

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ: ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ*

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

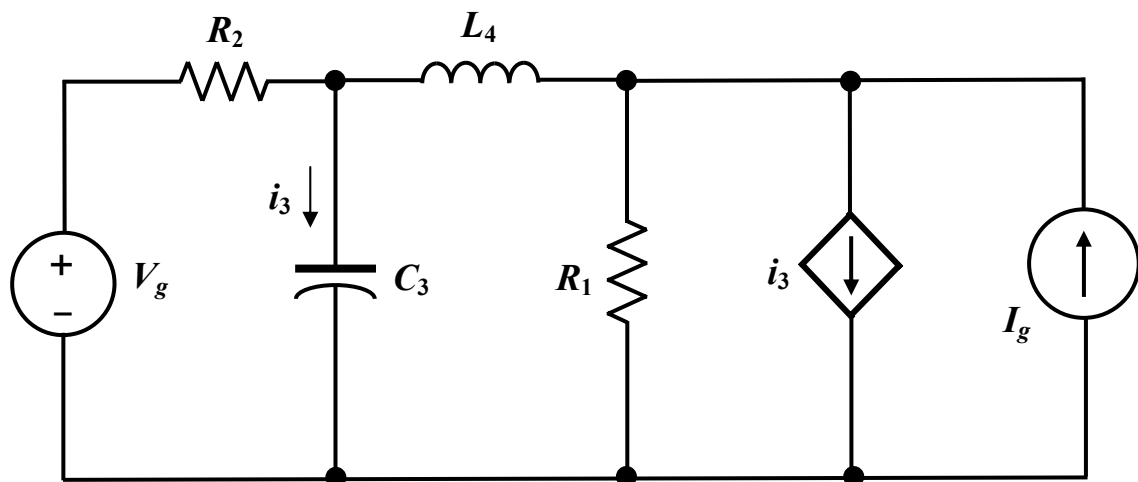
- ΒΗΜΑ 1. Αναγράφουμε όλες τις τάσεις και τα ρεύματα κλάδων.
- ΒΗΜΑ 2. Επιλέγουμε ένα γνήσιο δένδρο (proper tree) T και δηλώνουμε ως μεταβλητές κατάστασης τις τάσεις των πυκνωτών που περιέχει το T και τα ρεύματα των επαγωγών που περιέχει το συμπληρωματικό δένδρο (cotree) $\bar{T}$ του T .
- ΒΗΜΑ 3. Σε κάθε κλάδο του T προσάπτουμε μια τάση και σε κάθε στοιχείο του $\bar{T}$ προσάπτουμε ένα ρεύμα.
- ΒΗΜΑ 4. Χρησιμοποιώντας τον νόμο ρευμάτων του Kirchhoff (KCL) εκφράζουμε τα ρεύματα του δένδρου T σαν άθροισμα ρευμάτων που ανήκουν στο συμπληρωματικό δένδρο $\bar{T}$.
- ΒΗΜΑ 5. Χρησιμοποιώντας τον νόμο τάσεων του Kirchhoff (KVL) εκφράζουμε τις τάσεις του συμπληρωματικού δένδρου $\bar{T}$ σαν άθροισμα τάσεων που ανήκουν στο δένδρο T .
- ΒΗΜΑ 6. Γράφουμε τις εξισώσεις στοιχείου (δηλ. αυτές που συνδέουν ρεύμα και τάση) για:
- (α) τους πυκνωτές του δένδρου T και τους επαγωγούς του συμπληρωματικού δένδρου $\bar{T}$
 - (β) όλα τα υπόλοιπα στοιχεία
- ΒΗΜΑ 7. Απαλείφουμε από τις πιο πάνω εξισώσεις όλες τις μεταβλητές που δεν είναι μεταβλητές κατάστασης ή ανεξάρτητες πηγές.
- ΒΗΜΑ 8. Ταξινομούμε τις εξισώσεις που προκύπτουν για να τις φέρουμε στην κανονική μορφή $\dot{x} = Ax + Bu$.

Υπενθυμίζουμε ότι:

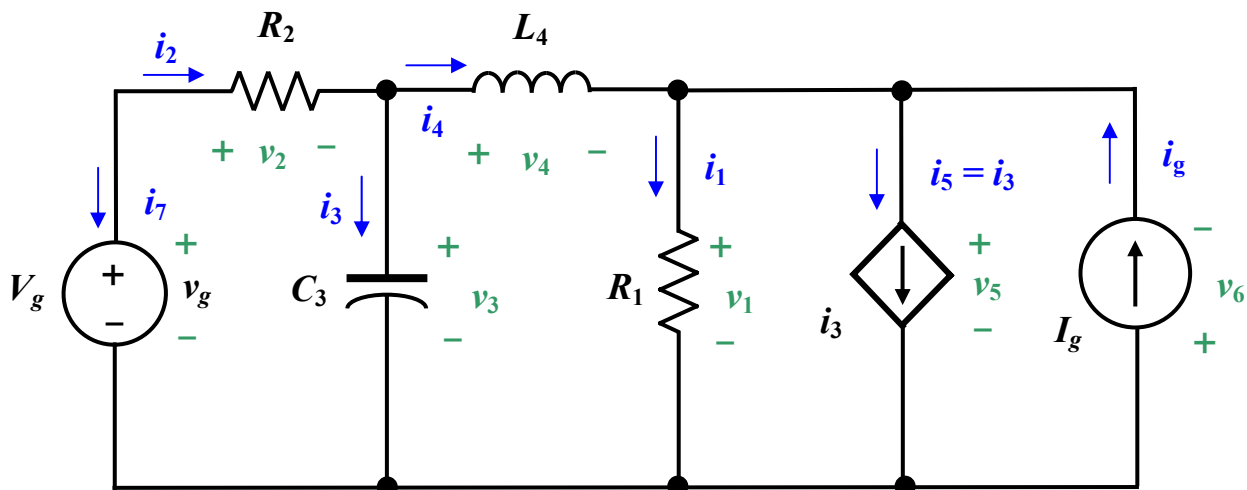
- ❖ **Δένδρο** (tree) είναι ένα συνδεδεμένο υποκύκλωμα (υπογράφος) που συμπεριλαμβάνει όλους τους κόμβους αλλά κανένα βρόχο.
- ❖ **Συμπληρωματικό δένδρο** (cotree) $\bar{T}$ ενός δένδρου T από ένα γράφο G είναι αυτό που απομένει από τον γράφο όταν αφαιρέσουμε από αυτόν το δένδρο T : $\bar{T} = G - T$.
- ❖ **Γνήσιο δένδρο** (proper tree) είναι ένα δένδρο του κυκλώματος που περιέχει:
 - 1) όλες τις ανεξάρτητες πηγές τάσης του κυκλώματος
 - 2) τον μέγιστο δυνατό αριθμό πυκνωτών
 - 3) τον ελάχιστο δυνατό αριθμό επαγωγών
 - 4) καμία ανεξάρτητη πηγή ρεύματος

* Με βάση το: W.-K. Chen, "State Variables: Concept and Formulation", Chapter 7 in: R.C. Dorf, "Electrical Engineering Handbook", CRC Press, 2000.

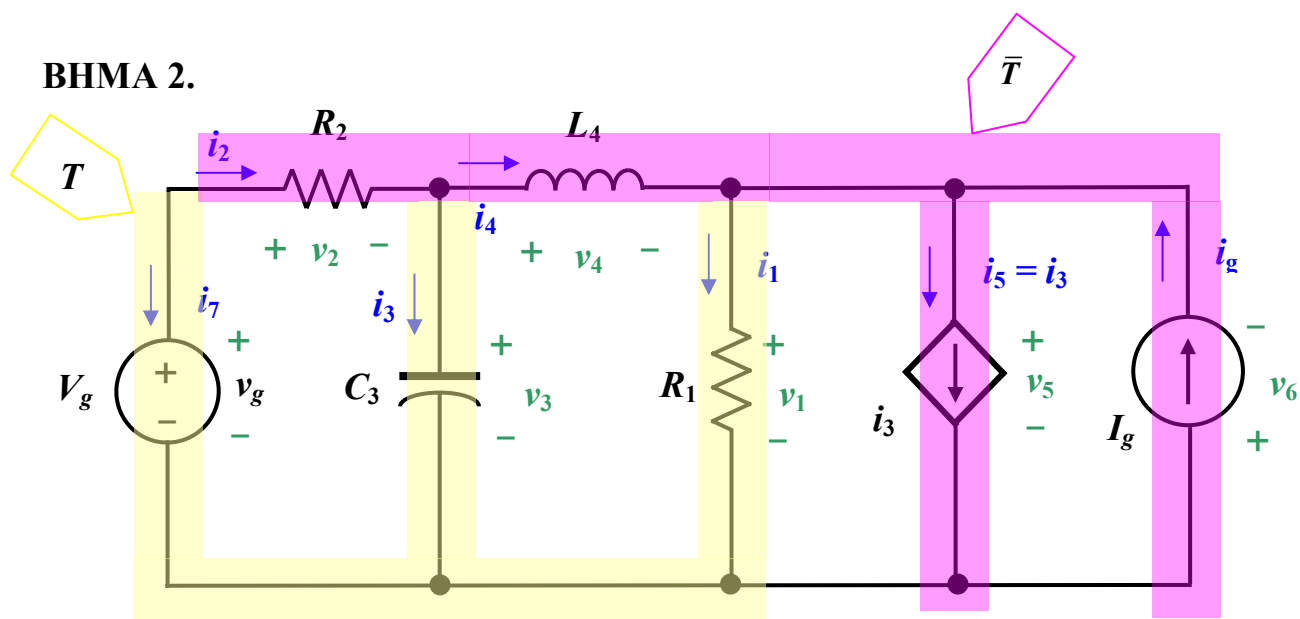
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



ΒΗΜΑ 1.



ΒΗΜΑ 2.



$\Rightarrow$ Μεταβλητές κατάστασης: $\{v_3, i_4\}$

ΒΗΜΑ 3.

Αντιστοιχίζουμε:

$$\begin{array}{llll}
 & R_1 \leftrightarrow v_1 & & R_2 \leftrightarrow i_2 \\
 & C_3 \leftrightarrow v_3 & \text{και} & L_4 \leftrightarrow i_4 \\
 \text{Δένδρο } T: & V_g \leftrightarrow v_g & \text{Συμπληρ. Δένδρο } \bar{T}: & i_5 \leftrightarrow i_3 \\
 & & & I_g \leftrightarrow i_g
 \end{array}$$

ΒΗΜΑ 4.

$$i_1 = i_4 + i_g - i_3 \quad (1.1)$$

$$i_3 = i_2 - i_4 \quad (1.2)$$

$$i_7 = -i_2 \quad (1.3)$$

ΒΗΜΑ 5.

$$v_2 = v_g - v_3 \quad (1.4)$$

$$v_4 = v_3 - v_1 \quad (1.5)$$

$$v_5 = v_1 \quad (1.6)$$

$$v_6 = -v_1 \quad (1.7)$$

ΒΗΜΑ 6.

Σχέσεις τάσης-ρεύματος για τα στοιχεία που δίνουν τις μεταβλητές κατάστασης:

$$C_3 \dot{v}_3 = i_3 = i_2 - i_4 \quad (1.8)$$

$$L_4 \dot{i}_4 = v_4 = v_3 - v_1 \quad (1.9)$$

Σχέσεις τάσης-ρεύματος για όλα τα υπόλοιπα στοιχεία

$$v_1 = R_1 i_1 = R_1 (i_4 + i_g - i_3) \quad (1.10)$$

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v_g - v_3}{R_2} \quad (1.11)$$

(Σημ.: το δεύτερο = στις πιο πάνω σχέσεις είχε σκοπό να εισαγάγει στην έκφραση τα μεγέθη που αφορούν τις Μ.Κ.)

ΒΗΜΑ 7.

Τα στοιχεία που δίνουν τις μεταβλητές κατάστασης είναι ο πυκνωτής C_3 που δίνει την τάση v_3 και ο επαγωγός L_4 που δίνει το ρεύμα i_4 ενώ η διέγερση δίνεται από τις ανεξάρτητες πηγές V_g και I_g . Άρα, από τις εξισώσεις του Βήματος 6 πρέπει να απαλείψουμε τις ποσότητες v_1 και i_2 στις εξισώσεις (1.8) και (1.9). Από τις εξισώσεις (1.2), (1.10) και (1.11) μπορούμε να εκφράσουμε τα v_1 και i_2 σαν συναρτήσεις των μεταβλητών κατάστασης. Μετά από απλούς αλγεβρικούς μετασχηματισμούς παίρνουμε

$$v_1 = R_1 \left(2i_4 + i_g + \frac{v_3}{R_2} - \frac{v_g}{R_2} \right) \quad (1.12)$$

$$i_2 = \frac{v_3 - v_g}{R_2} \quad (1.13)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (1.8) και (1.9):

$$C_3 \dot{v}_3 = \frac{v_g - v_3}{R_2} - i_4 \quad (1.14)$$

$$L_4 \dot{i}_4 = \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) v_3 - 2R_1 i_4 - R_1 i_g + \frac{R_1 v_g}{R_2} \quad (1.15)$$

ΒΗΜΑ 8.

Οι τελευταίες δυο εξισώσεις πρέπει τώρα να γραφτούν σε πιο «τακτική» μορφή, πράγμα που γίνεται κατορθωτό με τη βοήθεια της γραμμικής άλγεβρας:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_3 \\ \dot{i}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{L_4} - \frac{R_1}{R_2 L_4} & -\frac{2R_1}{L_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 \\ i_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2 C_3} & 0 \\ \frac{R_1}{R_2 L_4} & -\frac{R_1}{L_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_g \\ i_g \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Αν τώρα επιλέξουμε ως μεταβλητές εξόδου την τάση v_1 του αντιστάτη R_1 και το ρεύμα i_3 του πυκνωτή C_3 . Τότε, από τις εξισώσεις (1.2), (1.12) και (1.13) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{R_1}{R_2} v_3 + 2R_1 i_4 + R_1 \left(i_g - \frac{v_g}{R_2} \right) \\ i_3 &= -\frac{v_3}{R_2} - i_4 + \frac{v_g}{R_2} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Πάλι, θα πρέπει να φέρουμε τις τελευταίες εξισώσεις σε διανυσματική μορφή κι έτσι η (διανυσματική) εξίσωση εξόδου παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R_1}{R_2} & 2R_1 \\ -\frac{1}{R_2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 \\ i_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{R_2} & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_g \\ i_g \end{pmatrix}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Εναλλακτικό γνήσιο δένδρο T_1 αντί για αυτό που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω:

