ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

Αντί του «απλού» ZOH χρησιμοποιείται **First Order Hold (FOH)**

$$f_k(t) = f(kh) + f^{(1)}(kh)(t - kh) \quad kh < t < (k+1)h$$

Όπου η πρώτη παράγωγος της $f(1)\big|_{t=kh}$ προσεγγίζεται ως

$$f^{(1)}(kh) \cong \frac{f(kh) - f((k-1)h)}{h}$$

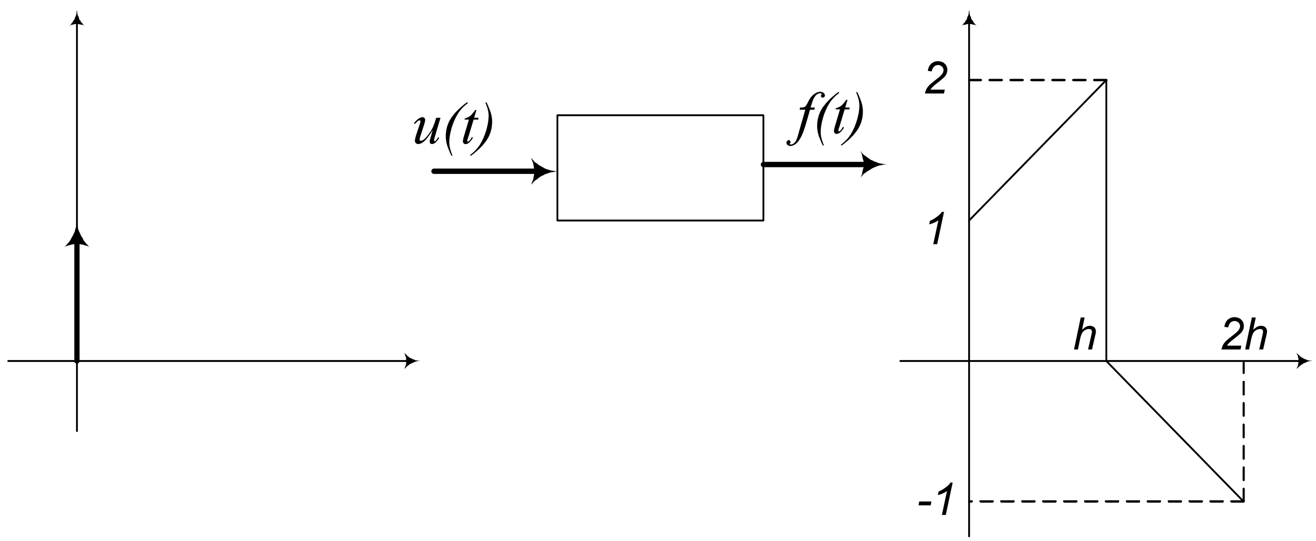
Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται θέτοντας

$$f(0) = 1, \quad f(h) = f(2h) = \ldots = 0$$

$$f_0(t) = f(0) + \frac{f(0) - f(-h)}{h} t, \quad 0 \le t < h$$

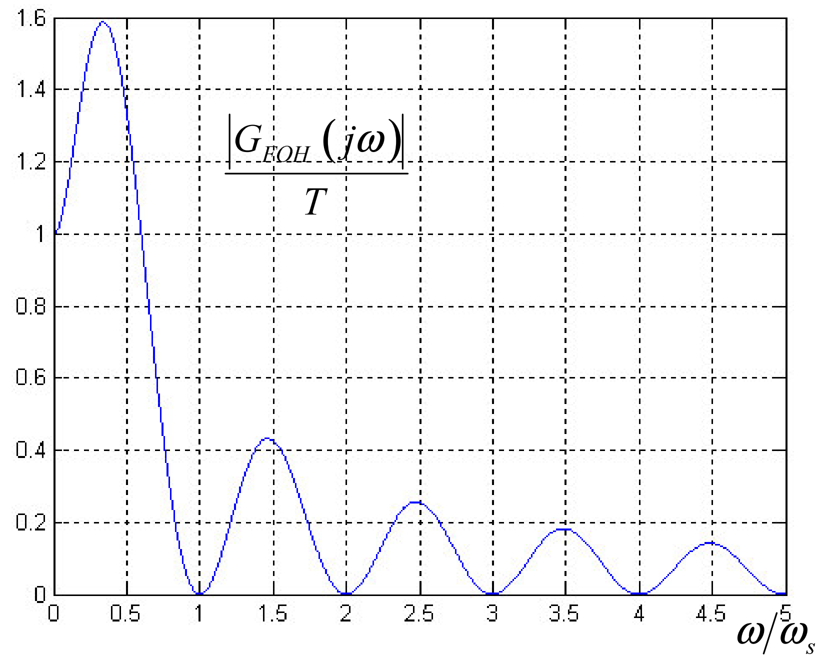
$$f_1(t) = f(h) + \frac{f(h) - f(0)}{h}(t-h) = -\frac{1}{h}(t-h) = 1 - \frac{t}{h}, \quad h \le t < 2h$$

$$f_2(t) = f_3(t) = \ldots = 0$$

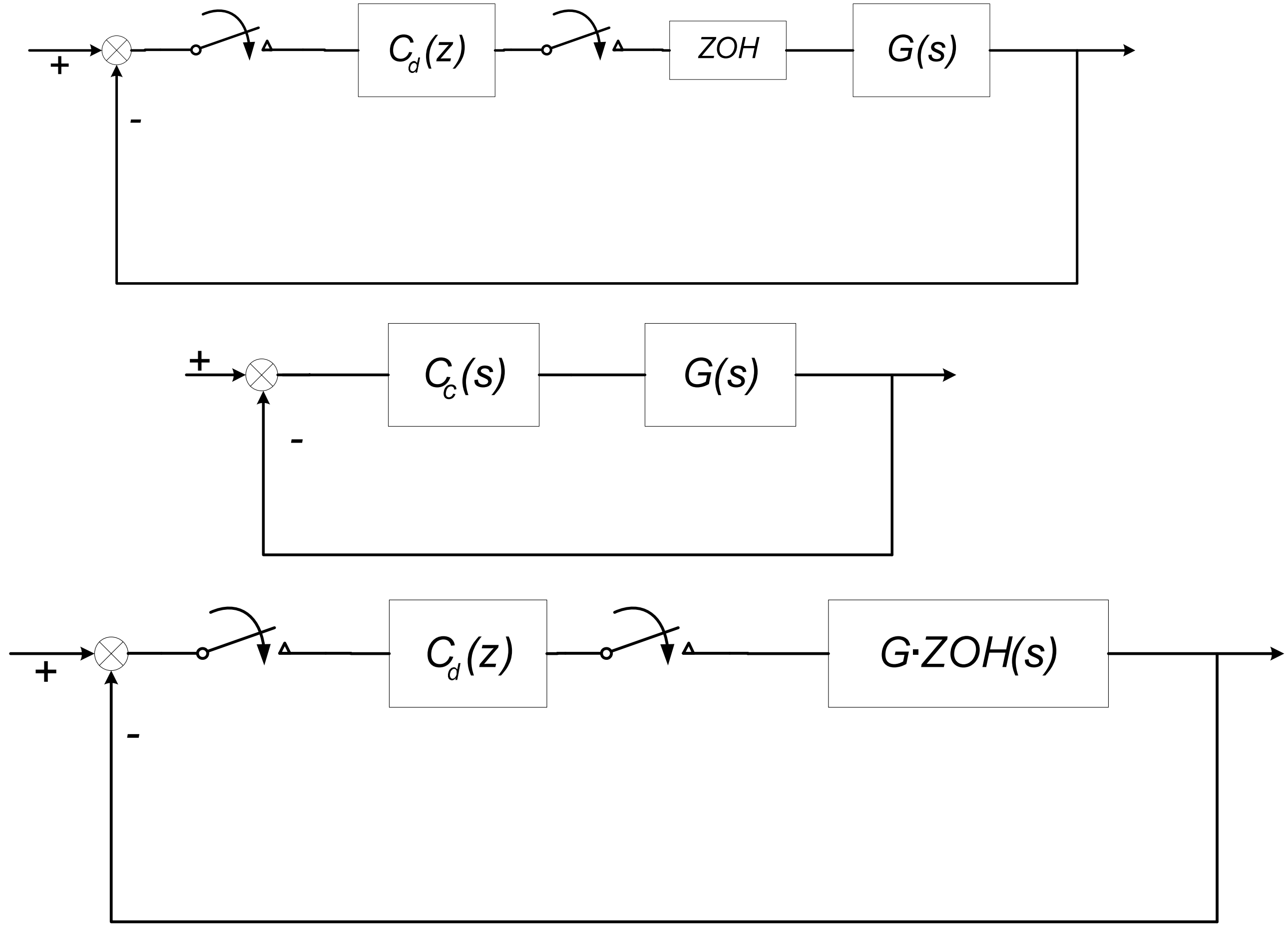


$$G_{FOH}(s)=L\left[\mathbf{1}(t)+\frac{t}{h}\mathbf{1}(t)-2\mathbf{1}(t-h)-2\frac{(t-h)}{h}\mathbf{1}(t-h)+\frac{(t-2h)}{h}\mathbf{1}(t-2h)+\mathbf{1}(t-2h)\right]=\frac{1+hs}{h}\left(\frac{1-e^{sh}}{s}\right)^2$$

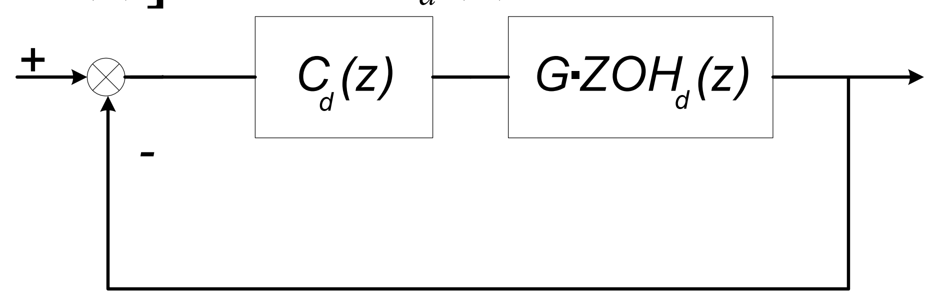
$$\left|G_{FOH}(j\omega)\right|=\frac{2\pi}{\omega_s}\sqrt{1+\frac{4\pi^2\omega^2}{\omega_s^2}}\left[\frac{\sin\frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}}\right]^2$$

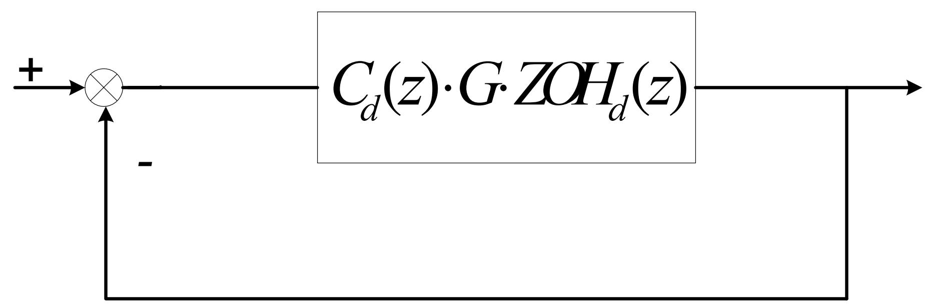


Ευστάθεια διακριτού συστήματος



$$Z\left[G(s)ZOH(s)\right] = G\cdot ZOH_d(z)$$





Ισοδύναμο κλειστό διακριτό σύστημα

$$\frac{C_d(z)\cdot G\cdot ZOH_d(z)}{1+C_d(z)\cdot G\cdot ZOH_d(z)}$$

Για να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές πρέπει

$$\left| \text{ριζες}\left[C_d(z)\cdot G\cdot ZOH_d(z)=0\right]\right| < 1$$

$$ZOH(s)=\frac{1-e^{-sT_s}}{s}$$

$$G\cdot ZOH_d(z)=Z\left(\frac{1-e^{-sT_s}}{s}G(s)\right)=Z\left((1-e^{-Ts})\frac{G(s)}{s}\right)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

Για τον υπολογισμό του $Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι προηγούμενες μέθοδοι διακριτοποίησης

Κριτήριο Jury

Έστω πολυώνυμο:

$$F(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z^1 + a_0, \quad a_n \in \mathbb{R}^+$$

Για έλεγχο του μέτρου των ριζών $\left|\text{ριζες}\left(\text{f(t)=0}\right)\right| < 1$ δημιουργούμε τον πίνακα.....

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

	Z^0	Z^1	Z^2	…	Z^{n-k}	…	Z^{n-1}	Z^n
1	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-k}		a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_k		a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	…	b_{n-k}		b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…	b_k		b_0	
5	c_0	c_1	c_2	…		c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	…		c_0		
. . .								
2n-5	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3				
2n-4	ρ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_0				
2n-3	q_0	q_1	q_2	q_3				

Όπου

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \qquad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_3 \\ \rho_3 & \rho_0 \end{vmatrix}$$

$$q_2 = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_3 & \rho_2 \end{vmatrix}$$

Το διακριτό σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $F(z)$ είναι ευσταθές αν ικανοποιούνται όλες οι ακόλουθες συνθήκες

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

- $F(1) > 0$
- $F(-1)\begin{cases} > 0, & n=\text{άρτιο} \\ < 0, & n=\text{περιττό} \end{cases}$

- $|a_0| < a_n$
- $|b_0| > |b_{n-1}|$
- $|c_0| > |c_{n-2}|$
- $|d_0| > |d_{n-3}|$

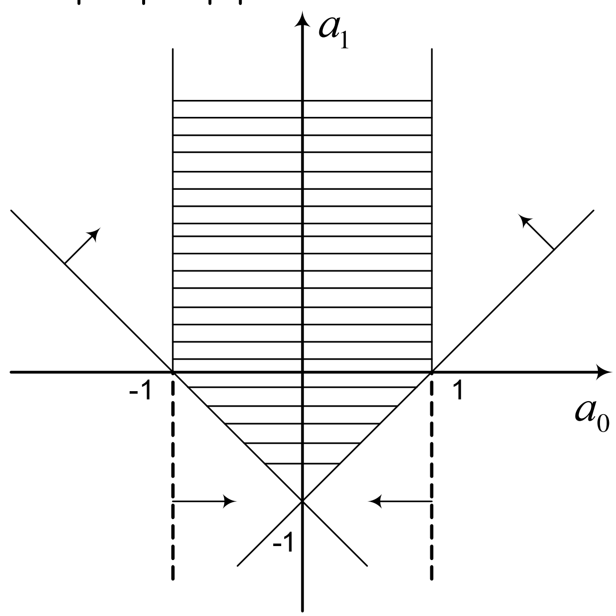
$\ldots$

- $|q_0| > |q_2|$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

$$F(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad F(1) > 0 \\ \bullet \quad F(-1) > 0 \\ \bullet \quad |a_0| < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ \quad |a_0| < |1| \end{cases}$$



ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Μια ολόκληρη γραμμή του κριτηρίου Jury έχει μηδενικά

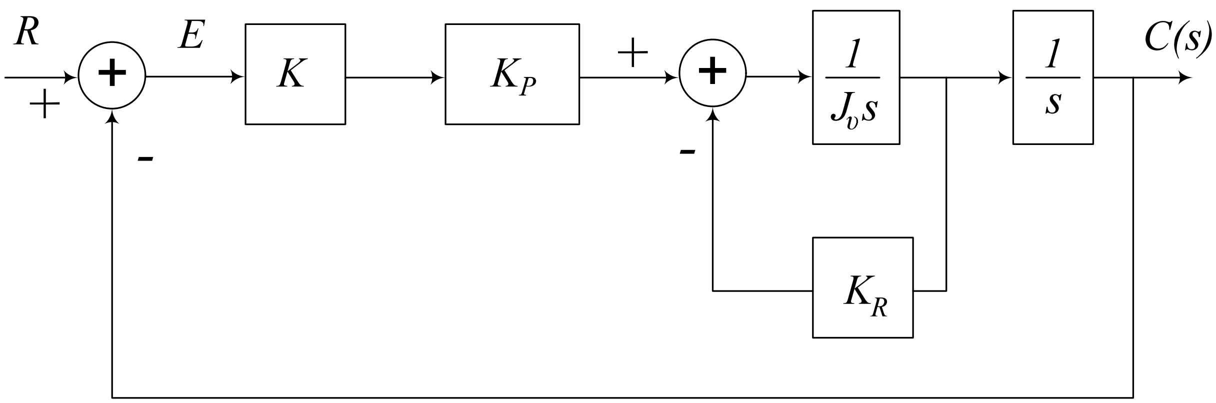
Φυσικό νόημα: υπάρχουν ρίζες του πολυωνύμου ακριβώς στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου.

Μετατροπή: $F(z)$ γίνεται $F[(1+\varepsilon)z]$ με $\varepsilon \simeq 0 \in \mathbb{R}^{+}$

$$\left[z^n \to (1+\varepsilon)^n \cdot z^n \simeq (1+n\varepsilon) \cdot z^n \right]$$

Δηλαδή στην ουσία αυξάνεται ανεπαίσθητα η ακτίνα του μοναδιαίου κύκλου και υπολογίζεται η επίδραση της στην ευστάθεια του συστήματος.

Σύστημα ελέγχου DC-κινητήρα



$K_P = 1,65 \times 10^6$

$K_R = 3,7 \times 10^5$

$K = \text{ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ}$

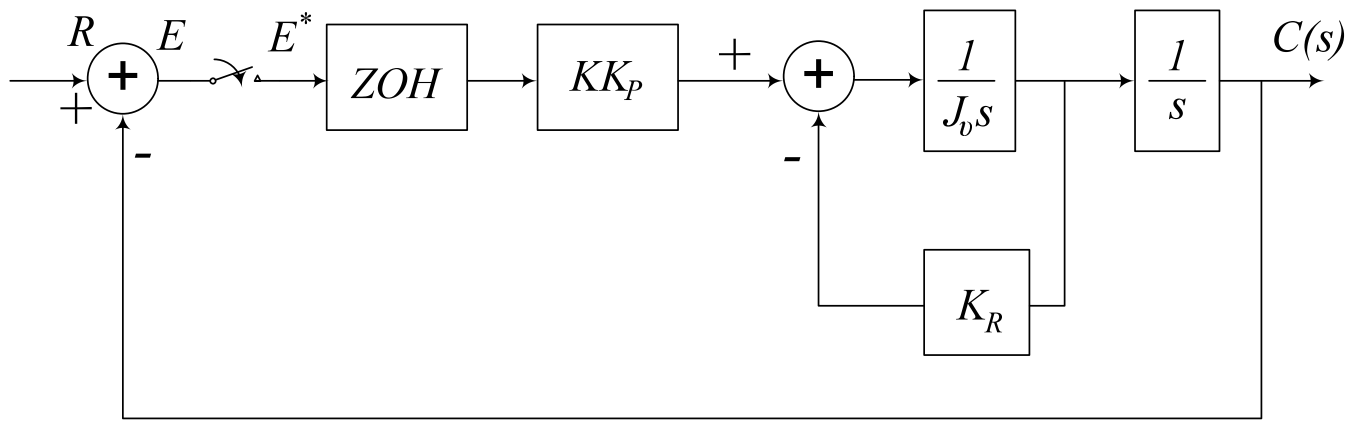
$J_\upsilon = 41822$

Open-Loop $\quad G(s) = \dfrac{C(s)}{E(s)} = \dfrac{K \cdot K_P}{s(J_\upsilon s + K_R)}$

Closed-Loop $\quad \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)} = \dfrac{39.453K}{s^2 + 8.8715s + 39.453K}$

Σύστημα ευσταθές $\quad \forall K > 0, \quad \omega_n = \sqrt{39.453K}$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ



$$G(s)=\frac{C(s)}{E^{*}(s)}=ZOH(s)G(s)=\frac{1-e^{-T_s}}{s}\frac{KK_P/J_\upsilon}{s\left(s+\dfrac{K_R}{J_\upsilon}\right)}$$

$$G(z)=\left(1-z^{-1}\right)\frac{KK_P}{K_R}Z\left(\frac{1}{s^2}-\frac{J_\upsilon}{K_R s}+\frac{J_\upsilon}{K_R\left(\left(s+\dfrac{K_R}{J_\upsilon}\right)\right)}\right)$$

$$G(z)=\frac{KK_P}{K_R^2}\left[\frac{\left(TK_R-J_\upsilon+J_\upsilon e^{-\frac{K_RT}{J_\upsilon}}\right)z-\left(TK_R+J_\upsilon e^{-\frac{K_RT}{J_\upsilon}}\right)+J_\upsilon}{(z-1)\left(z-e^{-\frac{K_RT}{J_\upsilon}}\right)}\right]$$

Closed-loop $\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{N(z)}{z^2+a_1z+a_0}$

α_1=0,000012K(3,75*10^{5}T-41822+41822e$^{-8,871T}$)-1- e$^{-8,871T}$

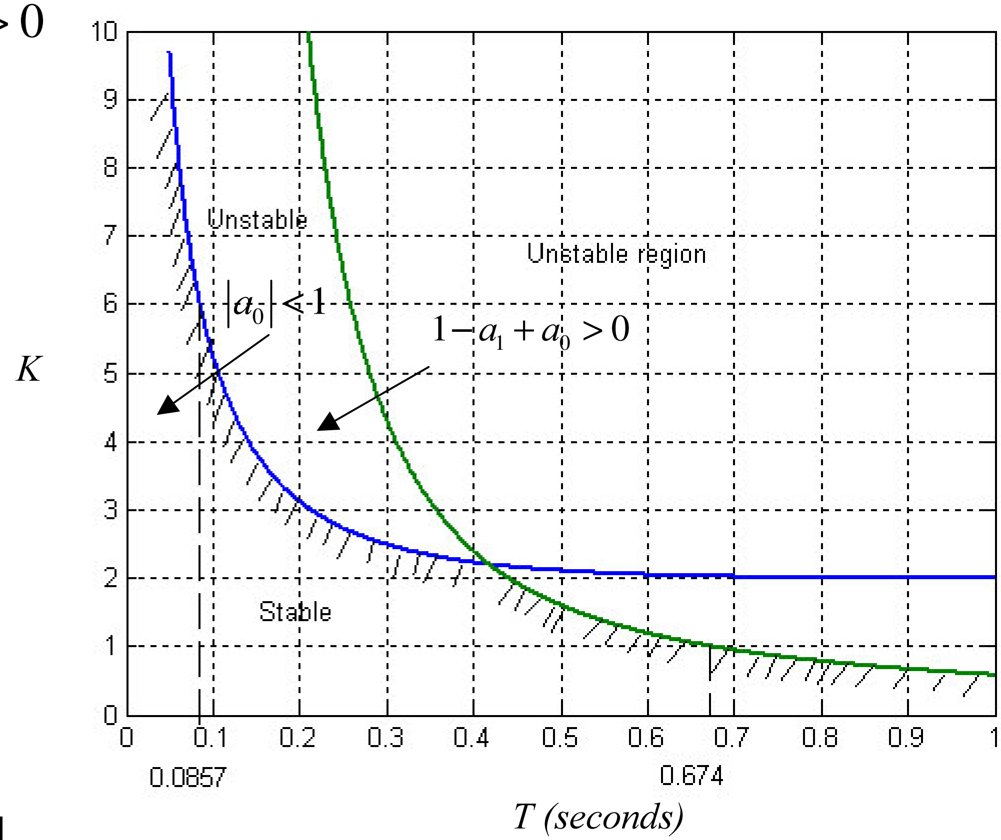
α_0= e$^{-8,871T}$ +0,000012K[41822-(3,75*10^{5}T+41822)e$^{-8,871T]}$

$$F(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

$$F(1) = 1 + a_1 + a_0 \Rightarrow 1 - e^{-8,871T} > 0$$

$$F(-1) = 1 - a_1 + a_0 > 0$$

$$|a_0| < 1$$



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II