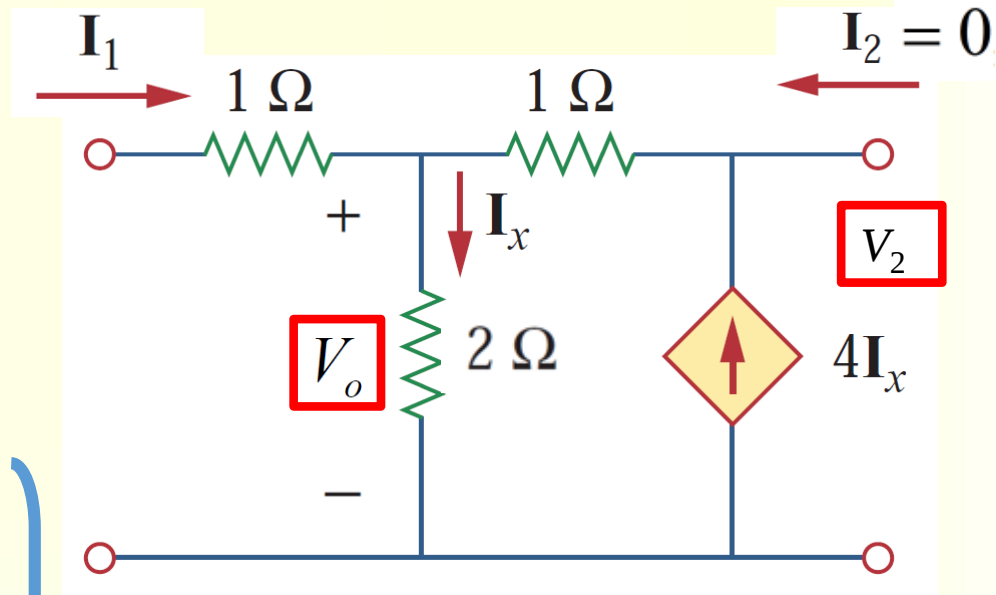
ΔΙΘΥΡΑ

- Για τον υπολογισμό του C :
- Εξετάζουμε τους κόμβους « V_o » και « V_2 » που δίνουν αντίστοιχα:

$$I_1 = \frac{V_o}{2} + \frac{V_o - V_2}{1} \Rightarrow 2I_1 = 3V_o - 2V_2$$

$$\frac{V_o - V_2}{1} = -4I_x = -4 \frac{V_o}{2} = -2V_o \Rightarrow V_o = \frac{V_2}{3}$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$



$$2I_1 = -V_2 \Rightarrow$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{-1}{2} = -0,5 \text{ S}$$

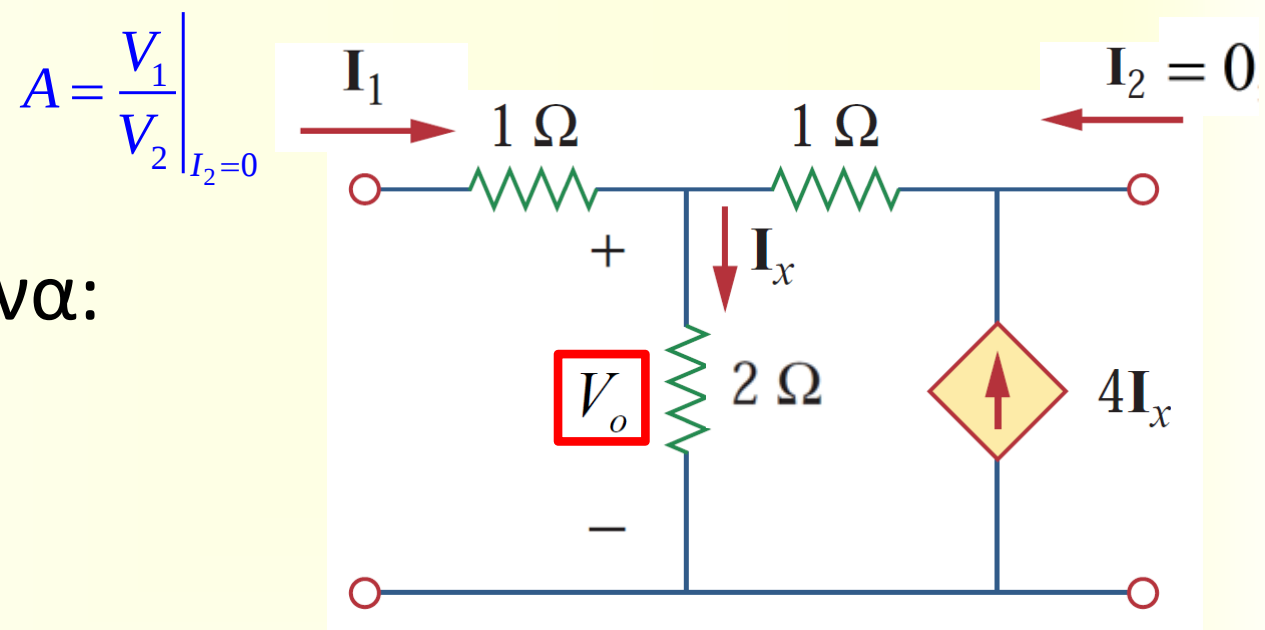
ΔΙΘΥΡΑ

- Για τον υπολογισμό του A :
- Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_o}{1} = V_1 - \frac{V_2}{3}$$

$$-0,5 V_2 = V_1 - \frac{V_2}{3} \Rightarrow V_1 = -0,1667 V_2 \Rightarrow$$

$$A = \frac{V_1}{V_2} = -0,1667$$



ΔΙΘΥΡΑ

- Για τον υπολογισμό του D :
- Θα έχουμε $V_2 = 0$ και εξετάζουμε πάλι τους κόμβους « V_o » και « V_2 » που δίνουν αντίστοιχα:

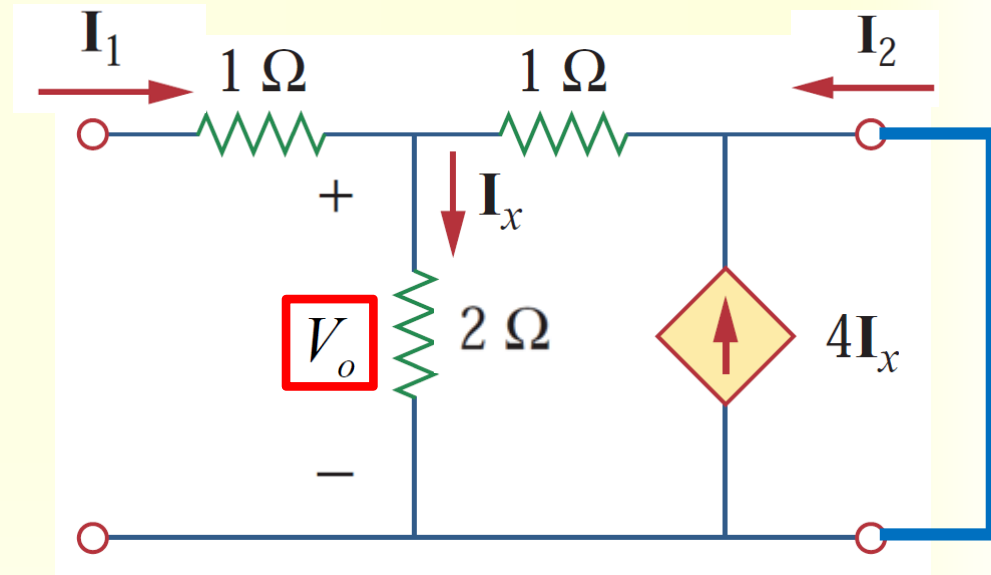
$$I_1 = \frac{V_o}{2} + \frac{V_o}{1} \Rightarrow 2I_1 = 3V_o$$

$$I_2 + \frac{V_o}{1} + 4I_x = 0 \Rightarrow -I_2 = V_o + 2V_o = 0 \Rightarrow I_2 = -3V_o$$

Η εξαρτημένη πηγή ρεύματος μπορεί να γίνει και πηγή ...σφαλμάτων. Επειδή είναι βραχυκυκλωμένη κάποιοι την αφαιρούν τελείως και κάποιοι θεωρούν ότι αυτόματα όλο το ρεύμα θα πάει στο βραχυκύκλωμα.

Ας αφήνουμε πάντα τον Kirchhoff να μας πει τι θα συμβεί τελικά.

$$D = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$



$$\left. \begin{array}{l} 2I_1 = 3V_o \\ I_2 = -3V_o \end{array} \right\} \Rightarrow 2I_1 = -I_2 \Rightarrow$$

$$D = -\frac{I_1}{I_2} = 0,5$$

ΔΙΘΥΡΑ

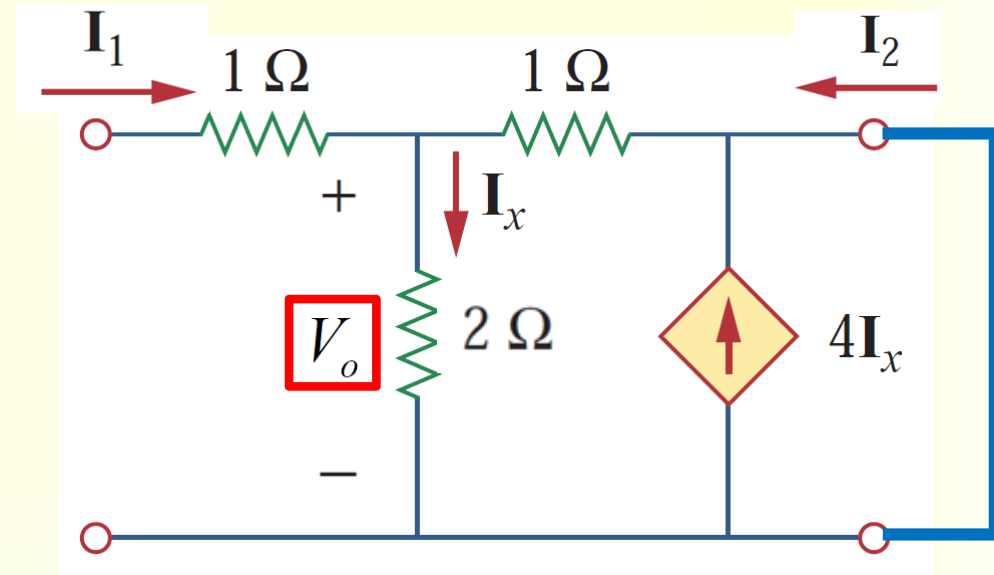
- Για τον υπολογισμό του B :
- Βλέπουμε ότι

$$I_1 = \frac{V_1 - V_o}{1} \Rightarrow V_1 = I_1 + V_o$$

- Και χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = I_1 + V_o \\ -\frac{I_1}{I_2} = 0,5 \\ I_2 = -3V_o \end{array} \right\} \Rightarrow V_1 = -\frac{1}{2}I_2 - \frac{1}{3}I_2 = -\frac{5}{6}I_2 \Rightarrow B = -\frac{V_1}{I_2} = \frac{5}{6} = 0,833 \Omega$$

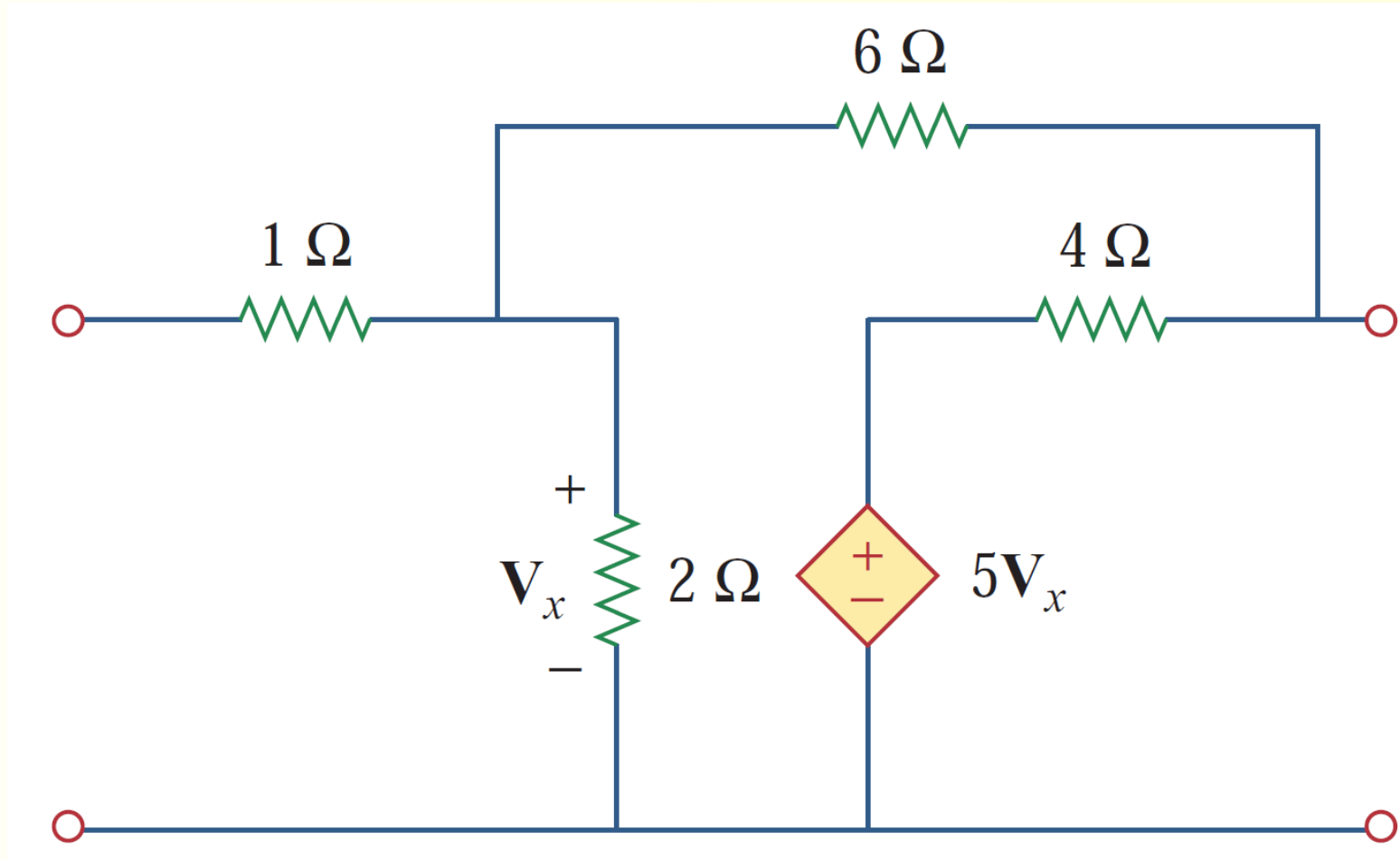
$$B = -\frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$



$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -0,1667 & 0,833 \Omega \\ -0,5 \text{ S} & 0,5 \end{pmatrix}$$

7

ΔΙΘΥΡΑ



- Να υπολογιστούν οι παράμετροι T για το δίθυρο

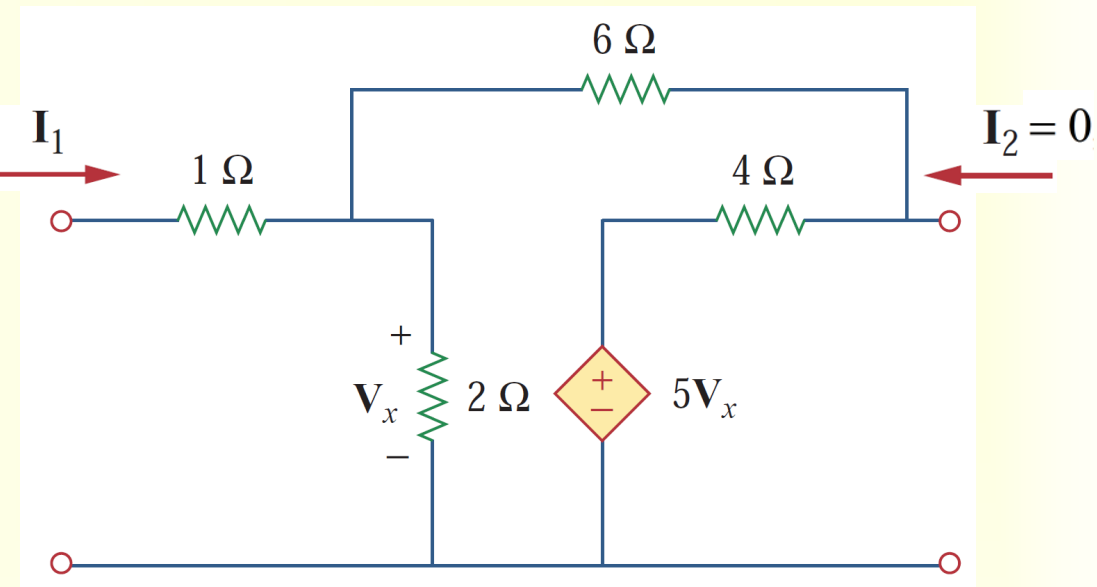
ΔΙΘΥΡΑ

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

- Γράφουμε βασικές σχέσεις:

$$\frac{V_1 - V_x}{1} = \frac{V_x}{2} + \frac{V_x - 5V_x}{10} \Rightarrow V_1 = 1,1 V_x$$

$$V_2 = 4(-0,4 V_x) + 5V_x = 3,4 V_x$$



$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1,1}{3,4} = 0,3235$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_x}{1} = 1,1 V_x - V_x = 0,1 V_x \Rightarrow C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{0,1}{3,4} = 0,0294$$

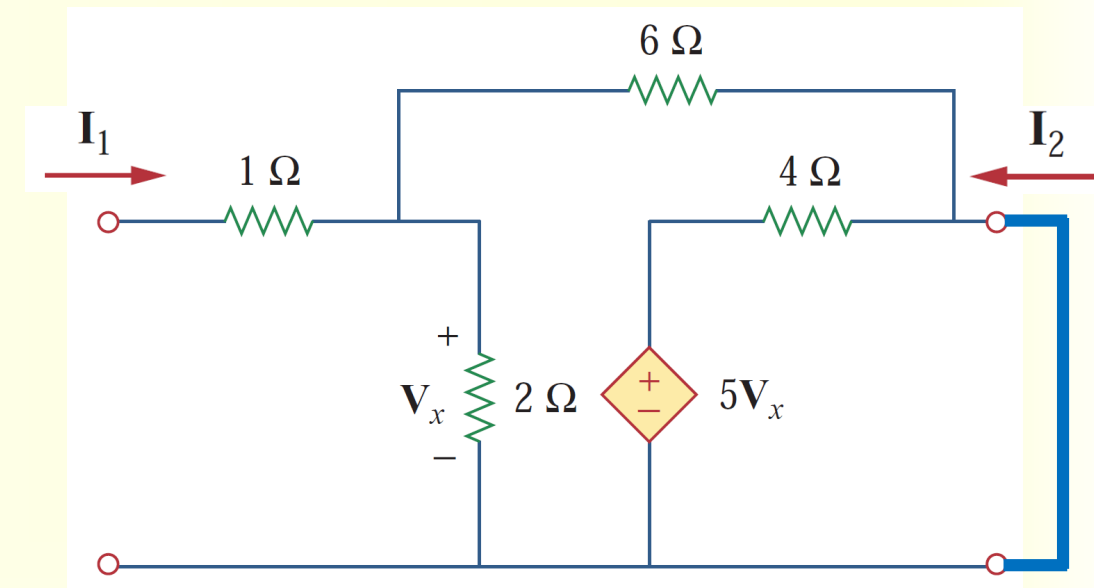
ΔΙΘΥΡΑ

$$B = -\frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$

- Γράφουμε βασικές σχέσεις:

$$\frac{V_1 - V_x}{1} = \frac{V_x}{6} + \frac{V_x}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{10}{6} V_x$$

$$I_2 = -\frac{5V_x}{4} - \frac{V_x}{6} = -\frac{17}{12} V_x$$



$$B = -\frac{V_1}{I_2} = \frac{10}{6} \frac{12}{17} = 1,1765$$

ΔΙΘΥΡΑ

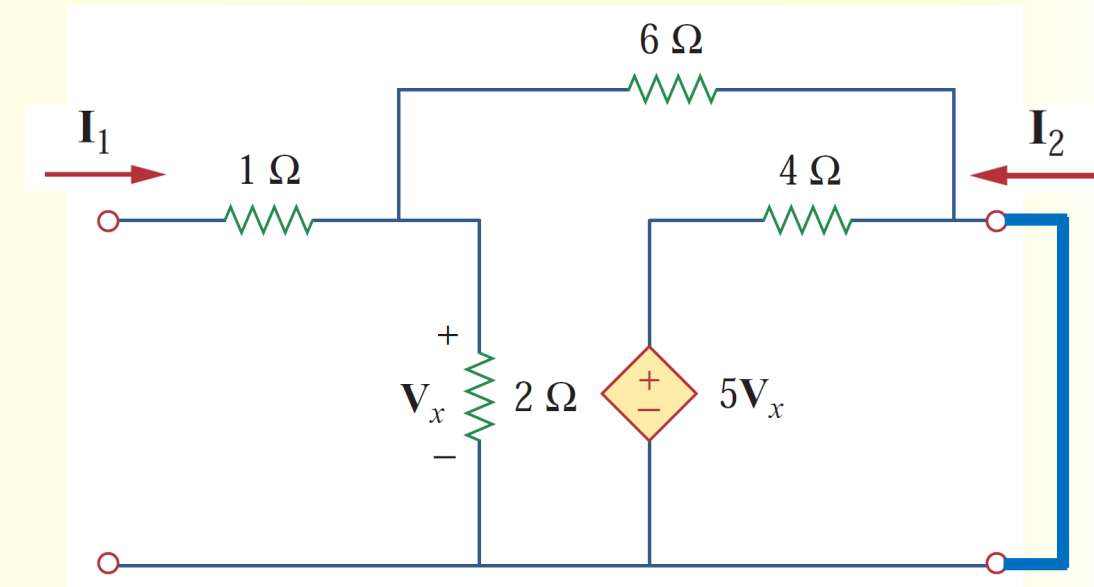
$$D = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$

- Γράφουμε βασικές σχέσεις:

$$\frac{V_1 - V_x}{1} = \frac{V_x}{6} + \frac{V_x}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{10}{6} V_x$$

$$I_2 = -\frac{5V_x}{4} - \frac{V_x}{6} = -\frac{17}{12} V_x$$

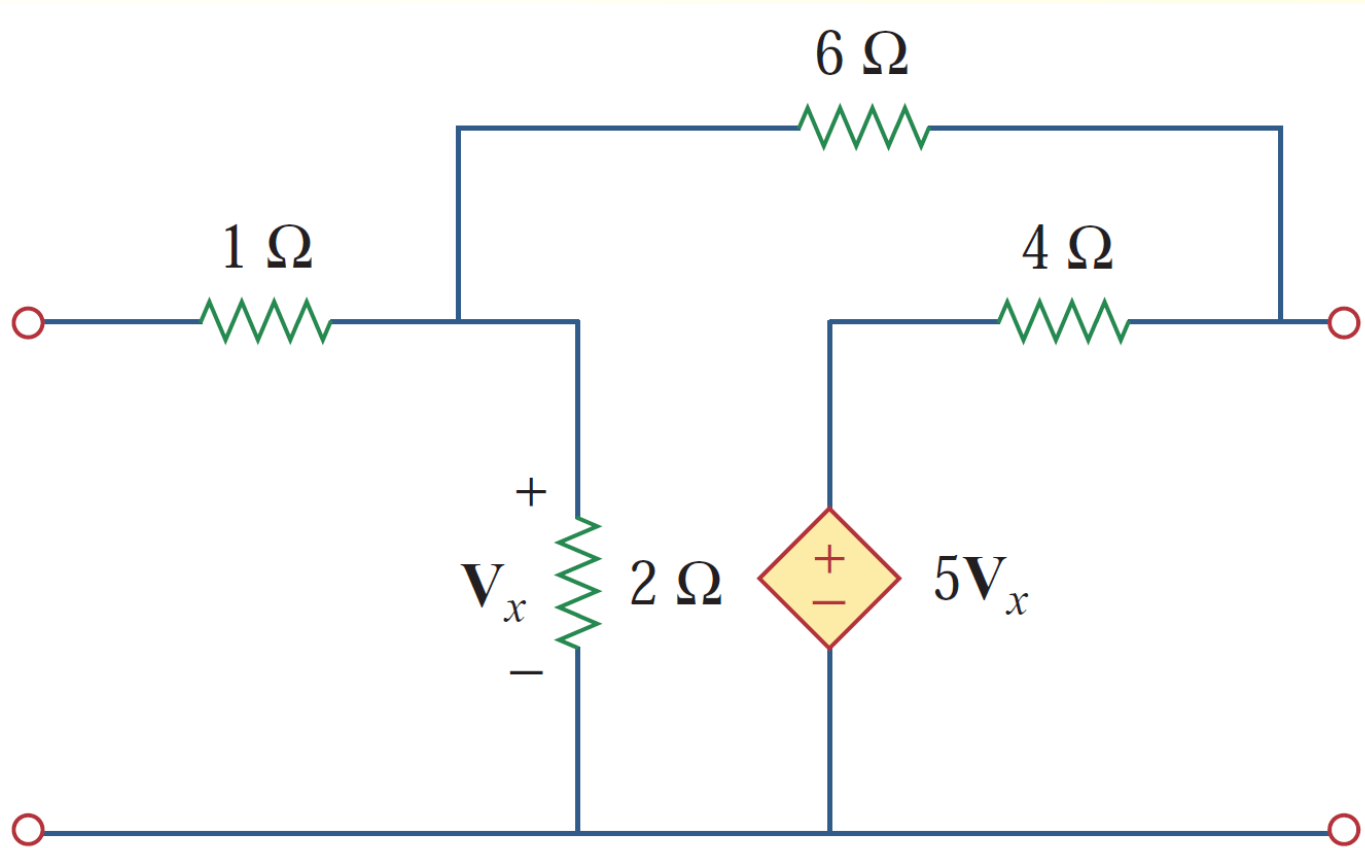
$$I_1 = \frac{V_1 - V_x}{1} \Rightarrow V_1 = I_1 + V_x$$



$$I_1 = \frac{V_1 - V_x}{1} \Rightarrow I_1 = \frac{4}{6} V_x \Rightarrow$$

$$D = -\frac{I_1}{I_2} = \frac{4}{6} \frac{12}{17} = 0,4706$$

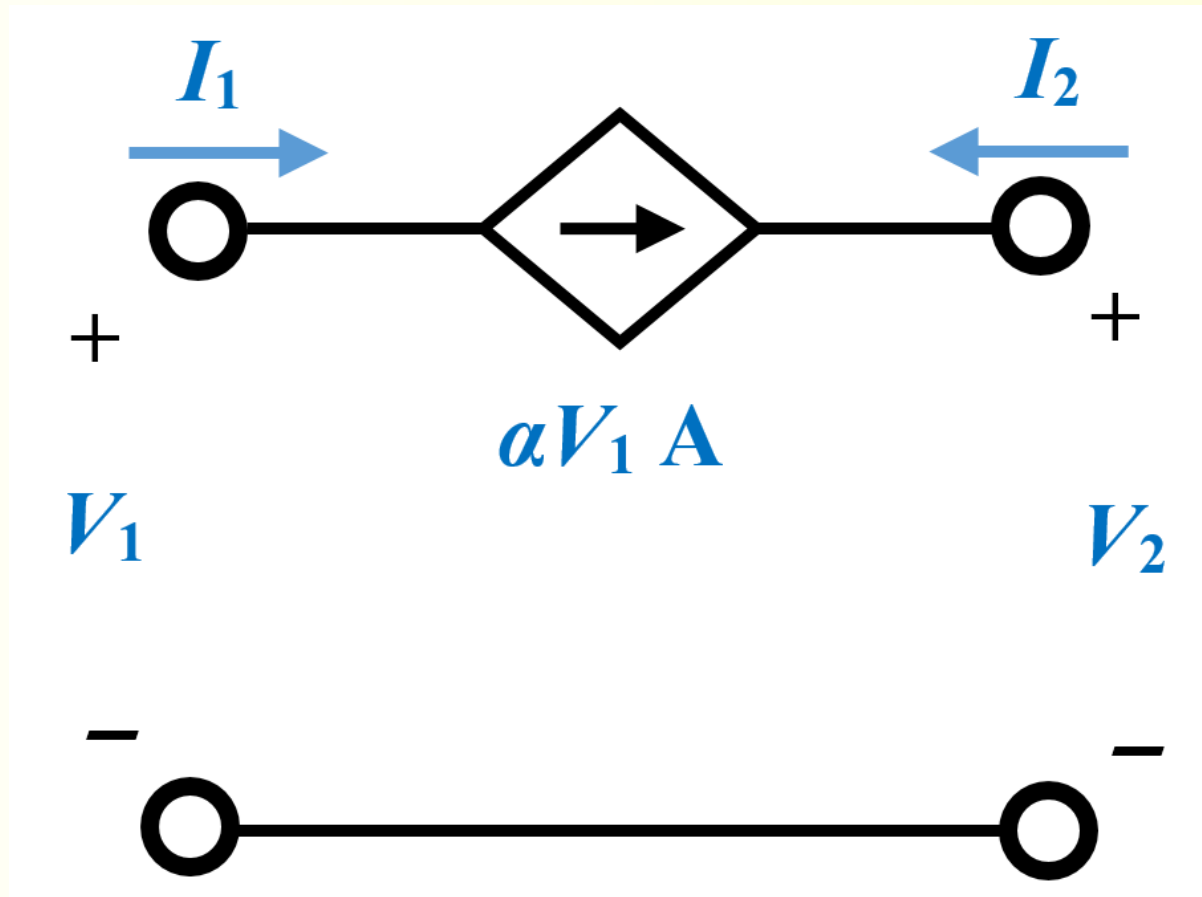
ΔΙΘΥΡΑ



$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,3235 & 1,1765\ \Omega \\ 0,0294\ \text{S} & 0,4706 \end{pmatrix}$$

8

ΔΙΘΥΡΑ



- Να υπολογιστούν οι παράμετροι T για το δίθυρο

ΔΙΘΥΡΑ

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

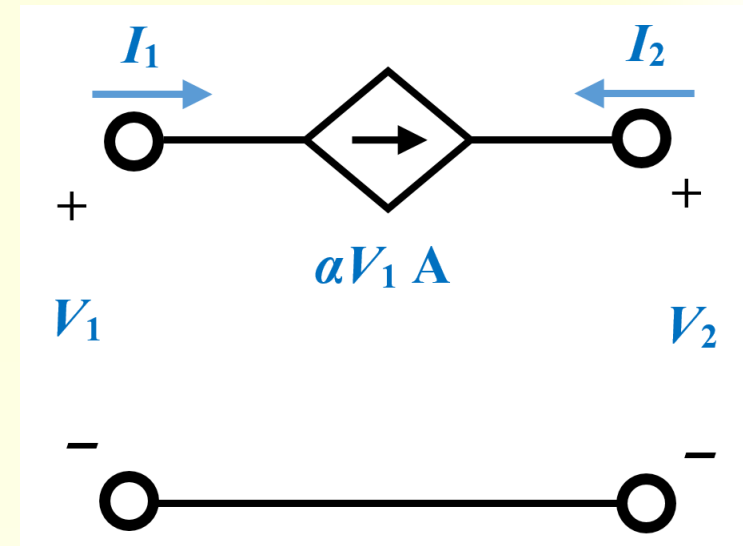
$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

$$I_2 = 0 \Rightarrow -\alpha V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 0 \Rightarrow A = \frac{V_1}{V_2} = 0$$

$$I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = 0 \Rightarrow C = \frac{I_1}{V_2} = 0$$

$$V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = -BI_2 \Rightarrow V_1 = B\alpha V_1 \Rightarrow B = \frac{1}{\alpha}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_2 = 0 \Rightarrow I_1 = \alpha V_1 \\ V_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -\alpha V_1 \end{array} \right\} \Rightarrow D = -\frac{I_1}{I_2} = 1$$

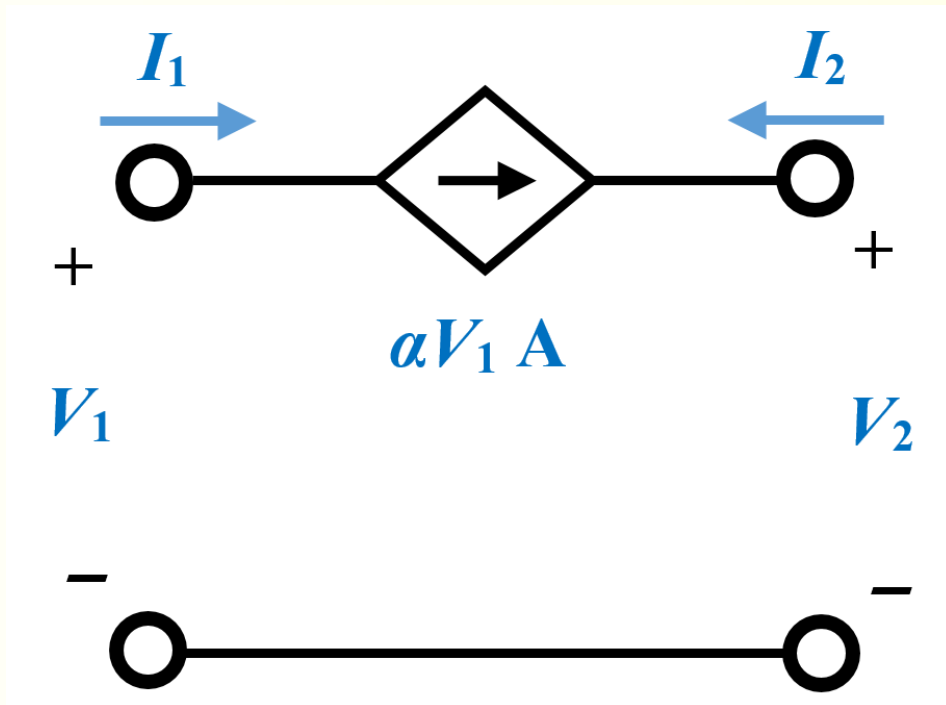


$$B = -\left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

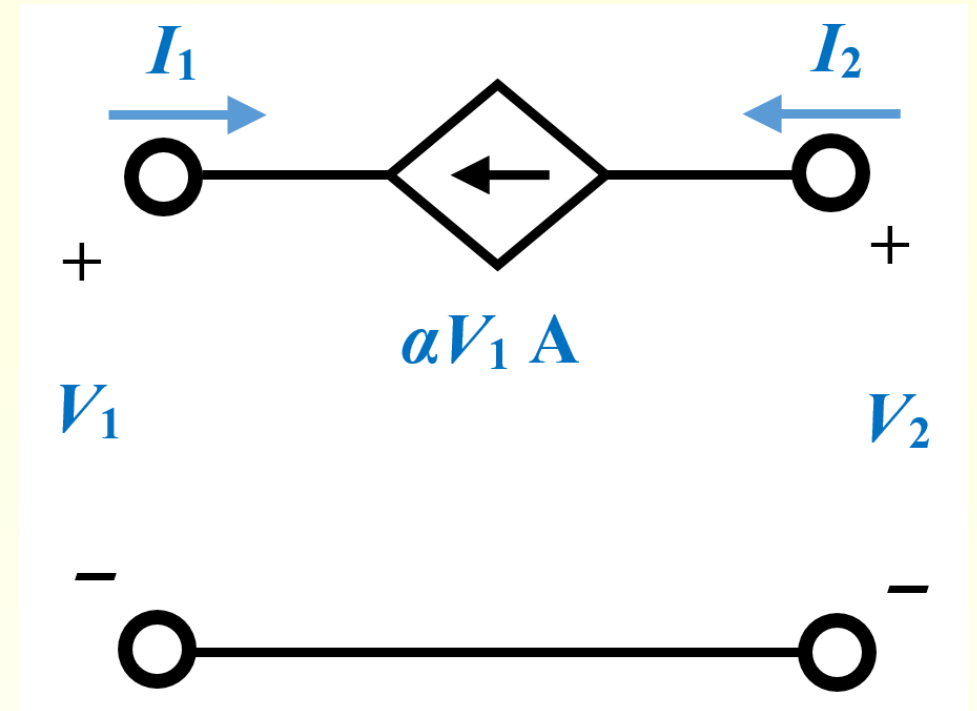
$$D = -\left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΔΙΘΥΡΑ



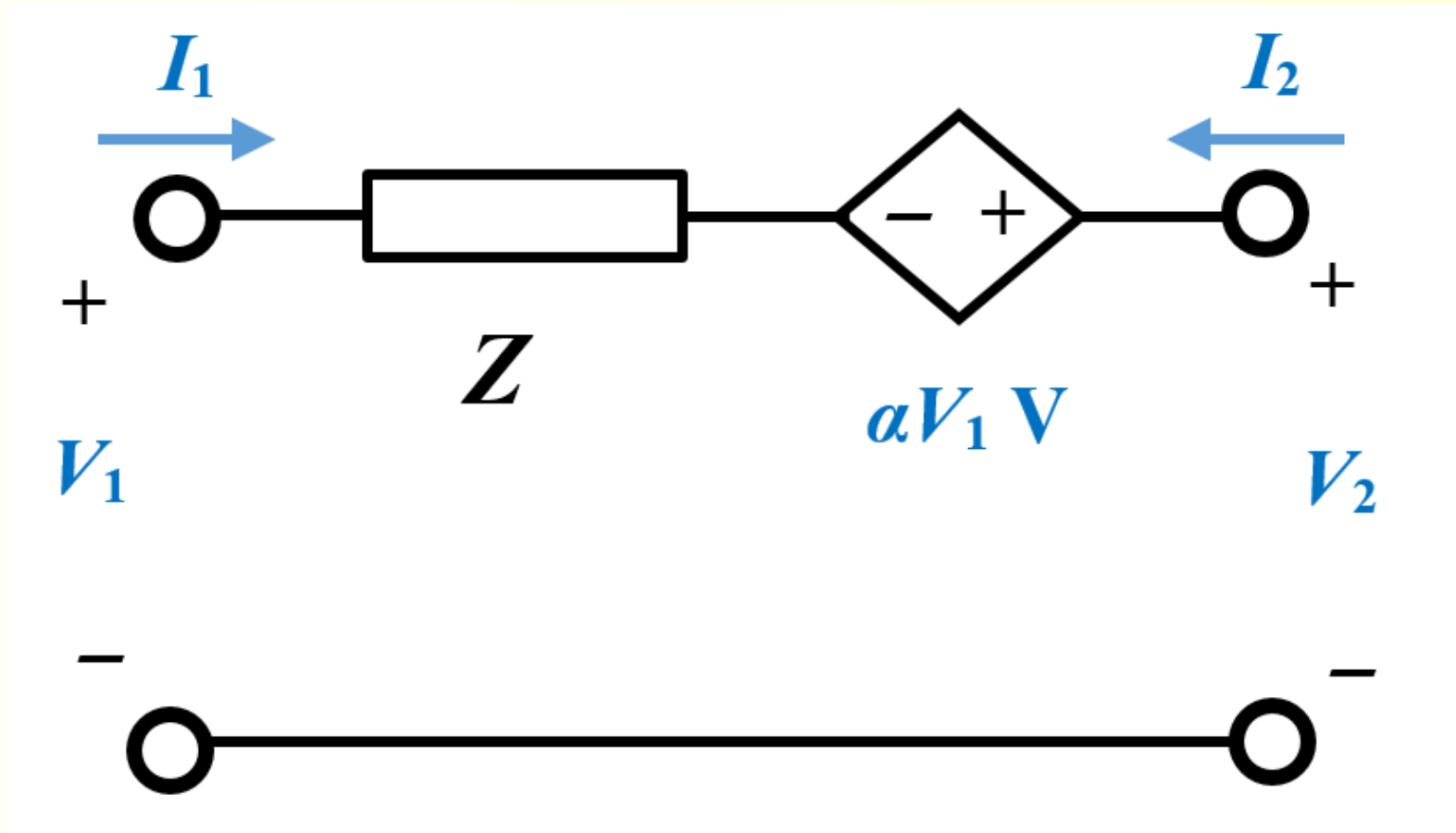
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9

ΔΙΘΥΡΑ



- Να υπολογιστούν οι παράμετροι T για το δίθυρο

ΔΙΘΥΡΑ

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$
$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

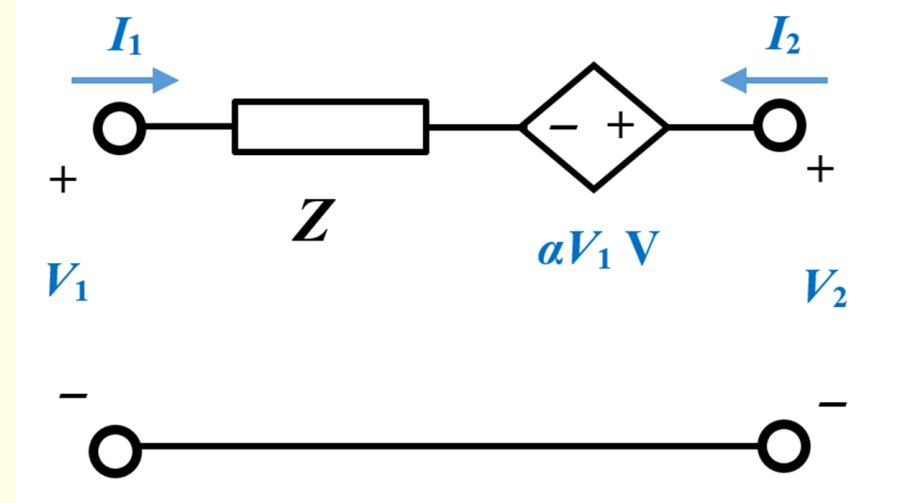
$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = 0$$

$$-V_1 + 0 - \alpha V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = (1 + \alpha)V_1 \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{1 + \alpha}$$

$$I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = 0 \Rightarrow C = \frac{I_1}{V_2} = 0$$



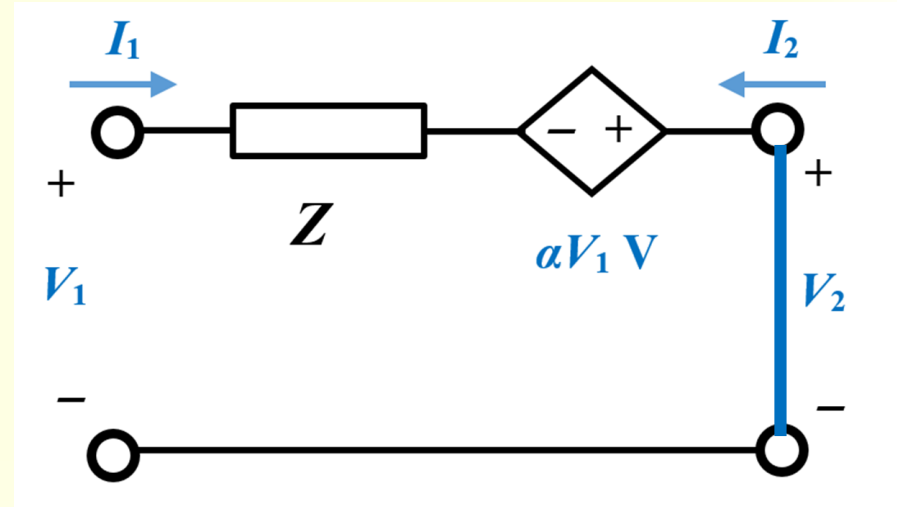
ΔΙΘΥΡΑ

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

$$B = -\left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad D = -\left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$V_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -I_1 \Rightarrow D = -\frac{I_1}{I_2} = 1$$



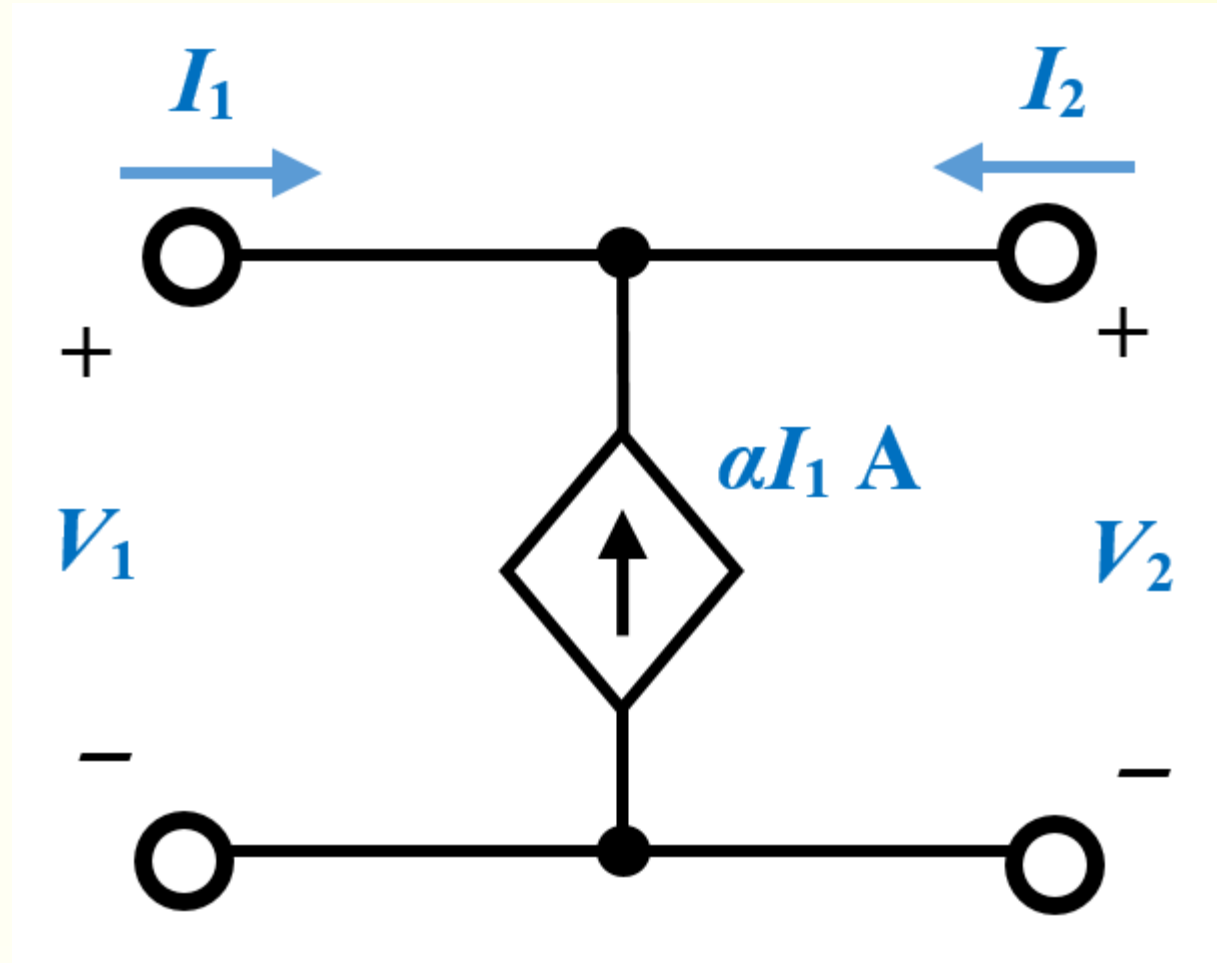
$$I_2 = -I_1 \Rightarrow -V_1 + I_1 Z - \alpha V_1 = 0 \Rightarrow V_1(1 + \alpha) = I_1 Z \Rightarrow V_1 = I_1 \frac{Z}{1 + \alpha}$$

$$B = -\frac{V_1}{I_2} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{I_1 \left(\frac{Z}{1 + \alpha} \right)}{I_1} \Rightarrow B = \frac{Z}{1 + \alpha}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \alpha} & \frac{Z}{1 + \alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10

ΔΙΘΥΡΑ



- Να υπολογιστούν οι παράμετροι T για το δίθυρο

ΔΙΘΥΡΑ

$$I_2 = 0 \Rightarrow V_1 = V_2 \Rightarrow A = 1$$

$$I_2 = 0 \Rightarrow I_1 + \alpha I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 0 \Rightarrow$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} = 0$$

$$V_2 = 0 \Rightarrow B = -\frac{V_1}{I_2} = -\frac{V_2}{I_2} = 0$$

$$\text{NPK: } I_1 + \alpha I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow -I_1(1 + \alpha) = I_2 \Rightarrow$$

$$D = -\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{1 + \alpha}$$

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

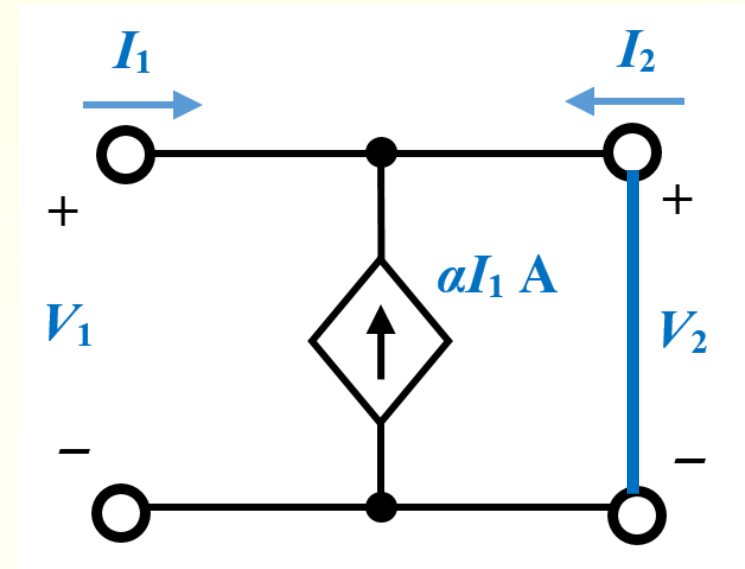
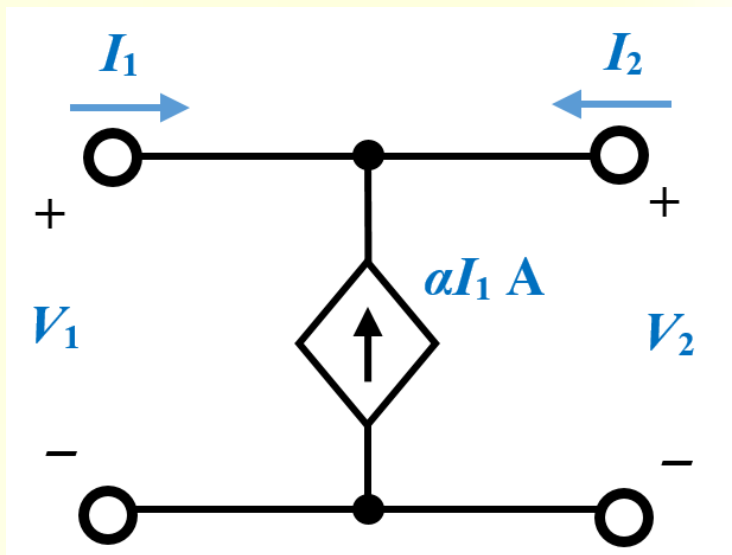
$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

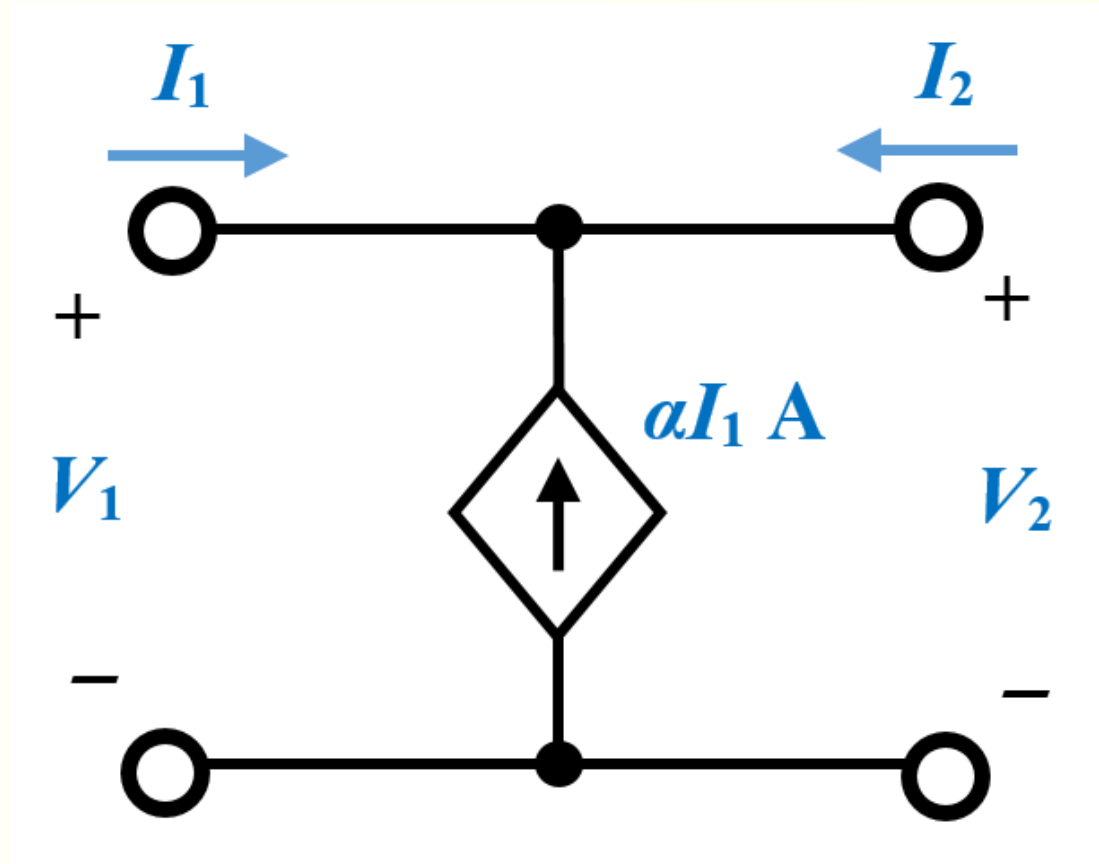
$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$B = -\left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$D = -\left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

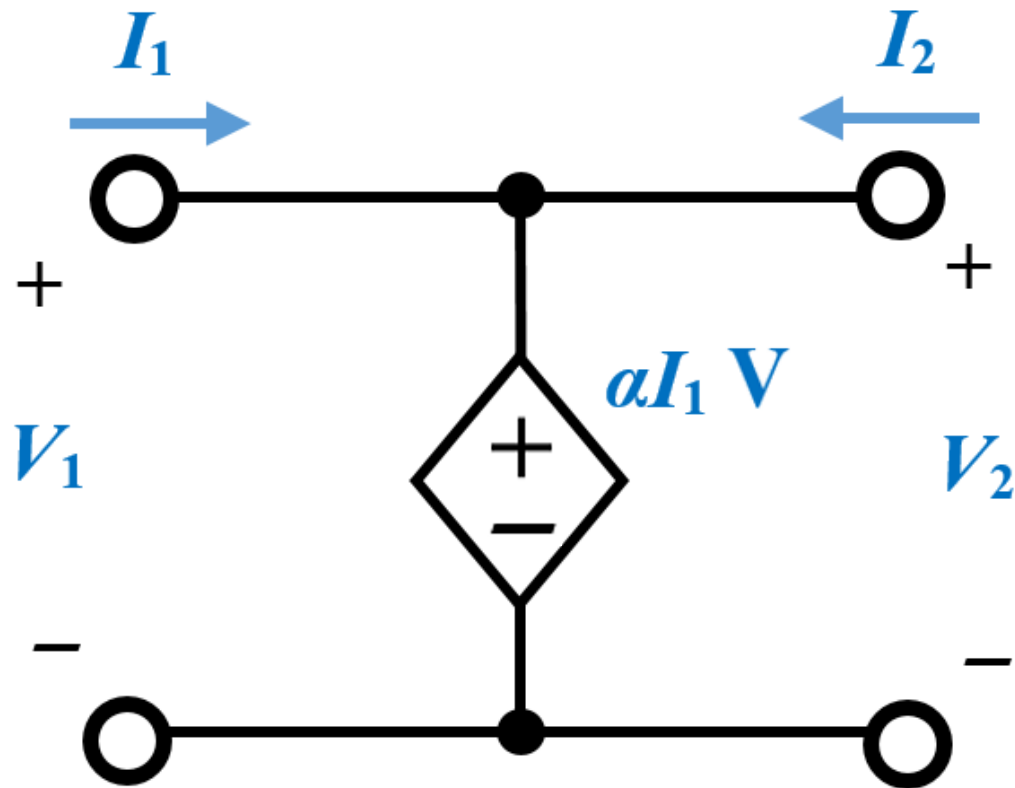


ΔΙΘΥΡΑ



$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \alpha} \end{pmatrix}$$

ΔΙΘΥΡΑ

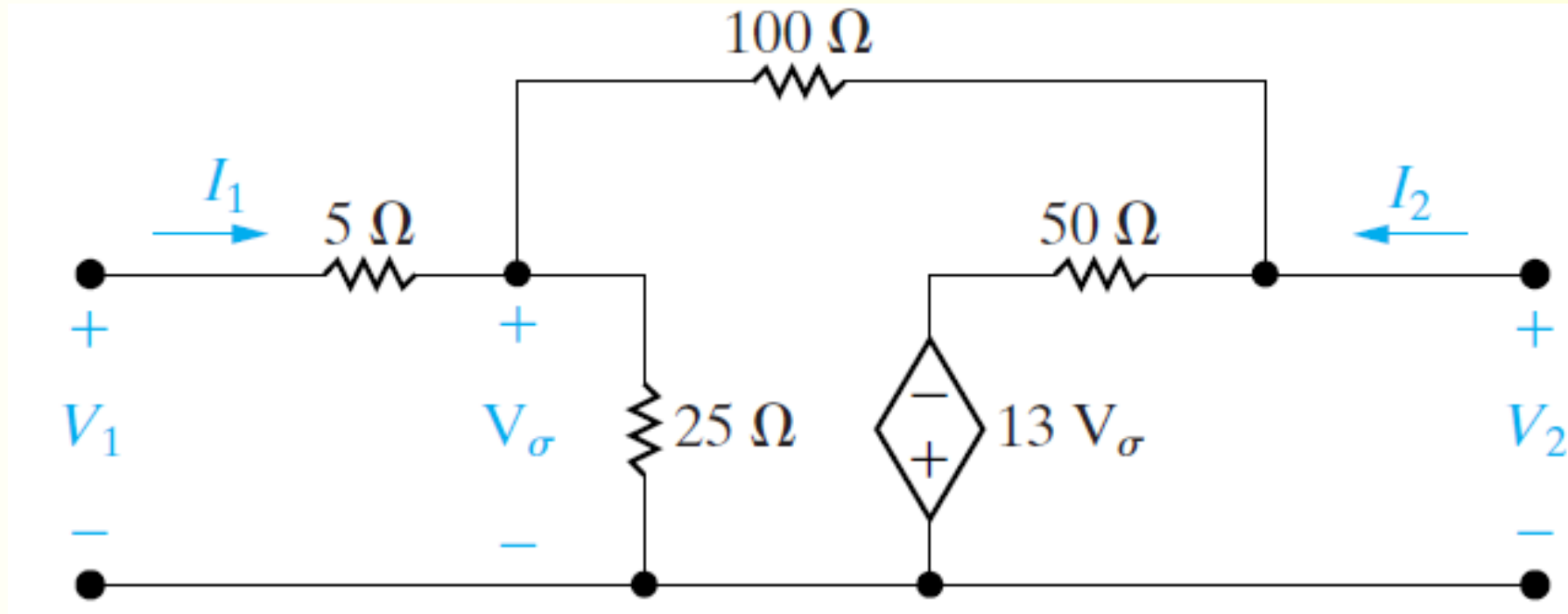


- Δείξτε ότι το δίθυρο έχει τον εξής πίνακα T:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

11

ΔΙΘΥΡΑ



- Να υπολογιστούν οι παράμετροι g για το δίθυρο

ΔΙΘΥΡΑ

- Θεωρούμε ότι $I_2 = 0$ οπότε

$$5I_1 + 25(I_1 - J_2) = V_1 = 1$$

«Παγώνοντας» το V_1 σε μια οποιαδήποτε τιμή δεν θα επηρεάσει τις τιμές των παραμέτρων g.

$$25(J_2 - I_1) + 100J_2 + 50J_2 - 13V_\sigma = 0$$

$$30I_1 - 25J_2 = 1$$

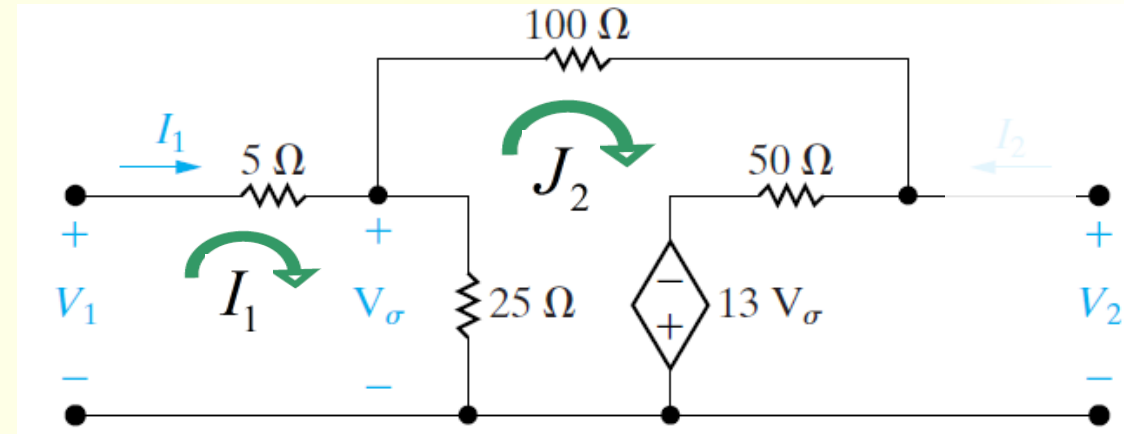
$$-25I_1 + 175J_2 = 13V_\sigma = 13 \times 25(I_1 - J_2)$$

$$30I_1 - 25J_2 = 1$$

$$-350I_1 + 500J_2 = 0$$

$$I_1 = 80 \text{ mA}$$

$$J_2 = 56 \text{ mA}$$



$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0}$$

$$V_2 = 50J_2 - 13 \times 25(I_1 - J_2) = -5$$

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} = \frac{80 \text{ mA}}{1} = 80 \text{ mS}$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} = \frac{-5}{1} = -5$$

ΔΙΘΥΡΑ

- Τώρα $V_1 = 0$ οπότε:

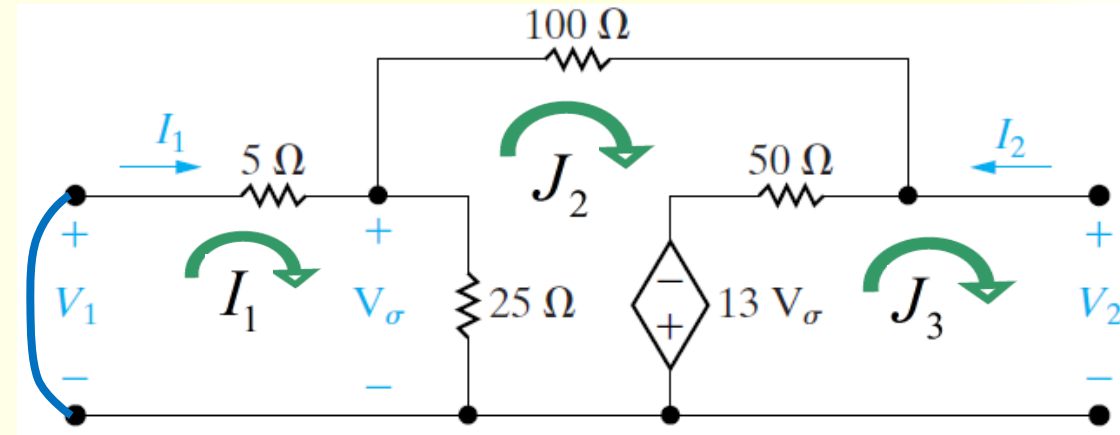
$$5I_1 + 25(I_1 - J_2) = 0$$

$$25(J_2 - I_1) + 100J_2 + 50(J_2 - J_3) - 13V_\sigma = 0$$

$$50(J_3 - J_2) + V_2 + 13V_\sigma = 0$$

$$V_\sigma = 25(I_1 - J_2)$$

$$(I_2 = -J_3)$$



$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} \quad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

- Το σύστημα των εξισώσεων ισχύει για κάθε τιμή του V_2 , π.χ. 3 V
- Θα μπορούσαμε **ισοδύναμα** να είχαμε τοποθετήσει μια **αυθαίρετη** πηγή ρεύματος I_2

ΔΙΘΥΡΑ

- Επιλύουμε για $V_2 = 1$ και βρίσκουμε:

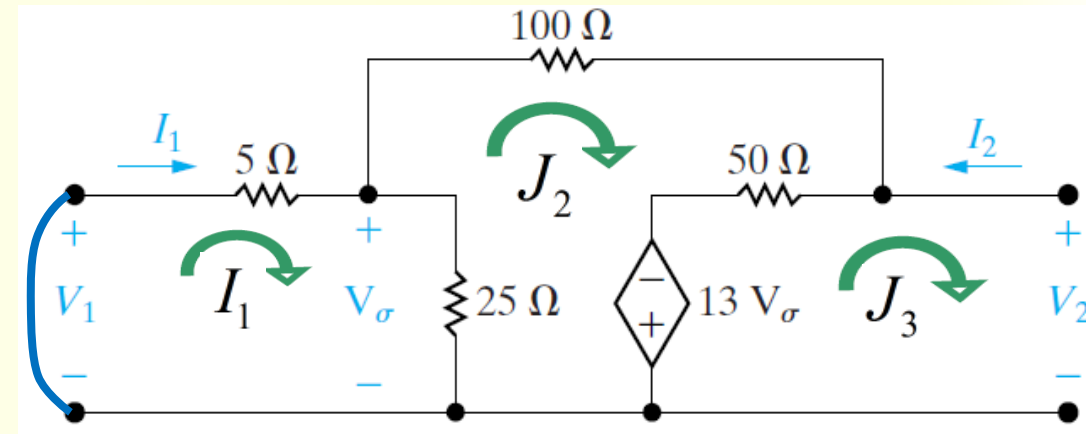
$$I_1 = -0,008$$

$$J_2 = -0,0096$$

$$J_3 = -0,040 \Rightarrow I_2 = 0,040$$

- Που δίνουν

$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} = \frac{-0,008}{0,04} = -0,2$$
$$g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{0,04} = 25$$

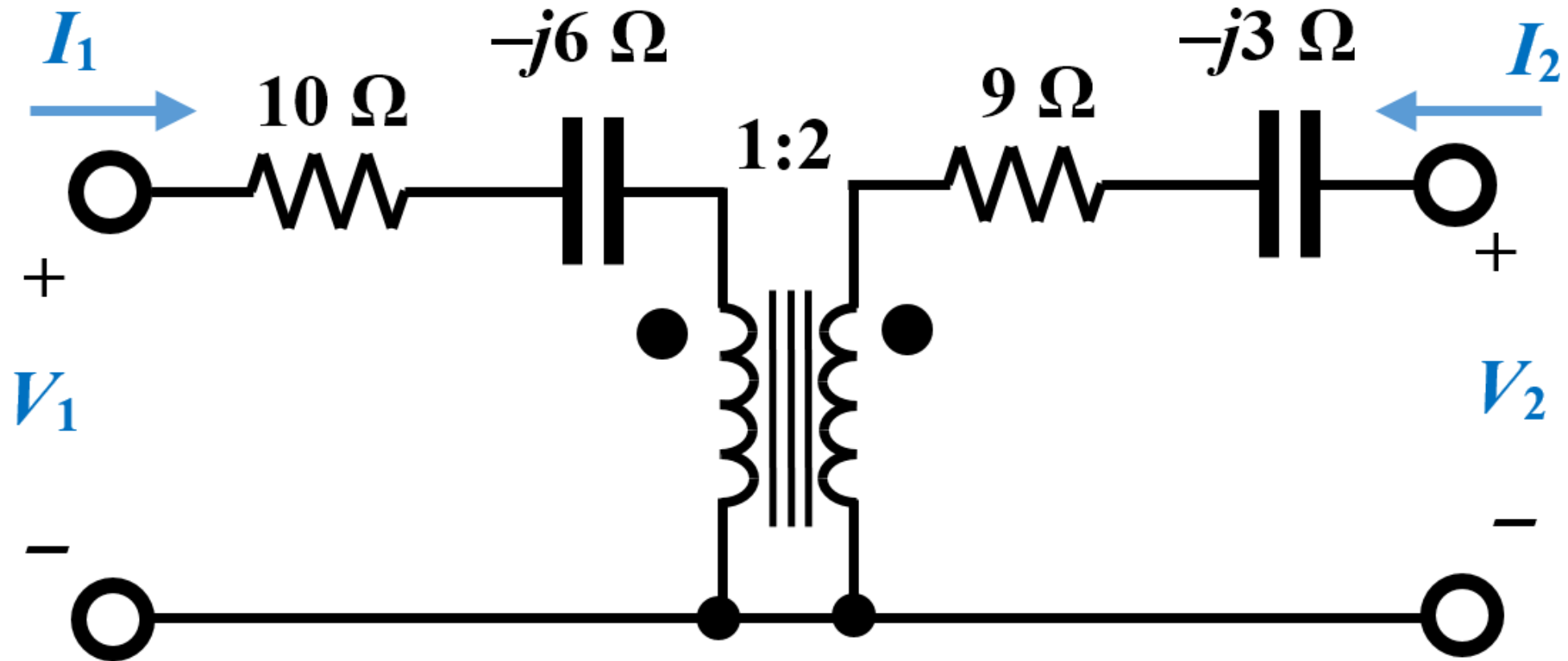


$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} \quad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 80 \text{ mS} & -0,2 \\ -5 & 25 \Omega \end{pmatrix}$$

12

ΔΙΘΥΡΑ

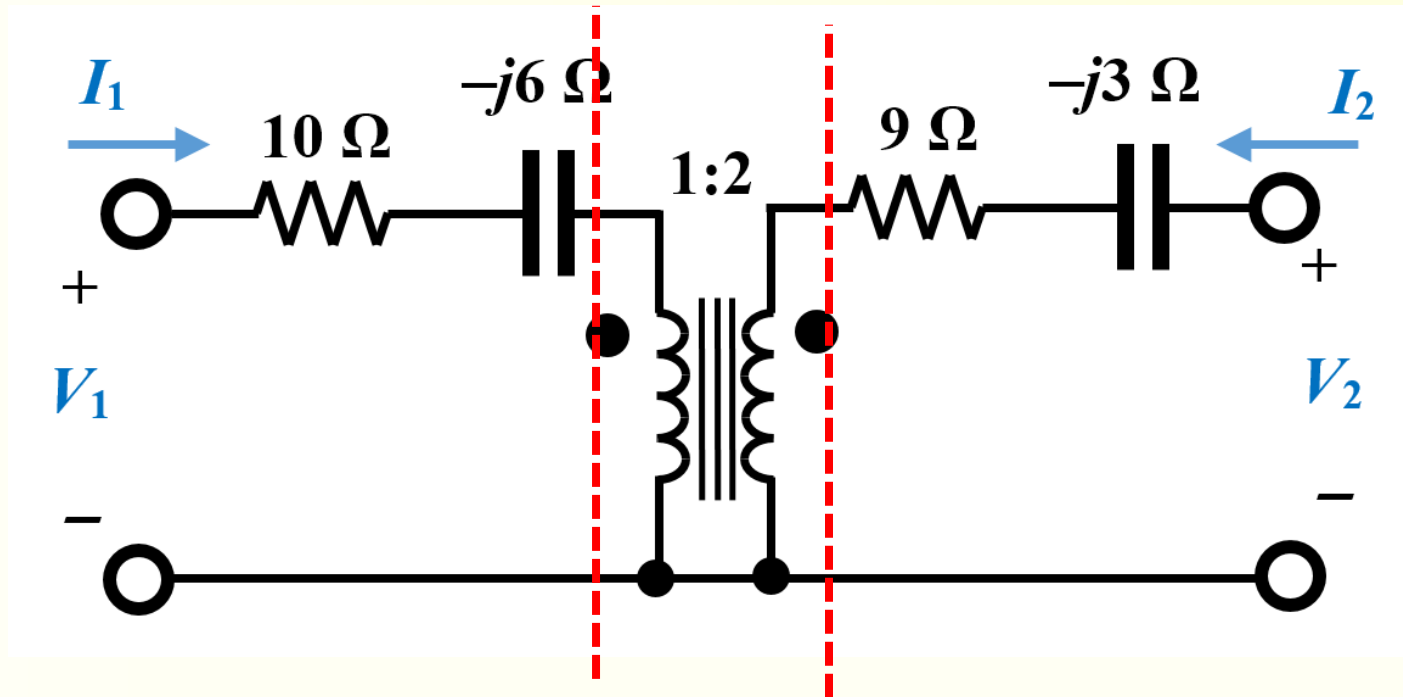


- Να υπολογιστούν οι παράμετροι T για το δίθυρο

ΔΙΘΥΡΑ

1^{ος} ΤΡΟΠΟΣ

- Με σύνδεση σε αλυσίδα τριών διθύρων:



$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 10 - j6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 - j3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 24,5 - j13,5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

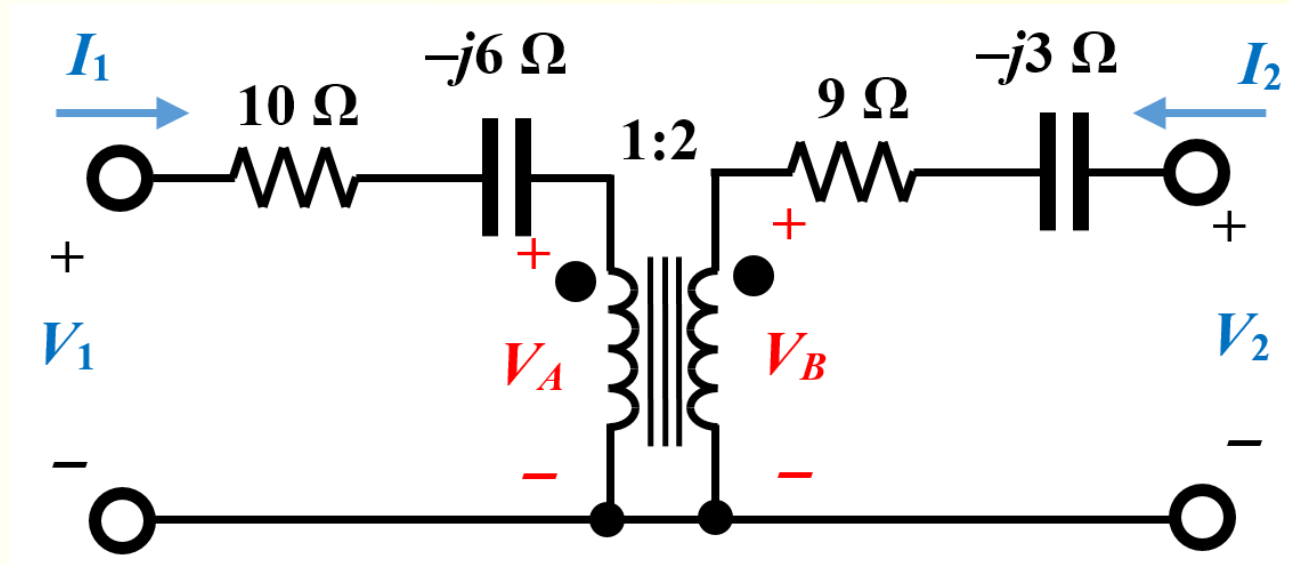
ΔΙΘΥΡΑ

2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ

- Με «αυθόρμητη» παραγωγή των σχέσεων
- Ξεκινώντας από τον ιδανικό μετασχηματιστή:

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

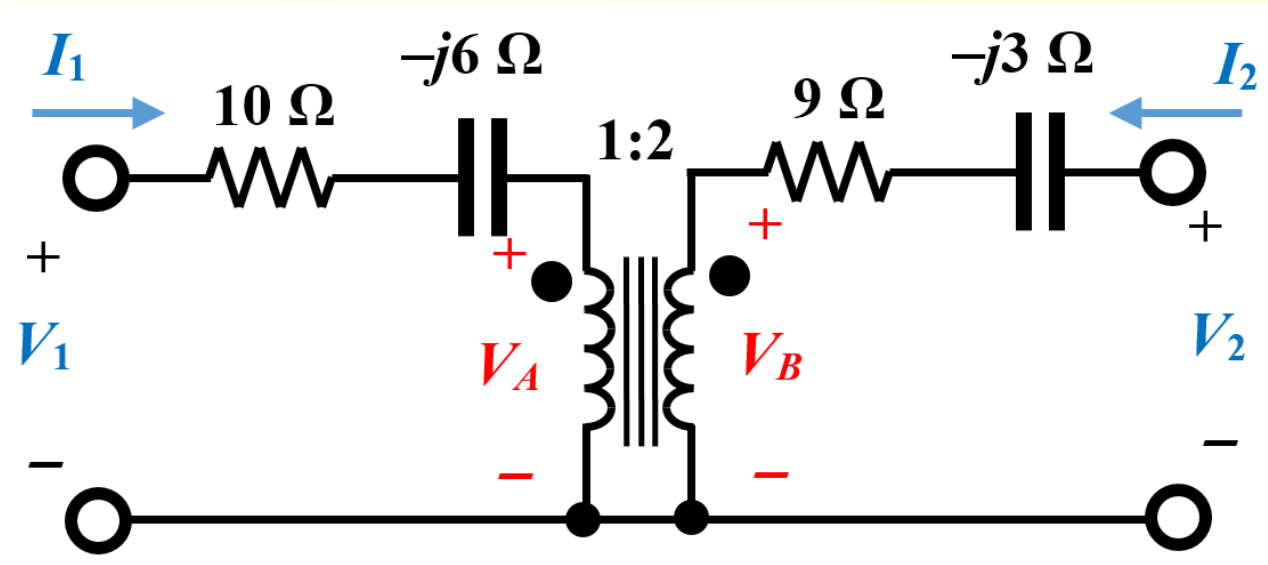
$$I_1 = CV_2 - DI_2$$



$$\left. \begin{array}{l} \frac{V_A}{V_B} = \frac{1}{2} \\ \frac{I_A}{I_B} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 2V_A \\ I_A = -2I_B \end{cases} \Rightarrow I_1 = -2I_2 \Rightarrow C = 0, D = 2$$

ΔΙΘΥΡΑ

2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ



$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

- Με βροχικές εντάσεις

$$V_1 = (10 - j6)I_1 + V_A = (10 - j6)(-2I_2) + V_A$$

$$-V_B - I_2(9 - j3) = -V_2 \Rightarrow V_2 = 2V_A + I_2(9 - j3) \Rightarrow V_A = \frac{V_2 - I_2(9 - j3)}{2}$$

ΔΙΘΥΡΑ

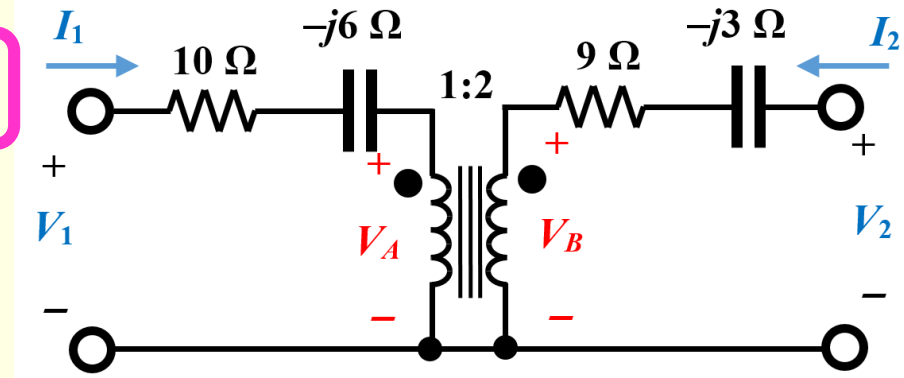
2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ

- Και αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} V_1 &= (10 - j6)(-2I_2) + \frac{-(9 - j3)}{2} I_2 + \frac{V_2}{2} \\ &= -(20 - j12)I_2 - (4,5 - j1,5)I_2 + \frac{V_2}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

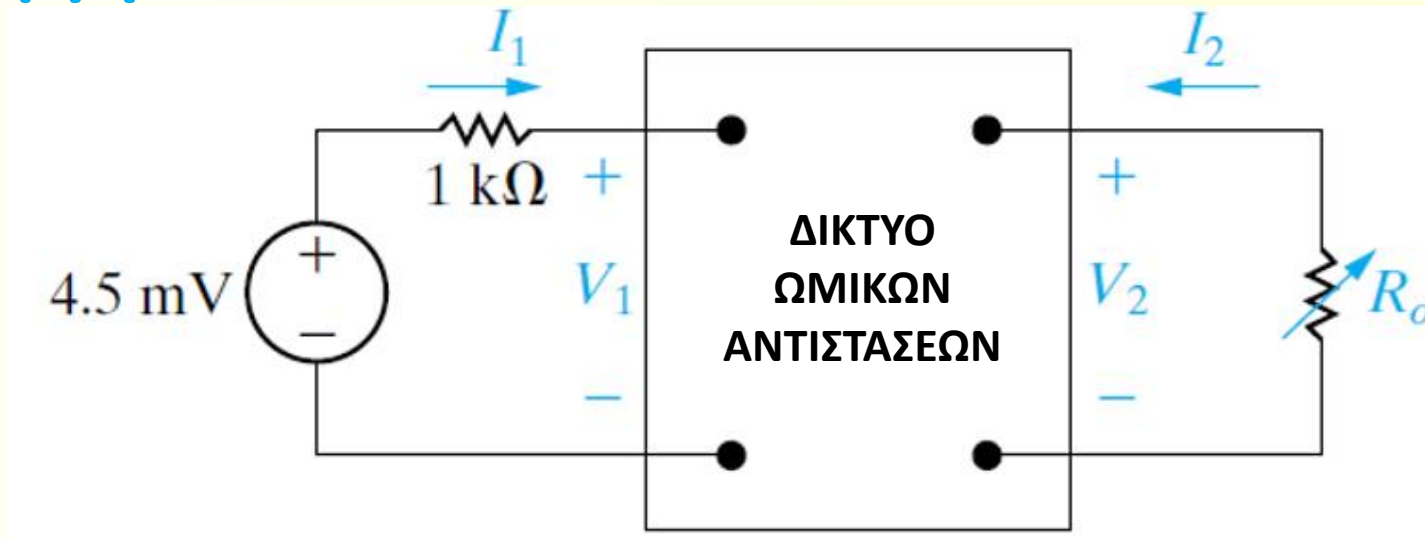
$$V_1 = \frac{V_2}{2} - (24,5 - j13,5)I_2 \Rightarrow A = 0,5, \quad B = 24,5 - j13,5$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,5 & 24,5 - j13,5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



13

ΔΙΘΥΡΑ



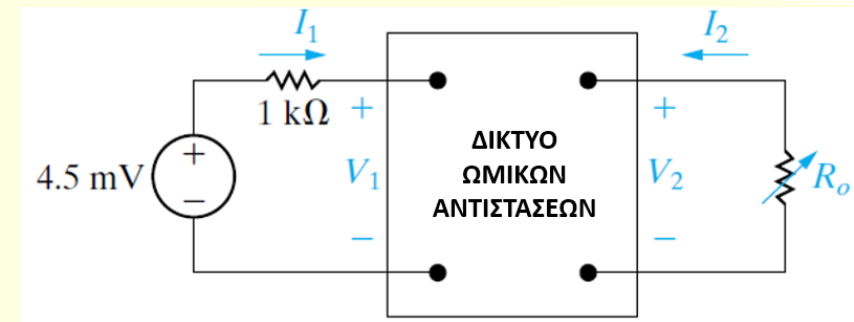
- Στο πιο πάνω δίκτυο ωμικών αντιστάσεων εκτελέστηκαν τα εξής δυο σύνολα μετρήσεων:

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ 1	ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ 2
$V_1 = 0,1 \text{ V}$	$V_1 = 0 \text{ V}$
$I_1 = 100 \text{ }\mu\text{A}$	$I_1 = -25 \text{ }\mu\text{A}$
$V_2 = 200 \text{ V}$	$V_2 = 200 \text{ V}$
$I_2 = 0 \text{ A}$	$I_2 = 5 \text{ mA}$

- Μια μεταβλητή αντίσταση R_o συνδεδεμένη στη θύρα 2, ρυθμίζεται έτσι ώστε να δέχεται τη μέγιστη δυνατή ισχύ
- Να υπολογιστεί η τιμή τής μέγιστης αυτής ισχύος

ΔΙΘΥΡΑ

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ 1	ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ 2
$V_1 = 0,1 \text{ V}$	$V_1 = 0 \text{ V}$
$I_1 = 100 \text{ }\mu\text{A}$	$I_1 = -25 \text{ }\mu\text{A}$
$V_2 = 200 \text{ V}$	$V_2 = 200 \text{ V}$
$I_2 = 0 \text{ A}$	$I_2 = 5 \text{ mA}$



- Παρατηρούμε ότι στα δοθέντα σύνολα μετρήσεων έχουμε μια ανοικτοκυκλωμένη έξοδο και μια βραχυκυκλωμένη είσοδο
- Συμπεραίνουμε ότι η τάση εισόδου V_1 και το ρεύμα εξόδου I_2 μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν ανεξάρτητες μεταβλητές
- Άρα, από τις μετρήσεις μπορούμε απευθείας να συναγάγουμε τις παραμέτρους g

ΔΙΘΥΡΑ

- Από τις σχέσεις για τις παραμέτρους g

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

- Θα πάρουμε από την πρώτη μέτρηση

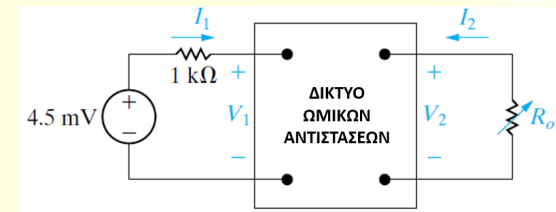
$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} = \frac{100 \times 10^{-6}}{0,1} = 1 \text{ mS}$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} = \frac{200}{0,1} = 2000$$

- Και από τη δεύτερη

$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} = \frac{-25 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-3}} = -0,005$$

$$g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0} = \frac{200}{5 \times 10^{-3}} = 40 \text{ k}\Omega$$



ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ 1	ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ 2
$V_1 = 0,1 \text{ V}$	$V_1 = 0 \text{ V}$
$I_1 = 100 \text{ }\mu\text{A}$	$I_1 = -25 \text{ }\mu\text{A}$
$V_2 = 200 \text{ V}$	$V_2 = 200 \text{ V}$
$I_2 = 0 \text{ A}$	$I_2 = 5 \text{ mA}$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0,001 \text{ S} & -0,005 \\ 2000 & 40000 \text{ }\Omega \end{pmatrix}$$

ΔΙΘΥΡΑ

- Με $V_g = 4,5 \text{ mV}$ και $Z_g = 1 \text{ k}\Omega$ ανατρέχουμε στον πίνακα

$$Y_{in} = g_{11} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{22} + Z_L}$$

$$I_2 = \frac{-g_{21}V_g}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$$

$$V_{Th} = \frac{g_{21}V_g}{1 + g_{11}Z_g}$$

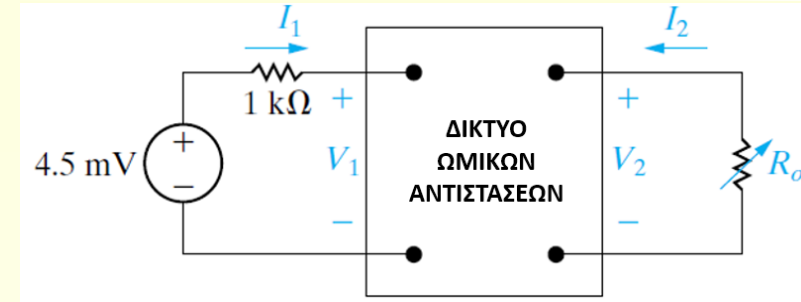
$$Z_{Th} = g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}Z_g}{1 + g_{11}Z_g}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-g_{21}}{g_{11}Z_L + \Delta g}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_{21}Z_L}{g_{22} + Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{g_{21}Z_L}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$$

$$g = \begin{pmatrix} 0,001 \text{ S} & -0,005 \\ 2000 & 40000 \Omega \end{pmatrix}$$

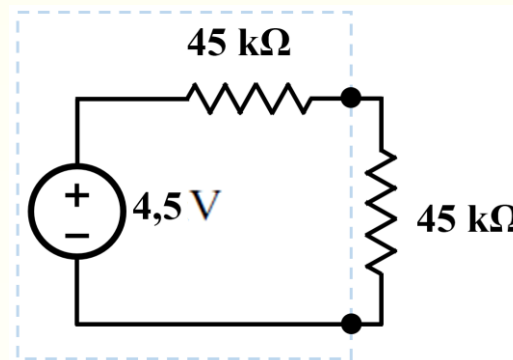


$$V_{Th} = \frac{g_{21}V_g}{1 + g_{11}Z_g} = \frac{2000 \times 0,0045}{1 + 0,001 \times 1000} = 4,5 \text{ V}$$

$$Z_{Th} = g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}Z_g}{1 + g_{11}Z_g} = 40000 - \frac{-0,005 \times 2000 \times 1000}{1 + 0,001 \times 1000} = 45000$$

- Για μέγιστη μεταφορά ισχύος, πρέπει:

$$R_o = Z_{Th} = 45000$$

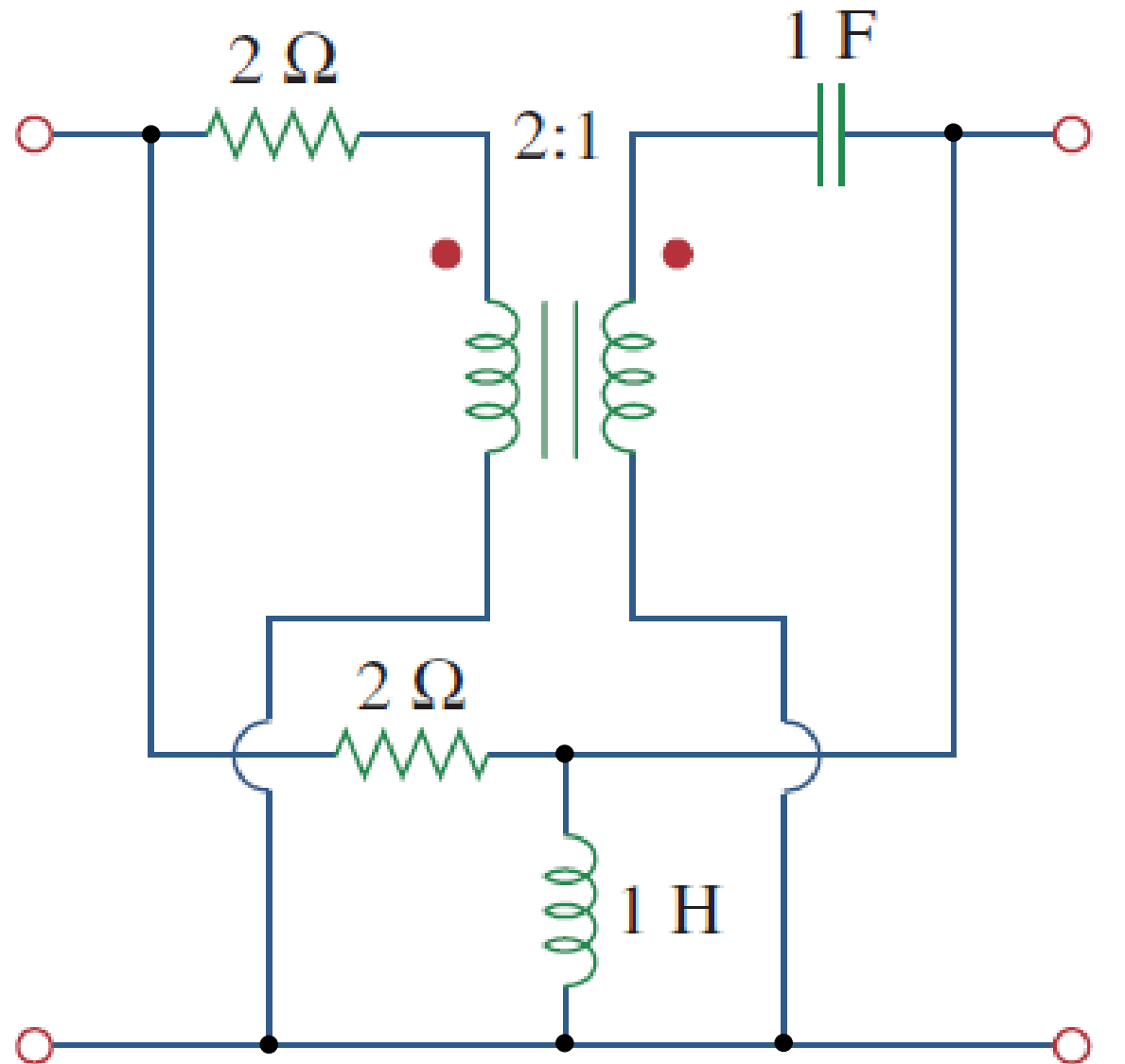


$$i = \frac{4,5}{45000 + 45000} = 50 \mu\text{A}$$

$$P = (50 \times 10^{-6})^2 (45000) = 112,5 \mu\text{W}$$

14

ΔΙΘΥΡΑ

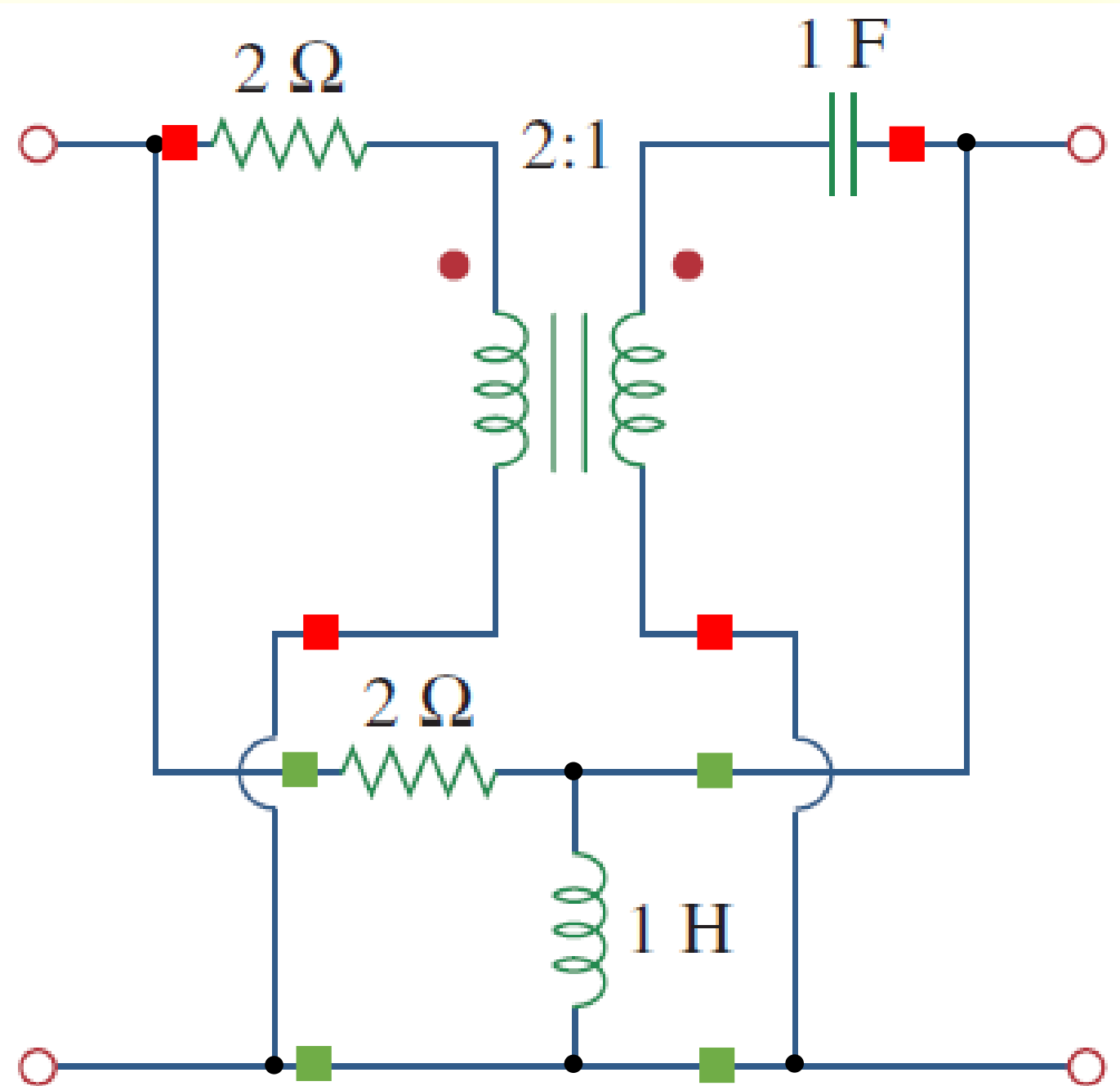


- Να υπολογιστεί ένα σύνολο παραμέτρων για το δίθυρο

ΔΙΘΥΡΑ

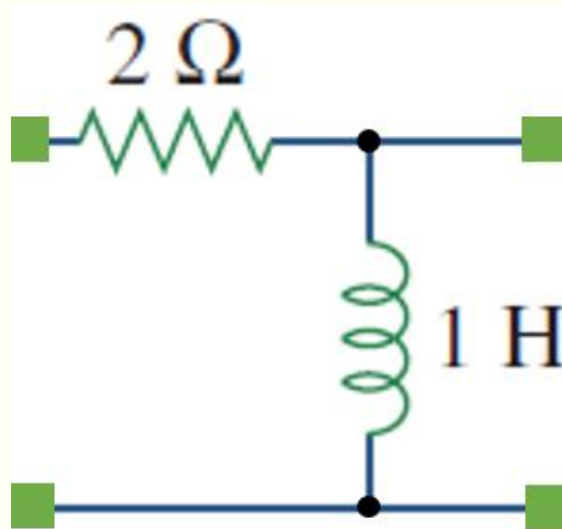
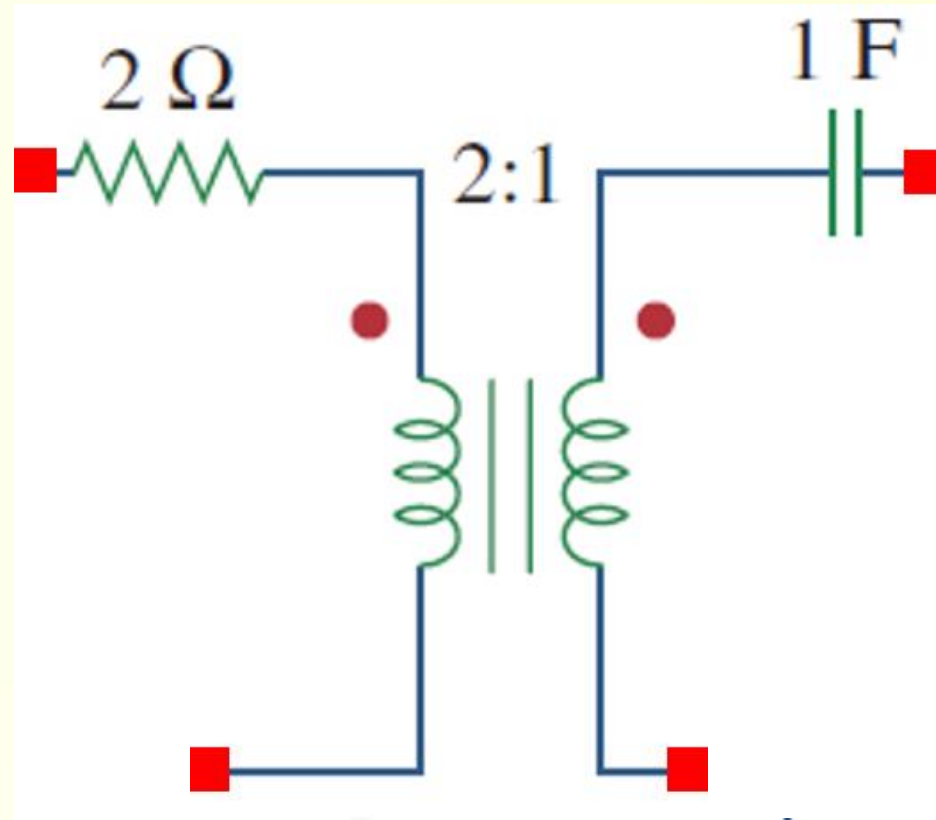
- Παρατηρούμε ότι το δίθυρο μπορεί να αναπαρασταθεί σαν παράλληλη σύνδεση δυο επί μέρους διθύρων
- Για τα οποία ισχύει ότι

$$Y_{ΟΛΙΚΟ} = y^{(1)} + y^{(2)}$$



ΔΙΘΥΡΑ

- Πρέπει να υπολογίσουμε το σύνολο παραμέτρων y για τα επί μέρους δίθυρα



ΔΙΘΥΡΑ

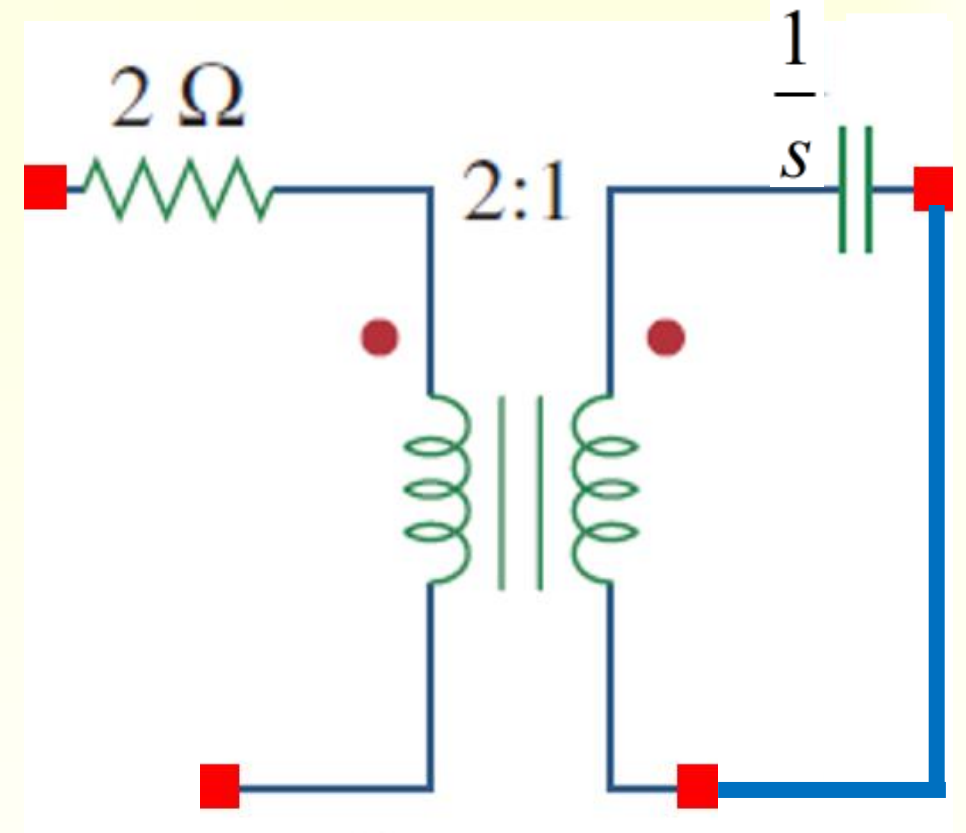
- Περνάμε το πρώτο (επάνω) δίθυρο στο πεδίο συχνότητας και με $V_2 = 0$ θεωρούμε την ανάκλαση του πυκνωτή στο πρωτεύον:

$$Z_{Cισοδ} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \frac{1}{s} = \frac{4}{s}$$

- Τότε θα πάρουμε

$$V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = 2I_1 + \frac{4}{s}I_1 \Rightarrow$$

$$y_{11} = \frac{I_1}{\left(2 + \frac{4}{s}\right)I_1} = \frac{1}{2 + \frac{4}{s}} = \frac{s}{2(s+2)}$$

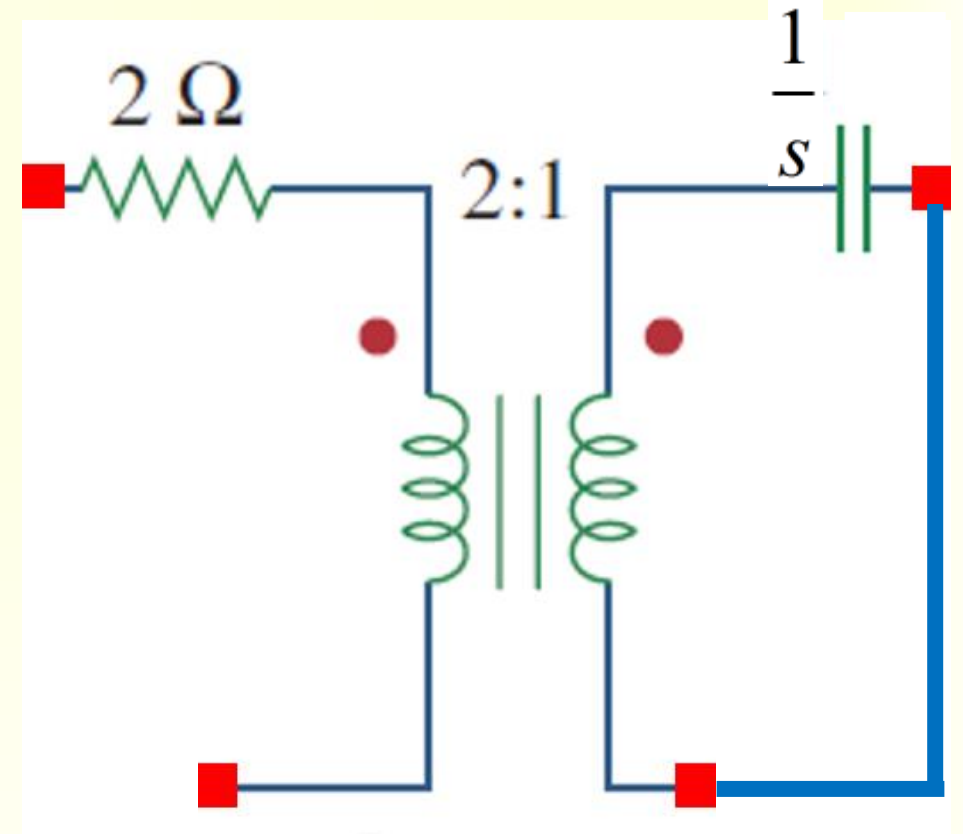


ΔΙΘΥΡΑ

- Επίσης θα είναι

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow I_2 = -2I_1 = -2\left(2 + \frac{4}{s}\right)^{-1} V_1 \Rightarrow$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -2\left(2 + \frac{4}{s}\right)^{-1} = \frac{-s}{s+2}$$



ΔΙΘΥΡΑ

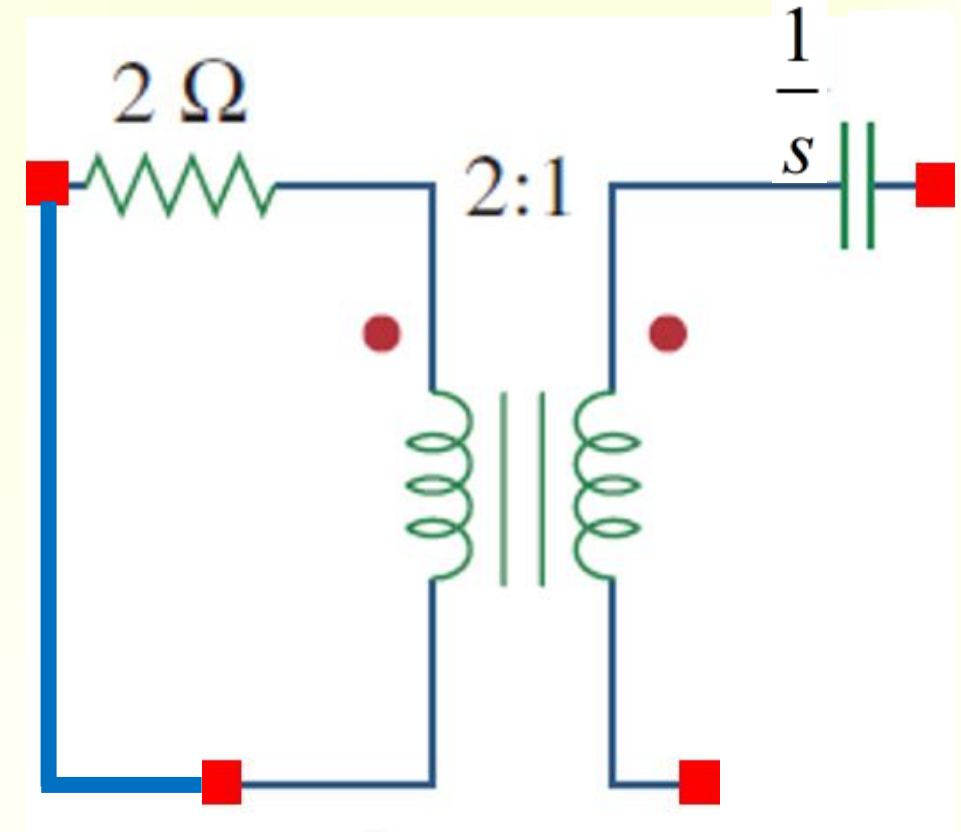
- Τώρα βραχυκυκλώνουμε την είσοδο ($V_1 = 0$) και θεωρούμε την ανάκλαση της αντίστασης στο δευτερεύον:

$$Z_{Rισοδ} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 2 = \frac{1}{2}$$

- Τότε θα πάρουμε

$$V_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s}\right) I_2 = \frac{s+2}{2s} I_2 \Rightarrow$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{2s}{s+2}$$

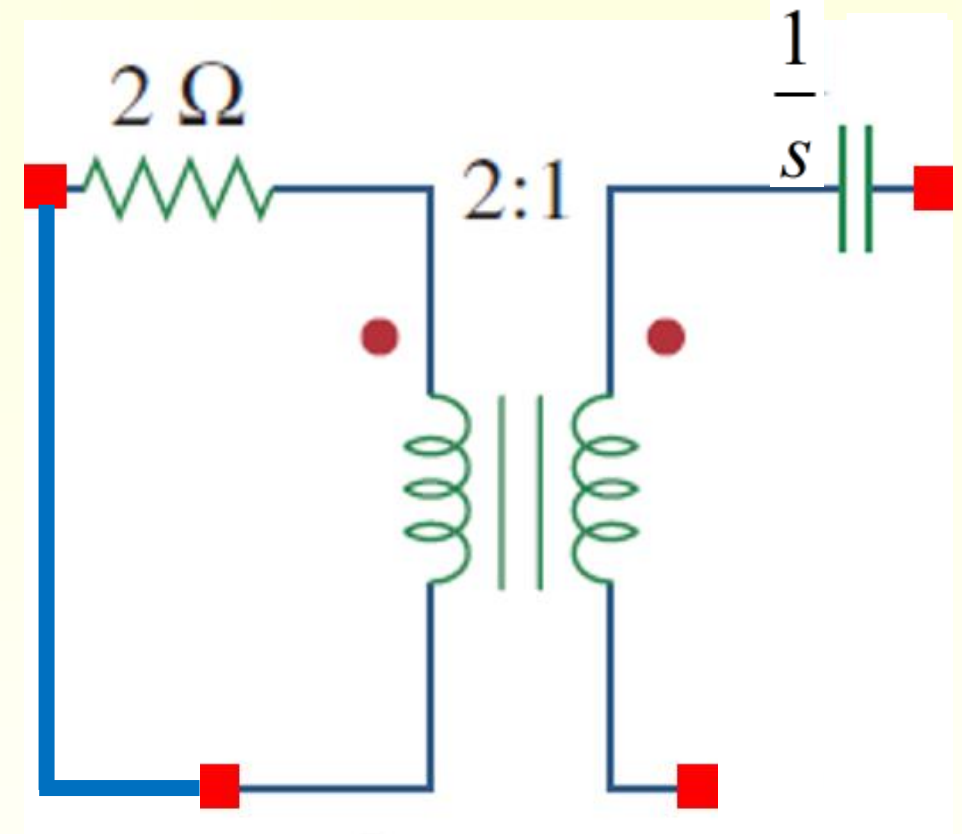


ΔΙΘΥΡΑ

- Επίσης θα είναι:

$$I_1 = -\frac{n_2}{n_1} I_2 = -\frac{1}{2} I_2 \Rightarrow$$

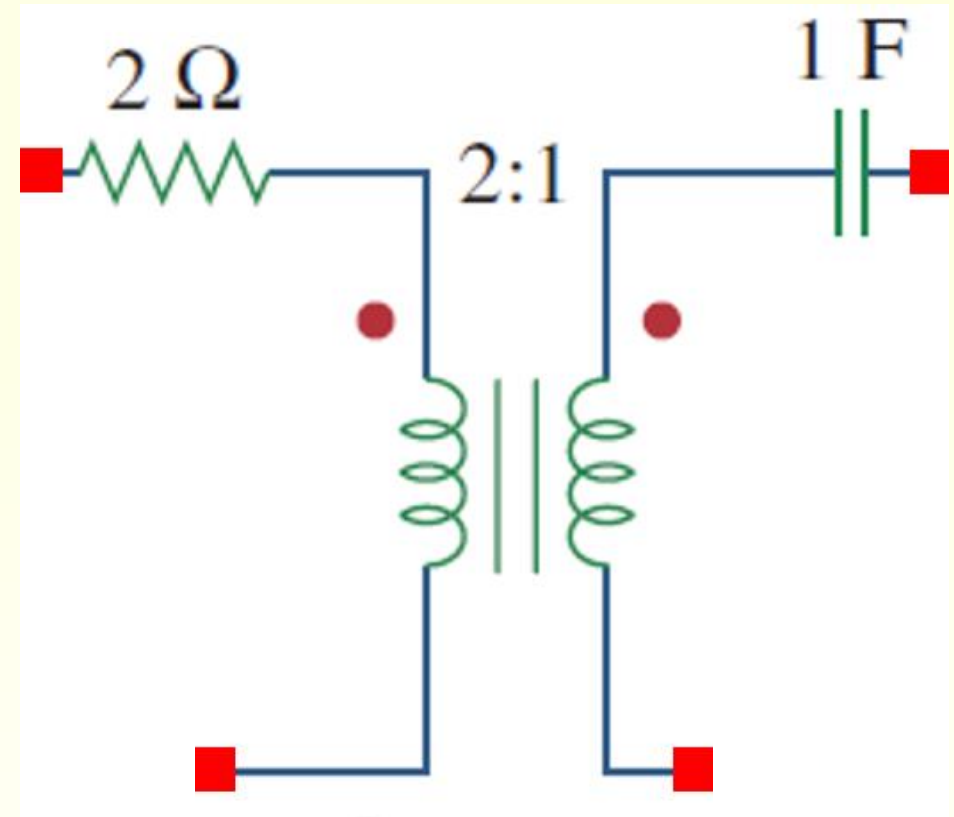
$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{-\frac{1}{2} I_2}{\frac{s+2}{2s} I_2} = -\frac{s}{s+2}$$



ΔΙΘΥΡΑ

- Τελικά:

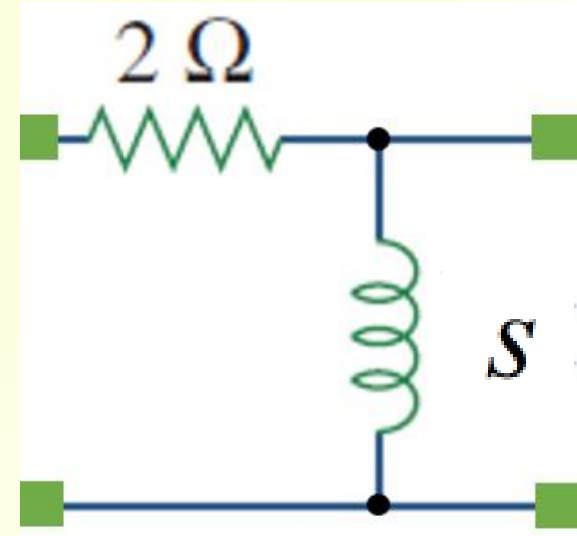
$$\mathbf{Y}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{s}{2(s+2)} & -\frac{s}{s+2} \\ -\frac{s}{s+2} & \frac{2s}{s+2} \end{pmatrix}$$



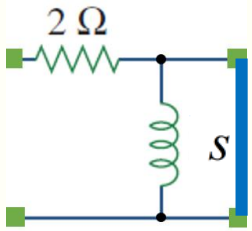
ΔΙΘΥΡΑ

- Για το δεύτερο επί μέρους δίθυρο, βλέπουμε ότι μπορεί να θεωρηθεί σαν αστέρας με το ένα στοιχείο μηδενικό:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2+s & s \\ s & s \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{2s} \begin{pmatrix} s & -s \\ -s & 2+s \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{s+2}{2s} \end{pmatrix}$$

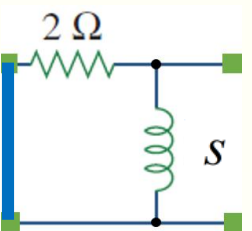


- Ή, μέσω των ορισμών:



$$V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = 2I_1 \Rightarrow y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -I_1 \Rightarrow I_2 = -\frac{V_1}{2} \Rightarrow y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -\frac{1}{2} = y_{12}$$



$$V_1 = 0 \Rightarrow V_2 = (s \parallel 2) I_2 = \frac{2s}{s+2} I_2 \Rightarrow y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{s+2}{2s}$$

ΔΙΘΥΡΑ

- Συνολικά

$$\mathbf{Y}_{ΟΛΙΚΟ} = \mathbf{Y}^{(1)} + \mathbf{Y}^{(2)}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s}{2(s+2)} & -\frac{s}{s+2} \\ -\frac{s}{s+2} & \frac{2s}{s+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{s+2}{2s} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{Y}_{ΟΛΙΚΟ} = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{-(3s+2)}{2(s+2)} \\ \frac{-(3s+2)}{2(s+2)} & \frac{5s^2+4s+4}{2s(s+2)} \end{pmatrix}$$

