ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ (a)

1. Βρείτε τα δεκαδικά ισοδύναμα των παρακάτω σταθερών δυαδικών αριθμών. Το πρώτο ψηφίο είναι το πρόσημο ενώ η θέση της υποδιαστολή ορίζεται από το σημείο «.»
   A. 11011011
   B. 0101.1111
   C. 001101011.011
   (a) Δυαδικός 11011011=-(64+16+8+2+1)=-91
   (b) Δυαδικός 0101.1111=4+1+1/2+1/4+1/8+1/16=5.9375
   (c) Δυαδικός 001101011.011=64+32+8+2+1+1/4+1/8=107.375

2. Βρείτε τα δεκαδικά ισοδύναμα των παρακάτω κινητής υποδιαστολής δυαδικών αριθμών.
   A. MMMMMMMEEEE = 010111010011
   B. MMMMMEEE = 01101111
   (a) Δυαδικός +.1011101+011=(1/2+1/8+1/46+1/32+1/128)*2^3=0.7265625*2^3=5.8125
   (b) Δυαδικός +.1101-11=(1/2+1/4+1/16)*2^{-3}=0.1015625

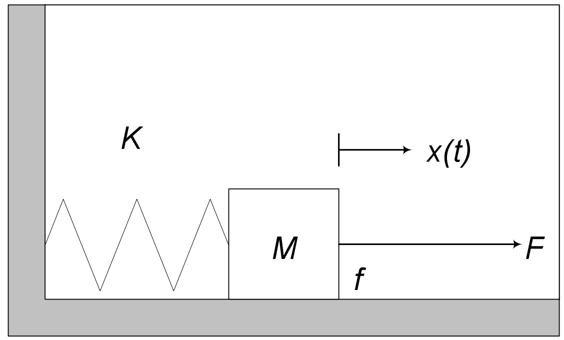
3. Βρείτε το μέγιστο χρόνο μετατροπής που απαιτείται για την ψηφιοποίηση 1-kHz ημιτονοειδούς σήματος $u(t) = V\sin\omega t$ σε 10-ψήφια ανάλυση.
   $v(t) = V\sin\omega t, \omega = 2000\pi \qquad \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0} \le 2^{10}\frac{V_{FS}}{T_C} = 2(2^{-10})\frac{V}{T_C}$

   $\omega V \le 2^{-9}\frac{V}{T_C}, \qquad T_C \le 2^{-9}\frac{1}{\omega} = \frac{2^{-9}}{2000\pi} = 10^{-6.509} = 0.31085$ μsec

4. Βρείτε τις τάσεις εξόδου για ένα 8-ψήφιο μετατροπέα D/A με 10 V τάση για τις ψηφιακές λέξεις εισόδου που καταγράφονται παρακάτω. Επίσης συμπληρώστε τους συντελεστές βαρύτητας κάθε ψηφίου με τους όρους κλάσματος σε πλήρη κλίμακα.

Δυαδική λέξη	**Κλάσμα του FS**	**Τάση εξόδου για FS=10v**
00000001	1/256	0.039
00000010	1/128	0.078
00000100	1/64	0.0156
00001000	1/32	0.612
00010000	1/16	0.625
00100000	1/8	1.250
01000000	1/4	2.500
10000000	1/2	5000
11111111	255/256	9.961

5. Ένα σύστημα μοντελοποιείται από ένα συνδυασμό μάζας-ελατηρίου-τριβής, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη που ενεργεί στη μάζα είναι παλμικής μορφής με μέγεθος F στο χρονικό διάστημα $t = kT, k = 0,1,2,...$. Θεωρήστε ότι για *t=0, M* είναι στη θέση ισορροπίας *x(0)=0*. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος και λύστε τη μετατόπιση $x(t)$ της *M* για *t>0*, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, για $K = M(u^2 + \omega_s^2)$, K=γραμμική σταθερά ελαστικότητας, u=σταθερά, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ και συντελεστής τριβής ολίσθησης=Mu,



Εξίσωση δύναμης: $F(t) = F_{(k)}(x) + F_f + M\dfrac{dx^2(t)}{dt^2}$

Όπου $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F\delta(t - nT)$, $F_k(x) = M(u^2 + \omega_s^2)x$, $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$

Συντελεστής τριβής ολίσθησης=*2Mu*. Έτσι

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\delta(t - nT) - M(u^2 + \omega_s^2)x - 2Mu\frac{dx}{dt} = M\frac{dx^2}{dt^2} \;\; \text{ή}$$

$$M\frac{dx^2}{dt^2} + 2Mu\frac{dx}{dt} + M(u^2 + \omega_s^2)x = \sum_{n=0}^{\infty} F\delta(t - nT)$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace και στις δυο πλευρές της τελευταίας εξίσωσης, έχουμε:

$$X(s) = \frac{F}{M(1 - e^{-Ts})}\frac{1}{s^2 + 2us + u^2 + \omega_s^2}.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $X(s)$ είναι: $x(t) = \dfrac{F}{M\omega_s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-u(t-nT)}\sin\omega_s(t - nT)$

6. Τα ακόλουθα σήματα είναι δείγματα ενός ιδανικού δειγματολήπτη με περίοδο δειγματοληψίας T. Να καθορίσετε την έξοδο δειγματοληψίας $f^*(t)$ και να αξιολογήσετε την παλμική συνάρτηση $F^*(s)$ με τις μεθόδους σχηματισμού Laplace και συνέλιξης.

(α) $f(t) = 3te^{-at}$ όπου α είναι πραγματική σταθερά
Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 3kTe^{-akT}\delta(t-kT) \quad F^*(s) = 3\sum_{k=0}^{\infty} kTe^{-(s+a)kT} = \frac{3Te^{-(s+a)T}}{(1-e^{-(s+a)T})^2}$$

Μέθοδος Συνέλιξης:

$$F^*(s) = F(s) * \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{3}{(s+a)^2} * \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

$$F^*(s) = \sum \Upsilon\pi o\lambda o\iota\pi\alpha F(\xi)\frac{1}{1-e^{-T(s-\xi)}}\pi o\lambda o\iota F(\xi)$$

Για πολλαπλής τάξης πόλους της $F(\xi)$ με πολλαπλότητα *m:*

$$F^*(s) = \left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\left(\frac{3}{1-e^{-T(s-\xi)}}\right)\right\}_{\xi=-a}$$

Για *m=2:* $F^*(s) = \dfrac{3Te^{-(s+a)T}}{(1-e^{-(s+a)T})^2}$

(b) $f(t) = \sin 2t$
Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace:

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin 2kT\cdot e^{-kTs}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(s-j2)kT}-e^{-(s+j2)kT}}{2j}$$

$$F^*(s)=\frac{1}{2j}[\frac{1}{1-e^{-(s-j2)T}}-\frac{1}{1-e^{-(s+j2)T}}]$$

Μέθοδος Συνέλιξης:

$$F^*(s)=F(s)*\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{2}{s^2+4}*\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

$$F^*(s)=\frac{1}{2j}[\frac{1}{1-e^{-(s-j2)T}}-\frac{1}{1-e^{-(s+j2)T}}]$$

(c) $f(t)=t\sin\omega t$

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace:

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}kT\sin\omega kT\cdot e^{-kTs}=\sum_{k=0}^{\infty}kT\{\frac{e^{-(s-j\omega)kT}-e^{-(s+j\omega)kT}}{2j}\}$$

$$=\frac{Te^{-(s-j\omega)T}}{2j(1-e^{-(s-j\omega)T})^2}-\frac{Te^{-(s+j\omega)T}}{2j(1-e^{-(s+j\omega)T})^2}$$

$$F^*(s)=F(s)*\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{1}{2j}(\frac{1}{(s-j\omega)^2}-\frac{1}{(s+j\omega)^2})\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

$$F^*(s)=\sum \Upsilon\pi o\lambda o\iota\pi\alpha\frac{F(\xi)}{1-e^{-T(s-\xi)}}\pi o\lambda o\iota F(\xi)$$

$$=\frac{Te^{-(s-j\omega)T}}{2j(1-e^{-(s-j\omega)T})^2}-\frac{Te^{-(s+j\omega)T}}{2j(1-e^{-(s+j\omega)T})^2}$$

(d) $f(t)=e^{-at}\sin 2t$

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-akT}\sin 2kT\cdot e^{-kTs}=\frac{1}{2j}\sum_{k=0}^{\infty}[e^{-(s+a-j2)kT}-e^{-(s+a+j2)kT}]$$
$$F^*(s)=\frac{1}{2j}[\frac{1}{1-e^{-(s+a-j2)T}}-\frac{1}{1-e^{-(s+a+j2)kT}}]$$

Μέθοδος Συνέλιξης:

$F^*(s)=F(s)*\frac{1}{1-e^{-Ts}}=(\frac{1}{(s+a+j2)(s+a-j2)})*\frac{1}{1-e^{-Ts}}$, όπου $s=-a-2j$ και $s=-a+2j$

$$F^*(s)=\frac{1}{2j}[\frac{1}{1-e^{-(s+a-j2)T}}-\frac{1}{1-e^{-(s+a+j2)kT}}]$$

(e) $f(t)=e^{-2(t-T)}u_s(t-T)$, όπου $u_s(t)$ είναι μοναδιαία βηματική συνάρτηση

$$f^*(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2(k-1)T}\delta(t-kT)$$
$$F(s)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2(k-1)T}e^{-kTs}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{2T}e^{-(s+2)kT}-e^{2T}=e^{2T}[\frac{1}{1-e^{-(s+2)T}}-1]=\frac{e^{-Ts}}{1-e^{-(s+2)T}}$$

Μέθοδος Συνέλιξης:

$$F^*(s)=F(s)*\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{e^{Ts}}{(s+2)}*\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{e^{-Ts}}{1-e^{-T(s+2)}}$$

7. Αποδείξτε ότι το σήμα της $f(t)$ περιέχει συχνότητες όχι υψηλότερες από ω_c rad/c και χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από τις τιμές $f^{(k)}(nT), f^{(k-1)}(nT), ... f^{(1)}(nT)$ και $f(nT), n=0,1,2,...,$ του μετρούμενου σήματος στις διακριτές χρονικές στιγμές $T=(1/2)(k+1)(2\pi/\omega_c)s$, όπου $f^{(k)}(nT)=\left.\dfrac{d^k f(t)}{dt^k}\right|_{t=nT}$

Η συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να γραφεί ως εξής: $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Εάν η $F(\omega)$ βρίσκεται μεταξύ των ορίων $-\omega_h$ και $+\omega_h$, τότε

$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_h}^{+\omega_h}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$, $f(nT)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_h}^{+\omega_h}F(\omega)e^{j\omega nT}d\omega$

Διαχωρίζουμε το ολοκλήρωμα της $f(nT)$ στα εξής:

$$f(nT)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_h}^{+\omega_h/2}F(\omega')e^{jn\omega' T}d\omega'+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_h/2}^{0}F(\omega)e^{jn\omega T}d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\omega_h/2}F(\omega)e^{jn\omega T}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_h/2}^{+\omega_h}F(\omega')e^{jn\omega' T}d\omega'$$

, όπου στην τελευταία σχέση 2 από τις μεταβλητές ω έχουν αντικατασταθεί με ω'. Θεωρούμε ότι $\omega'=\omega-\omega_h$ και $\omega'=\omega+\omega_h$

8. Βρείτε τους μετασχηματισμούς-z των παρακάτω συναρτήσεων. Πρέπει να τα διαχωρήσετε σε κλάσματα και έπειτα να χρησιμοποιήσετε τον πίνακα z-μετασχηματισμου.

a) $F(s)=\dfrac{5}{s(s^2+4)}$, b) $F(s)=\dfrac{4}{s^2(s+2)}$, c) $F(s)=\dfrac{2}{(s^2+s+2)}$

(α) $F(s)=\dfrac{5}{s(s^2+4)}=\dfrac{1.25}{s}-\dfrac{1.25s}{s^2+4}$,

$$F(z)=\frac{1.25z}{z-1}-\frac{1.25z(z-\cos 2T)}{z^2-2z\cos 2T+1}=\frac{1.25z[z^2-(1+2\cos 2T)z+1+\cos 2T]}{(z-1)(z^2-2z\cos 2T+1)}$$

(b)

$$F(s)=\frac{4}{s^2(s+2)}=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+2}$$

$$F(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{2Tz}{(z-1)^2}+\frac{2Tz}{z-e^{-2T}}=\frac{(2T+e^{-2T}-1)z+(1-2Te^{-2T}-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

(c)

$$F(s)=\frac{2}{s^2+s+2}$$

$$F(z)=\frac{1.511e^{-0.5T}\sin 1.323T}{z^2-2ze^{-0.5T}\cos 1.323T+e^{-T}}$$

9. Δίνεται ότι ο μετασχηματισμός-z της $g(t)$, T=1sec,, είναι: $G(z)=\frac{z(z-0.2)}{4(z-0.8)(z-1)}$

βρείτε τη σειρά $g(kT), k=0,1,2,\dots 40$ χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο MATLAB. Ποιά είναι η τελική τιμή της $g(kT)$, όταν $k\to\infty$?

$$G(z)=\frac{z(z-0.2)}{4(z-0.8)(z-1)}=\frac{z^2-0.2z}{4z^2-7.2z+3.2} \quad , \quad \lim_{k\to\infty} g(kT)=1$$
$$=0.25+0.4z^{-1}+0.5z^{-2}+0.616z^{-3}+0.692z^{-4}+\dots$$

Δειγματα.	**Τιμές**	**Δειγματα**	**Τιμές**	**Δειγματα**	**Τιμές**	**Δειγματα**	**Τιμές**
1	0.250000	11	0.919468	21	0.991349	31	0.999064
2	0.400000	12	0.935574	22	0.993078	32	0.999250
3	0.520000	13	0.948458	23	0.994461	33	0.999398
4	0.616000	14	0.958766	24	0.995568	34	0.999517
5	0.692800	15	0.967012	25	0.996453	35	0.999611
6	0.754240	16	0.973609	26	0.997161	36	0.999687
7	0.803391	17	0.978886	27	0.997727	37	0.999748
8	0.842713	18	0.983108	28	0.998180	38	0.999796
9	0.874170	19	0.986486	29	0.998543	39	0.999835
10	0.899336	20	0.989187	30	0.998833	40	0.999866

10. Δίνεται $f_1(t)=t^2u_s(t)$ και $f_2(t)=e^{-2t}u_s(t)$, βρείτε το μετασχηματισμό z , της $f_1(t)f_2(t)$, με τη βοήθεια του θεωρήματος της παράλληλης διαφοροποίησης του μετασχηματισμού z.

$$\mathbb{Z}[t^2e^{-2t}]=\frac{\partial^2}{\partial a^2}\mathbb{Z}[e^{-at}]\Big|_{a=2}=\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]\Bigg|_{a=2}$$

$$=\frac{T^2ze^{-2T}(z+e^{-2T})}{(z-e^{-2T})^3}$$

11. Δίνεται $f_1(t)=t^2u_s(t)$ και $f_2(t)=e^{-2t}u_s(t)$, βρείτε το μετασχηματισμό z , της $f_1(t)f_2(t)$, με τη βοήθεια του θεωρήματος συνέλιξης του μετασχηματισμού z.

$$\mathbb{Z}[t^2e^{-2t}]=\mathbb{Z}\left[f_1(t)f_2(t)\right]=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{F_1(\xi)F_2(z\xi^{-1})}{\xi}d\xi,\quad F_1(\xi)=\mathbb{Z}\left[t^2\right]=\frac{T^2\xi(\xi+1)}{(\xi-1)^3},\quad F_2(\xi)=\mathbb{Z}\left[e^{-2T}\right]=\frac{\xi}{\xi-e^{-2T}}$$

$$\sigma_1=1,\sigma_2=e^{-2T},\quad \sigma_1=1<|\xi|<\frac{|z|}{\sigma_2}=\frac{|z|}{e^{-2T}}$$

$$F_2(z\xi^{-1})=\frac{z\xi^{-1}}{z\xi^{-1}-e^{-2T}}=\frac{z}{z-\xi e^{-2T}}$$

$$\mathbb{Z}\left[f_1(t)f_2(t)\right]=-\sum \Upsilon\pi o\lambda o\iota\pi o\frac{T^2z(\xi+1)}{(\xi-1)^3(z-\xi e^{-2T})}$$, για πόλους $\xi=ze^{2T}$

$$\mathbb{Z}\left[f_1(t)f_2(t)\right]=\frac{T^2ze^{-2T}(z+e^{-2T})}{(z-e^{-2T})^3}$$

12. Βρείτε το μετασχηματισμό z των παρακάτω σειρών. Γράψτε τα αποτελέσματα σε κλειστή μορφή.

a. $f(k)=0$ για k=0 και περιττοί ακέραιοι

$f(k)=1$ για k= άρτιοι ακέραιοι

b. $f(k)=1$ για k=0 και περιττοί ακέραιοι

$f(k)=-1$ για k= άρτιοι ακέραιοι

c. $f(k)=e^{-k}\sin 2k$

(α) $F(z)=z^{-1}+z^{-3}+z^{-5}+\ldots=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-2}}=\dfrac{z}{z^{2}-1}$

(β) $F(z)=1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}+z^{-4}+z^{-5}+\ldots=\dfrac{1}{1+z^{-2}}=\dfrac{z}{z+1}$

(c) $f(k)=e^{-k}\sin 2k$, $F(z)=\dfrac{ze^{-1}\sin 2}{z^{2}-2z\cos 2e^{-1}+e^{-2}}=\dfrac{0.3345z}{z^{2}+0.3062z+0.1353}$

13. Έστω η ακόλουθη εξίσωση διαφορών: $p(k+1)=(R+1)p(k)-2^k u(0)$. Υπολογίστε το *u(0)* χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό z. Η συνθήκη περιορισμού είναι $p(N)=0$.

$$p(k+1)=(R+1)p(k)-2^k u(0)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k+1)z^{-k} = (R+1)\sum_{k=0}^{\infty} p(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}$$

$$zP(z)-zp(0)=(R+1)P(z)-\frac{u(0)z}{z-2}$$

$$P(z)=\frac{zp(0)}{z-(R+1)}-\frac{u(0)z}{(z-2)\left[z-(R+1)\right]}$$

$$P(z)=\frac{zp(0)}{z-(R+1)}-\frac{u(0)z}{(1-R)(z-2)}+\frac{u(0)z}{(1-R)\left[z-(R+1)\right]}$$

$$=-\frac{u(0)z}{(1-R)(z-2)}+\frac{(1-R)p(0)+u(0)}{(1-R)\left[z-(R+1)\right]}z$$

$$p(N)=\frac{-u(0)}{1-R}2^N+\left[p(0)+\frac{u(0)}{1-R}\right](R+1)^N=0$$

$$\left[\frac{-2^N}{1-R}+\frac{(R+1)^N}{1-R}\right]u(0)=-(R+1)^N p(0)$$

, και $u(0)=\dfrac{(R-1)(R+1)^N p(0)}{(R+1)^N-2^N}$

14. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z της συνάρτησης $F(z)=\dfrac{2z+1}{(z-0.1)^2}$

$$F(z)=\frac{2z+1}{(z-0.1)^2}=\frac{2z}{(z-0.1)^2}+\frac{1}{(z-0.1)^2}$$

$$ke^{-ak}\to\frac{ze^{-a}}{z-e^{-a}}$$

$$ka^k\to\frac{za}{z-a}$$

$$\frac{2z}{(z-0.1)^2}\to 20k(0.1)^k$$

$$f(k)=20k(0.1)^k u_s(k)+10(k-1)(0.1)^{k-1}u_s(k-1)$$

15. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z της συνάρτησης $F(z)=\dfrac{2z}{z^2-1.2z+0.5}$

$$\mathbb{Z}\left[a^k\sin\omega k\right]=\frac{az\sin\omega}{z^2-2az\cos\omega+a^2}$$

$$a=0.707$$

$$2a\cos\omega=1.2\to\cos\omega=1.2/1.414=0.8487$$

$$\omega=31.934\deg=0.5574rad$$

$$\mathbb{Z}\left[(0.707)^k\sin(0.5574k)\right]=\frac{0.374z}{z^2-1.2z+0.5}$$

$$\mathbb{Z}^{-1}\left[\frac{2z}{z^2-1.2z+0.5}\right]=5.348(0.707)^k\sin(0.5574k)u_s(k)$$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(k)=(0.1)^k u_s(k)+0.5k(0.1)^k u_s(k)$. Βρείτε τον μετασχηματισμό z των $f(k), F(z)$

$$f(k)=(0.1)^k u_s(k)+0.5k(0.1)^k u_s(k) \\ =(1+0.5)(0.1)^k u_s(k), \quad F(z)=\frac{z}{z-0.1}-\frac{z}{(z-0.1)^2}$$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(k)=(0.1)^k u_s(k)+0.5k(0.1)^{k-1} u_s(k-1)$. Βρείτε τον μετασχηματισμό z των $f(k), F(z)$

$$f(k)=(0.1)^k u_s(k)+0.5k(0.1)^{k-1}u_s(k-1)=(0.1)^k u_s(k)+0.5(k-1)(0.1)^{k-1}u_s(k-1)+0.5(0.1)^{k-1}u_s(k-1)$$

$$F(z)=\frac{z}{z-0.1}+\frac{0.5z}{(z-0.1)^2}+\frac{0.5}{z-0.1}=\frac{z+0.5}{z-0.1}+\frac{0.5z}{(z-0.1)^2}$$

18. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z $f(kT)$ των ακόλουθων συναρτήσεων.

a. $F(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$

b. $F(z)=\dfrac{10z}{z^2-1}$

c. $F(z)=\dfrac{1}{z(z-0.2)}$

(α) $f(kT)=\sin(k\pi T/2)$

(b) $f(kT)=\begin{cases} 0 & k=0, \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\varsigma \\ 10 & \kappa=\alpha\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$

(c) $f(kT)=(0.2)^{k-2} \quad k\geq 2$

19. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z της συνάρτησης $F(z)=\dfrac{z(z+1)}{(z-1)(z^2-z+1)}$ με βάση τις ακόλουθες μεθόδους.

A. Μέθοδος πραγματικής αναστροφής

B. Ανάλυση σε δυναμικές σειρές

C. Ανάλυση σε κλάσματα/πίνακας μετασχηματισμού z

(b) $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}+3z^{-4}+z^{-5})z^{-6k}$, $f(kT)=2(1-\cos k\pi/3)$

(c) $F(z)=\dfrac{2z}{z-1}-\left[\dfrac{z}{z-e^{j\pi/3}}+\dfrac{z}{z-e^{-j\pi/3}}\right]$

$f(k)=2-(e^{j\pi k/3}+e^{-j\pi k/3})=2(1-\cos k\pi/3)$

20. Λύστε την ακόλουθη εξίσωση διαφορών χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό z

$c(k+2)-0.1c(k+1)-0.2c(k)=r(k+1)+r(k)$, όπου $r(k)=u_s(k), k=0,1,2,\ldots;\ c(0)=0, c(1)=0$

$$z^2-0.1z-0.2)C(z)=zR(z)-zr(0)+R(z)=(z+1)R(z)-z$$

$$C(z)=\frac{(z+1)R(z)-z}{(z-0.5)(z+0.4)}$$

$$=\frac{z(z+1)}{(z-1)(z-0.5)(z+0.4)}-\frac{z}{(z-0.5)(z+0.4)}=\frac{2z}{(z-1)(z-0.5)(z+0.4)}$$

$$C(z)=\frac{2.86z}{z-1}-\frac{4.44z}{z-0.5}+\frac{1.587}{z+0.4},\quad c(k)=\left[2.86-4.44(0.5)^k+1.587(-0.4)^k\right]u_s(k)$$

21. Η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού διακριτού συστήματος είναι $g(kT)=\begin{cases}5e^{-(k-1)T} & k\geq 1\\ 0 & k=0\end{cases}$. Ας θεωρήσουμε την είσοδο του συστήματος να είναι $r(kT)=kT, k\geq 0$. Η περίοδος δειγματοληψίας είναι T=0.5sec.

A. Βρείτε το μετασχηματισμό z του συστήματος εξόδου

B. Βρείτε τη σειρά εξόδου $c(kT)$ σε κλειστή μορφή.

(α)

$G^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)e^{-kTs}=\sum_{k=0}^{\infty} 5e^{-(k-1)T}e^{-kTs}$. Για T=0.5 sec

$$G^*(s)=5e^{0.5}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-0.5k(s+1)}-5e^{0.5}\left(\frac{1}{1-e^{-0.5(s+1)}}-1\right)$$

$$G(z)=5e^{0.5}\left(\frac{z}{z-e^{0.5}}-1\right)=\frac{5}{z-e^{0.5}}$$

(b)

$$R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{0.5z}{(z-1)^2}$$

$$C(z)=G(z)R(z)=\frac{2.5z}{(z-e^{-0.5})(z-1)^2}= ,$$

$$=16.148\left[\frac{z}{(z-e^{-0.5})}-\frac{z}{z-1}\right]+\frac{6.3537z}{(z-1)^2}$$

$$c(kT)=16.148(e^{-kT}-1)+12.7075kT$$

22. Η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού διακριτού συστήματος είναι

$$g(kT)=\begin{cases}0.5(0.6)^k-0.15(0.4)^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}.$$

α. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ του συστήματος

β. Ας θεωρήσουμε την είσοδο του συστήματος $r(k)=u_s(k)$, μοναδιαία βηματική. Βρείτε την έξοδο $c(k)$ σε κλειστή μορφή. Βρείτε την τελική τιμή $c(k)$ για $k\to\infty$

(α)

$$C(z)=\frac{-0.15z}{z-0.4}+\frac{-0.15z}{z-0.6}=\frac{0.03z}{(z-0.6)(z-0.4)}$$

(b)

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$C(z)=R(z)G(z)=\frac{0.03z^2}{(z-1)(z-0.4)(z-0.6)}$$

$$C(z)=\frac{}{(z-1)}+\frac{0.12}{(z-0.4)}-\frac{0.2232}{(z-0.6)}$$

$$c(k)=[0.125+0.1(0.4)^k-0.225(0.6)^k]$$

$$k\geq 0$$

$$\lim_{k\to\infty}c(k)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})C(z)=\lim_{z\to 1}\frac{0.03}{(z-0.4)(z-0.6)}=0.125$$