

Ο Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $x(t)$ συμβολίζεται με $\mathbf{L}\{x(t)\}$ και ορίζεται σαν:

$$X(s) = \mathbf{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

και είναι συνάρτηση της μεταβλητής $s = \sigma + j\omega$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι $\mathbf{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t), \quad t \geq 0 \quad \text{ή} \quad x(t)u(t)$

Βασικός πίνακας ζευγών μετασχηματισμών Laplace:

$X(s)$	$x(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$ (δηλ. 1 για $t > 0$)
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$ (για $n = 1, 2, 3, \dots$)
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin(\omega t)$
$\frac{\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)]$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

1. Γραμμικότητα: $\mathbf{L}\{ax(t) + by(t)\} = aX(s) + bY(s)$

2. Παραγωγήση:

$$\mathbf{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$$

$$\mathbf{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - \frac{dx}{dt}(0)$$

$$\mathbf{L}\left\{\frac{d^nx}{dt^n}\right\} = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\frac{dx}{dt}(0) - s^{n-3}\frac{d^2x}{dt^2}(0) - \dots - s\frac{d^{(n-2)}x}{dt^{(n-2)}}(0) - \frac{d^{(n-1)}x}{dt^{(n-1)}}(0)$$

3. Μετατόπιση: $\mathbf{L}\{e^{-at}x(t)\} = X(s+a)$ ή εναλλακτικά $\mathbf{L}^{-1}\{X(s+a)\} = e^{-at}\mathbf{L}^{-1}\{X(s)\}$

4. Θεώρημα τελικής τιμής:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

5. Θεώρημα αρχικής τιμής:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

6. Μετασχηματισμός περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ με περίοδο T :

$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} X_1(s), \quad X_1(s) = \int_0^T x(t)e^{-st} dt = \mathbf{L}\{\text{πρώτη περίοδος της } x(t)\}$$

7. Θεώρημα συνέλιξης:

$$\int_0^t x(t-u)y(u)du = \int_0^t x(u)y(t-u)du = X(s)Y(s)$$