ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ (c)

30. Να εξετασθεί η ευστάθεια των κατωτέρω διακριτών συστημάτων

(α)

$F(z) = z^2 + 0.5z + 0.2 = 0$

$F(1) = 1.7 > 0$

$F(-1) = 1 - 0.5 + 0.2 = 0.7 > 0$

$a_2 = 1$

$a_0 = 0.2$

$a_2 > |a_0|$

Οι ρίζες είναι: -0.25+j0.3708, και -0.25-j0.3708

(β)

$F(z) = z^3 + z^2 + 3z + 0.2 = 0$

$F(1) = 5.2 > 0$

$F(-1) = -1 + 1 - 3 + 0.2 = -2.8 < 0$

$a_3 = 1 > |a_0| = 0.2$

Οι αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας ικανοποιούνται. Χρειάζεται να ελέγξουμε την αναγκαία συνθήκη. Ας θεωρήσουμε $z = (w+1)/(w-1)$. Η εξίσωση μεταφοράς είναι: $5.3w^3 + 0.4w^2 - 0.4w + 2.8 = 0$

Αφού υπάρχει ένα αρνητικό πρόσημο στους συντελεστές, F(z) έχει τουλάχιστον μια ρίζα έξωαπό τον μοναδιαίο κύκλο. Εφαρμόζοντας το κριτήριο Routh-Hurwitz στην εξίσωση στον w-χώρο, έχουμε:

$$\begin{array}{lll} w^3 & 5.2 & -0.4 \\ w^2 & 0.4 & 2.8 \\ w^1 & \dfrac{-0.16-14.56}{0.4}=36.8 & 0 \\ w^0 & 2.8 & \end{array}$$

Αφού υπάρχουν δυο αλλαγές προσήμων στους συντελεστές της πρώτης στήλης, δυο ρίζες είναι στο δεξιό ημιάξονα του w-επιπέδου ή η F(z) έχει δυο ρίζες εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Το σύστημα είναι ασταθές και οι ρίζες είναι:
-0.0681, -0.466+j1.649 και -0.466-j1.649.

c)

$$F(z)=z^3-1.5z^2+1.2z-0.5=0$$

$$F(1)=0.2>0$$

$$F(-1)=-1-1.5-1.2-0.5=-4.2<0$$

$$a_3=1$$

$$|a_0|=0.5$$

$$a_3>|a_0|=0.2$$

Οι αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας ικανοποιούνται. Χρειάζεται να ελέγξουμε την αναγκαία συνθήκη. Ας θεωρήσουμε $z=(w+1)/(w-1)$. Η εξίσωση μεταφοράς F(z) είναι: $0.2w^3+1.8w^2+1.8w+4.2=0$. Το κριτήριο Routh είναι:

w^3	0.2	1.8
w^2	1.8	4.2
w^1	1.333	0
w^0	4.2	

Αφού όλοι οι συντελεστές της πρώτης στήλης έχουν το ίδιο πρόσημο, όλες οι ρίζες της F(z) είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο και το σύστημα είναι ευσταθές. Οι ρίζες της F(z) είναι: 0.783, 0.3585+j0.7142, 0.3585-j0.7142.

(d)

$F(z)=z^4-1.2z^3+0.22z^2+0.066z-0.008=0$

Ας θεωρήσουμε $z=(w+1)/(w-1)$. Η εξίσωση μεταφοράς F(z) είναι: $0.078w^4+1.5w^3+5.512w^2+6.564w+2.346=0$. Το κριτήριο Routh είναι:

w^4	0.078	5.512	2.346
w^3	1.5	6.564	0
w^2	5.171	2.346	
w^1	5.883		
w^0	2.346		

Αφού όλοι οι συντελεστές της πρώτης στήλης έχουν το ίδιο πρόσημο, όλες οι ρίζες της F(z) είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο και το σύστημα είναι ευσταθές. Τα μηδενικά της F(z) είναι: -0.2059, 0.4282, και 0.8738.

(e)

$F(z) = z^3 - 1.4z^2 + 0.5z - 0.04 = 0$

Ας θεωρήσουμε $z = (w+1)/(w-1)$. Η εξίσωση μεταφοράς F(z) είναι: $0.09w^3 + 1.11w^2 + 3.83w + 2.938 = 0$. Το κριτήριο Routh είναι:

$$
\begin{array}{lll}
w^3 & 0.09 & 3.83 \\
w^2 & 1.8 & 2.938 \\
w^1 & 3.592 & \\
w^0 & 2.938 &
\end{array}
$$

Αφού όλοι οι συντελεστές της πρώτης στήλης έχουν το ίδιο πρόσημο, όλες οι ρίζες της F(z) είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο και το σύστημα είναι ευσταθές. Οι ρίζες της F(z) είναι: 0.1, 0.5, και 0.8.

(f)

$F(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 2z + 1 = 0$

$F(1) = 1 - 2 + 1 - 2 + 1 = -1 < 0$

Η F(z) έχει τουλάχιστον ένα μηδενικό εκτός του μοναδιαίου κύκλου και το σύστημα είναι ασταθές. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό –w, για $z = (w+1)/(w-1)$, η εξίσωση μεταφοράς είναι: $w^4 - 10w^2 - 7 = 0$. Το κριτήριο Routh είναι:

w^4	1	-10	-7
w^3	1	-7	0
w^2	-3	-7	
w^1	-9.33	0	
w^0	-7		

Αφού υπάρχει μια αλλαγή προσήμου στους συντελεστές της πρώτης στήλης, η F(z) έχει ένα μηδενικό εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Τα μηδενικά είναι: 0.531, 1.883, -0.207+j0.978, 0.207-j0.978.

(g)

$$F(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

$$F(1) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 > 0$$

$$F(-1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 > 0$$

Η F(z) έχει ένα τουλάχιστον μηδενικό εκτός του μοναδιαίου κύκλου και το σύστημα είαν ασταθές. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό –w, έχουμε, $w^4 + 10w^2 + 5 = 0$. Αφού αυτό είναι ένα πολυώνυμο άρτιου βαθμού, αυτό σημαίνει ότι οι ρίζες είναι είτε στον φαναστικό άξονα, είτε μερικές είναι στο δεξί-ημιεπίπεδο του w-επιπέδου. Τα πραγματικά μηδενικά της F(z) είναι: 0.809+j0.5878, 0.809-j0.5878, -0.309+j0.951, -0.309-j0.951, που είναι όλα στον μοναδιαίο κύκλο.

31. Να υπολογιστούν οι τιμές της μεταβλητής K για τις οποίες τα συστήματα με τις ακόλουθες χαρακτηριστικές εξισώσεις είναι ευσταθή

(α)

$$F(z) = z^2 + 1.5z + K = 0$$

Οι απαραίτητες και αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας είναι:

$$F(1) = 2.5 + K > 0 \Rightarrow K > -2.5$$

$$F(-1) = K - 0.5 > 0 \Rightarrow K > 0.5$$

$$a_2 > |a_0| \Rightarrow |K| < 1$$

Άρα, για ευστάθεια, $0.5 < K < 1$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό –w, για $z = (w+1)/(w-1)$, η εξίσωση μεταφοράς είναι:

$$(2.5 + K)w^2 + (2 - 2K)w + K - 0.5 = 0$$

Οι απαραίτητες και αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας είναι ότι όλοι οι συντελεστές πρέπει να είναι θετικοί ή να έχουν το ίδιο πρόσημο:

$$K > -2.5$$

$$2 - 2K > 0 \Rightarrow K < 1$$

$$K - 0.5 > 0 \Rightarrow K > 0.5$$

Άρα, για ευστάθεια $0.5 < K < 1$

(β)

$$F(z) = z^2 - Kz + +0.5 = 0$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό –w, για $z=(w+1)/(w-1)$, η εξίσωση μεταφοράς είναι: $(1.5-K)w^2+w+(1.5+K)=0$

Άρα, για ευστάθεια, $-1.5<K<1.5$

(c)

$F(z)=z^3+5z^2-z+5K=0$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό –w, για $z=(w+1)/(w-1)$, η εξίσωση μεταφοράς είναι

$5(1+K)w^3+(9-15K)w^2+(15K-1)w-5(K+1)=0$

Το κριτήριο Routh είναι:

$$\begin{array}{lll} w^3 & 5(1+K) & 5K-1 \\ w^2 & 9-5K & -5(K+1) \\ w^1 & \dfrac{-100K-16}{9-5K} & 0 \\ w^0 & 5(1+K) & \end{array}$$

Οι απαραίτητες και αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας είναι ότι όλοι οι συντελεστές της πρώτης στήλης πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο. Όμως οι συντελεστές *–5(K+1)* και *5(K+1)* θα έχουν πάντα αντίθετα πρόσημα. Έτσι το σύστημα είναι ασταθές για κάθε πραγματική τιμή του *K*.

(d)

$F(z)=z^3+z^2-z+K=0$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό –w, για $z=(w+1)/(w-1)$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι
$(K+1)w^3+(3-3K)w^2+(3+3K)w-(1+K)=0$

Οι απαραίτητες και αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας είναι ότι όλοι οι συντελεστές της πρώτης στήλης πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο. Αφού οι συντελεστές *(K+1)* και -*(K+1)* έχουν πάντα αντίθετα πρόσημα, το σύστημα είναι ασταθές για όλες τις τιμές του *K*.

(e)
$F(z)=z^3+5z^2-z+5K=0$
Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό –w, για $z=(w+1)/(w-1)$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι
$1.5w^3+(3.3+2K)w^2+(2.5-4K)w+(0.5+2K)=0$. Το κριτήριο Routh είναι:

$$\begin{array}{lll} w^3 & 1.5 & 2.5-4K \\ w^2 & 3.5+2K & 0.5+2K \\ w^1 & \dfrac{8-12K-8K^2}{3.5+2K} & 0 \\ w^0 & 0.5+2K & \end{array}$$

Για ευστάθεια:
w^2 row: $3.5+2K>0$ ή $K>-1.75$
w^1 row: $8-12K-8k^2>0$ ή $(K+2)(K-0.5)<0 \Rightarrow K<-2, K>0.5$
w^0 row: $0.5+2K>0$ ή $K>-0.25$

Άρα, για ευστάθεια, $-0.25 < K < 0.5$

(f)

$F(z) = z^3 + 0.5z^2 + K = 0$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό –w, για $z = (w+1)/(w-1)$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$(1.5+K)w^3 + (3.5-3K)w^2 + (2.5+3K)w + (0.5-K) = 0$

Το κριτήριο Routh είναι:

$$\begin{array}{lll} w^3 & 1.5+K & 2.5+3K \\ w^2 & 3.5-3K & 0.5-K \\ w^1 & \dfrac{8.75+4K-8K^2}{3.5-3K} & 0 \\ w^0 & 0.5-K & \end{array}$$

Για ευστάθεια:

w^3 row: $1.5+K > 0$ ή $K > -1.5$

w^2 row: $3.5-3K > 0$ ή $K < 1.167$

w^1 row: $8.75+4K-8k^2 > 0$ ή $(K-1.325)(K+0.8253) < 0 \Rightarrow K < 1.325, K > -0.8253$

w^0 row: $0.5-K > 0$ ή $K < 0.5$

Άρα, για ευστάθεια, $-0.8253 < K < 0.5$

(g)

$F(z) = z^4 + 0.2z^3 - 0.25z^2 - 0.05z + K = 0$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό –w, για $z=(w+1)/(w-1)$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$(0.9+K)w^4+(4.5-4K)w^3+(6.5+6K)w^2+(3.5-4K)w+(0.6+K)=0$$

Το κριτήριο Routh είναι:

$$\begin{array}{llll}
w^4 & 0.9+K & 6.5+6K & 0.6+K \\
w^3 & 4.5-4K & 3.5-4K & 0 \\
w^2 & \dfrac{26.1+1.1K-20K^2}{4.5-4K} & 0.6+K & \\
w^1 & \dfrac{64K^3-48K^2-99.2K+79.2}{4.5-4K} & 0 & \\
w^0 & 0.6+K & &
\end{array}$$

Για ευστάθεια:

w^4 row: $0.9+K>0$ ή $K>-0.9$

w^3 row: $4.5-4K>0$ ή $K<1.125$

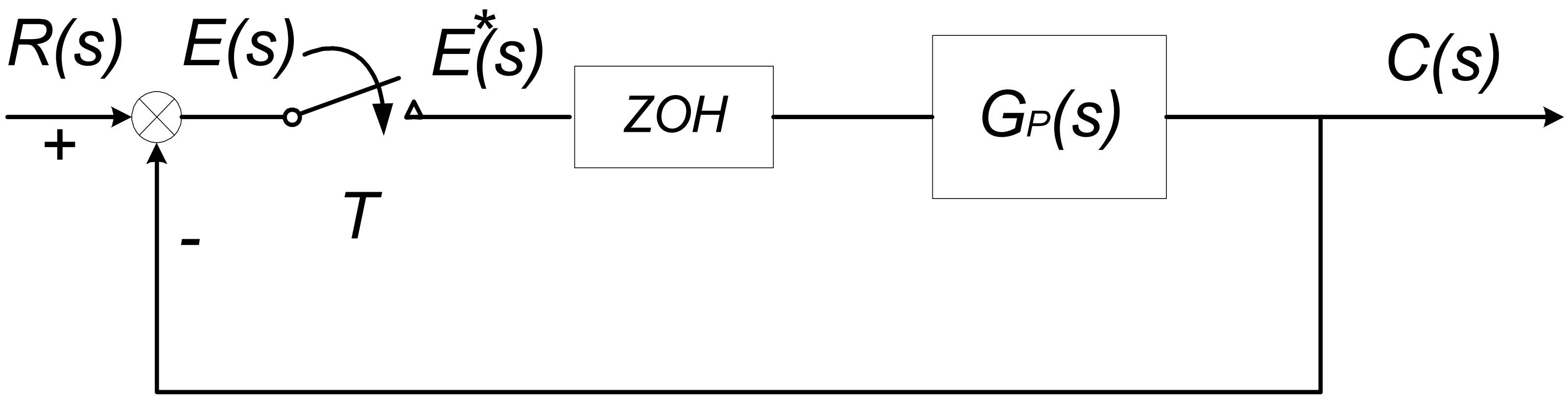
w^2 row: $26.1+11K-20K^2>0$ ή $(K+1.115)(1.17-K)<0 \Rightarrow K<1.17, K>1.115$

w^1 row: $64K^3-48K^2-99.2K+79.2>0$ ή $(K-0.8386)(K+1.26)(K-1.17)>0 \Rightarrow K<0.8386, K>-1.26, K<1.17$

w^0 row: $0.6+K>0$ ή $K>-0.6$

Άρα, για ευστάθεια, $-0.6<K<0.8386$

32. Το δομικό διάγραμμα ενός διακριτού συστήματος ελέγχου απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Βρείτε τα όρια του K έτσι ώστε το σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.



a. $G_P(s)=\dfrac{K}{s(s+5)}$ T=0.5s

b. $G_P(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s+2)}$ T=0.5s

c. $G_P(s)=\dfrac{K(s+5)}{s^2}$ T=0.5s

d. $G_P(s)=\dfrac{K}{s(s+4)(s+8)}$ T=0.5s

e. $G_P(s)=\dfrac{K}{s^2+s+2}$ T=1s

(a)

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathbb{Z}\left(\frac{K}{s(s+5)}\right)$$

$$= (1-z^{-1})\mathbb{Z}\left(\frac{-0.04K}{s} + \frac{0.02K}{s^2} + \frac{0.04K}{(s+5)}\right)$$

$$= \frac{0.0633K(z+0.45)}{(z-1)(z-0.082)}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.0633K(z+0.45)}{z^2 + (0.0633K - 1.0821)z + 0.0285K + 0.0821}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $F(z) = z^2 + (0.0633K - 1.0821)z + 0.0285K + 0.0821 = 0$

Για ευστάθεια:

$F(1) = 0.0918K > 0 \Rightarrow K > 0$

$F(-1) = 2.164 - 0.0348K > 0 \Rightarrow K < 62.18$

$a_2 > |a_0| \to 1 > |0.0821 + 0.0285K| \Rightarrow K < 32.196$

Άρα, για ευστάθεια: $0 < K < 32.196$

(b)

$$G_P(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)}$$

$$G(z)=(1-z^{-1})\mathbb{Z}\left(\frac{K(s+1)}{s(s+2)}\right)=(1-z^{-1})\mathbb{Z}\left(\frac{0.25K}{s}+\frac{0.5K}{s^2}-\frac{0.25K}{(s+2)}\right)=\frac{K(0.40803z-0.25)}{(z-1)(z-0.3679)}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{K(0.40803z-0.25)}{z^2+(0.40803K-1.3679)z+0.3679-0.25K}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $F(z)=z^2+(0.40803K-1.3679)z+0.3679-0.25K$

Για ευστάθεια:

$F(1)=0.15K>0 \Rightarrow K>0$

$F(-1)=2.7358-0.65K>0 \Rightarrow K<4.1576$

$a_2>|a_0| \rightarrow 1>|0.3679-0.25K| \Rightarrow K<5.4716$

Άρα, για ευστάθεια: $0<K<4.1576$

c. $G_P(s)=\frac{K(s+5)}{s^2}$ T=0.5s

$$G(z)=(1-z^{-1})\mathbb{Z}\left(\frac{K(s+5)}{s^2}\right)=\frac{K(1.125z+0.125)}{(z-1)^2}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{K(1.125z+0.125)}{z^2+(1.125K-2)z+0.125K+1}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $F(z)=z^2+(1.125K-2)z+0.125K+1=0$

Για ευστάθεια:

$F(1) = 0.25K > 0 \Rightarrow K > 0$

$F(-1) = 4 - K > 0 \Rightarrow K < 4$

$a_2 > |a_0| \to 1 > |0.125K + 1| \Rightarrow K < 0$

Άρα το σύστημα είναι ασταθές για όλες τις τιμές του K.

d. $G_P(s) = \dfrac{K}{s(s+4)(s+8)}$ T=0.5s

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathbb{Z}\left(\frac{K}{s(s+4)(s+8)}\right) = (1 - z^{-1})\mathbb{Z}\left(\frac{-0.011K}{s} + \frac{0.0313K}{s^2} + \frac{0.0156K}{s+4} - \frac{0.00391}{(s+8)}\right)$$

$$= K\left(\frac{0.00595z^2 + 0.007z + 0.00031}{z^3 - 1.1537z^2 + 0.15613z - 0.0024786}\right)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $z^3 + (0.00595K - 1.1537)z^2 + (0.007K + 0.15613z + 0.00031K - 0.0024786 = 0$
Μέσω του πακέτου MATLAB, βρίσκουμε ότι η κρίσιμη τιμή του K είναι η 118.2, για την οποία η χαρακτηριστική εξίσωση γίνεται:
$z^3 - 0.45044z^2 + (0.007K + 0.98393z + 0.034193 = 0$, με ρίζες τις: -0.034177, 0.2423+j0.97045, και 0.2423-j0.97045.

e. $G_P(s) = \dfrac{K}{s^2 + s + 2}$ T=1s

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathbb{Z}\left(\frac{K}{s^2 + s + 2}\right) = (1 - z^{-1})\mathbb{Z}\left(\frac{0.5K}{s} - \frac{0.5K(s+1)}{s^2 + s + 2}\right) = \frac{K(0.31446z + 0.22064)}{z^2 - 0.29767z + 0.36788}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση για το σύστημα κλειστού βρόχου είναι:

$$F(z) = z^2 + (0.31446 - 0.29767)z + 0.22064K + 0.36788 = 0$$

Για ευστάθεια:

$$F(1) = 1 - 0.29767 + 0.36788 + 0.5351K > 0 \Rightarrow K > -2.0004$$

$$F(-1) = 1 + 0.29767 + 0.36788 - 0.31446K + 0.22064K > 0 \Rightarrow K < 17.7526$$

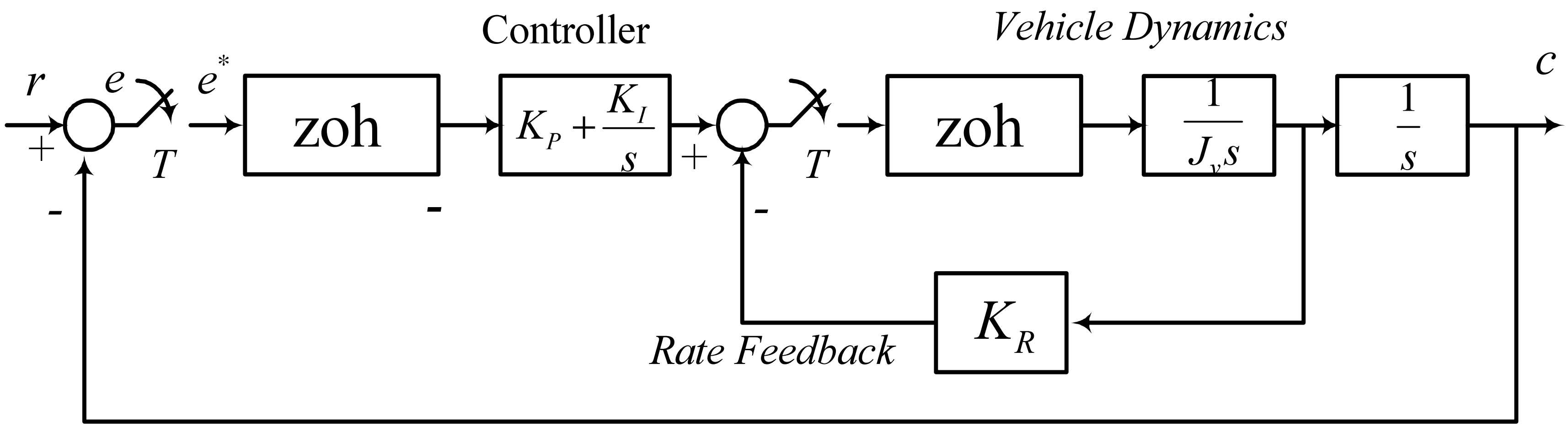
$$a_2 > |a_0| \rightarrow 1 > |0.22064K + 0.36788| \Rightarrow K < 2.865$$

Άρα, για ευστάθεια: $-2.0004 < K < 2.865$

Όταν K=2.865, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι: -0.30163+j0.95343 και -0.30163-j0.95343.

Όταν K=-2.0004, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι: 1.00 και –0.0734.

33. Για το σύστημα ελέγχου του διαστημικού τηλεσκόπιου που περιγράφεται στο ακόλουθο διάγραμμα Δίνονται $K_I = 0, J_v = 10^4 \quad \kappa\alpha\iota \quad T = 0.1s$. Να βρεθούν οι τιμές εκείνες των K και K_P ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές. Δείξτε την περιοχή της ευστάθειας στο K_R - K_P επίπεδο (K_R ο άξονας των τεταγμένων)



Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $F(z) = 2J_v z^2 + (2K_R T - 4J_v + T^2 K_P)z + (2J_v - 2K_R T + T^2 K_P) = 0$

$\Rightarrow 2\times10^4 z^2 + (0.2K_R - 4\times10^4 + 0.01K_P)z + (2\times10^4 - 0.2K_R + 0.01K_P) = 0$

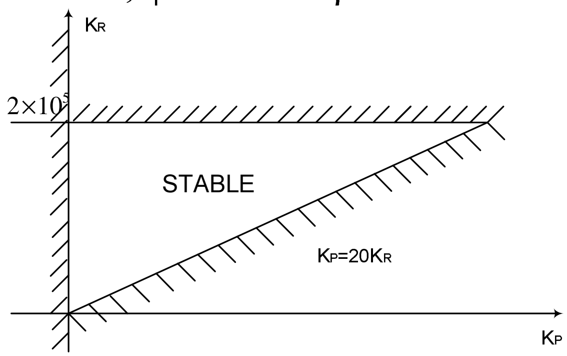
Για ευστάθεια, $F(1) = 0.0K_P > 0$ ή $K_P > 0$

$F(-1) = 8\times10^4 - 0.4K_R > 0$ ή $K_R < 10^5$

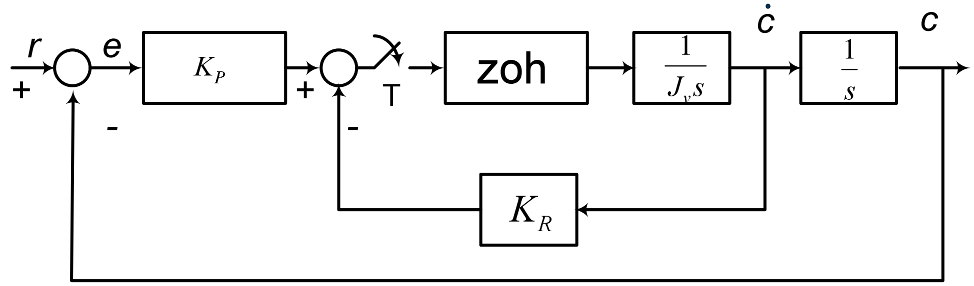
$a_2 > |a_0|$ ή $2\times10^4 > \left|2\times10^4 - 0.2K_R + 0.01K_P\right|$

ή $K_P < 20K_R$

Συνεπώς για να έχουμε ευστάθεια πρέπει, $K_P > 0$, $K_R < 10^5$ και $K_P < 20K_R$. Η περιοχή ευστάθειας στο K_R - K_P επίπεδο, φαίνεται παρακάτω



34. Για το ψηφιακό σύστημα ελέγχου ενός διαστημικού οχήματος, του οποίου το δομικό διάγραμμα φαίνεται παρακάτω, δίνονται $J_v = 41822 \quad και \quad T = 0.1s$.



a) Βρείτε τη σχέση ανάμεσα στο K_P και K_R ώστε το σφάλμα ταχύτητας K_v να είναι ίσο με 10.

b) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης όταν το K_P ή το K_R μεταβάλλεται μεταξύ μηδέν και απείρου υπό τον περιορισμό ότι το σφάλμα ταχύτητας K_v είναι ίσο με 10. Βρείτε τα όρια του K_P και K_R ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές.

Λύση

$$G(z) = \frac{C(z)}{E(z)} = \frac{0.01K_P(z+1)}{83644z^2 + (0.2K_R - 167288)z + 83644 - 0.2K_R}$$

a) $K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G(z) = \frac{K_P}{K_R} \Rightarrow K_P = 10K_R$

c) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$F(z) = 83644z^5 + (0.3K_R - 167288)z + 83644 - 0.1K_R = 0$$

Για να έχουμε ευστάθεια πρέπει

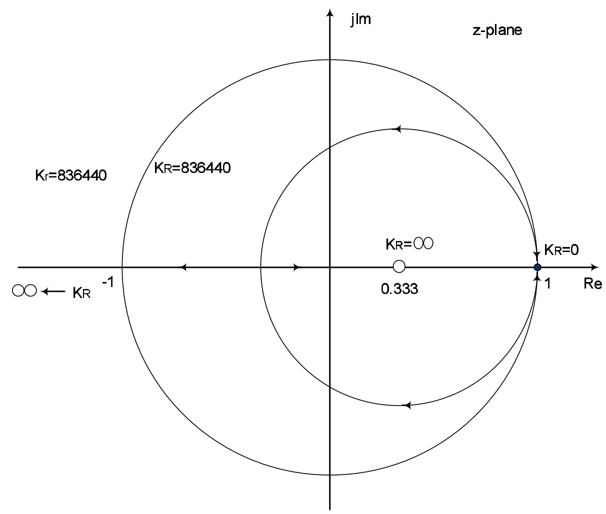
$$F(1) = 0.04K_P > 0 \Rightarrow K_P > 0$$

$F(-1) = 334576 - 0.4K_R > 0 \Rightarrow K_R < 836440$

$|a_0| < a_2 \Rightarrow |83644 - 0.2K_R + 0.02K_P| < 83644$

Μια και το K_P πρέπει να είναι θετικό, οι πιο πάνω συνθήκες απαιτούν και το K_R να είναι θετικό ($K_R > 0$).
Συνεπώς οι συνθήκες ευστάθειας είναι $K_P > 0$ και $0 < K_R < 836440$
Για το γεωμετρικό τόπο ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τους όρους που δεν περιλαμβάνουν K_R, και έχουμε

$1 + \frac{0.3K_R(z-0.333)}{83644(z-1)^2} = 0$. Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



g=0.333*tf([1 -0.333],836440*[1 -2 1],0.1)
figure, rlocus(g)

35. Εκτός ύλης – Χρήση MATLAB. Δοθέντων των παρακάτω συναρτήσεων μεταφοράς κλειστού βρόχου για ψηφιακά συστήματα ελέγχου, να βρεθούν η μέγιστη υπερύψωση και η κανονικοποιημένη χρονική στιγμή $T_{\max}/T$ στην οποία αυτή εμφανίζεται σε βηματική είσοδο. Ελέγξτε τα αποτελέσματα υπολογίζοντας την τιμή $c(kT)$ για $k = 0,1,2,\ldots$

a) $\dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{z+0.5}{3(z^2 - z + 0.5)}$

b) $\dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{0.5z}{z^2 - z + 0.5}$

c) $\dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{z^{-2}(z+0.5)}{3(z^2 - z + 0.5)}$

d) $\dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{0.5z^{-2}}{z^2 - z + 0.5}$

e) $\dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{0.316(z+0.002)(z+0.5)}{(z^2 - z + 0.5)(z-0.05)}$

Λύση

a) $\dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{z+0.5}{3(z-0.5+j0.5)(z-0.5-j0.5)}$

Από τη θέση των πόλων μηδενικών στο επίπεδο z, έχουμε

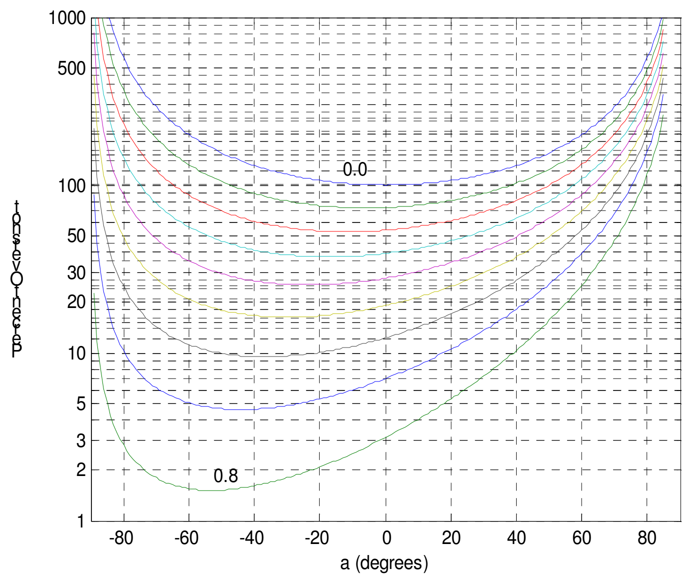
$\theta_3 = 135^o \qquad \theta_2 = 26.565^o = \tan^{-1}(0.5)$

$a = -(\theta_2 - \theta_3 + 90^o) = -(26.565^o - 135^o + 90^o) = 18.435^o$

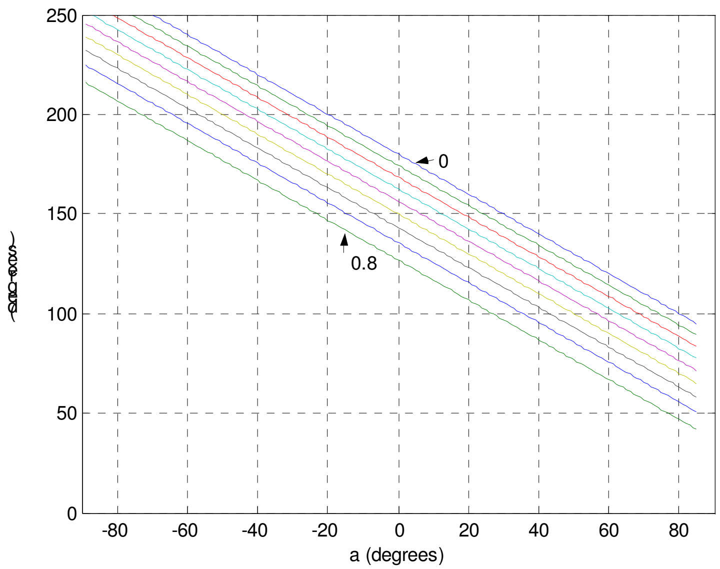
$a = -18.435^o$. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, για το a υποθέσαμε αρνητικό πρόσημο.

$p_1 = 0.707 = e^{-\phi_1 \tan\gamma}$. Δεδομένου ότι $\phi_1 = 45^o \Rightarrow \gamma = 22.34^o$

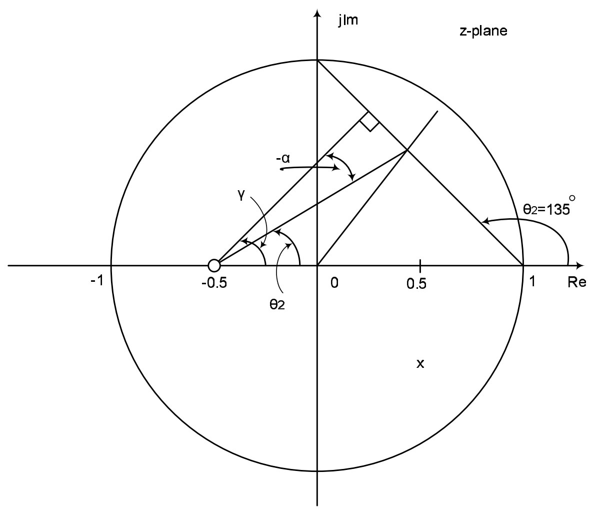
Από τη εξίσωση $\zeta = \left(\dfrac{(\ln|p_1|)^2}{(\ln|p_1|)^2 + \phi_1^2} \right)^{1/2}$ προκύπτει ότι $\zeta = 0.38$. Η μέγιστη υπερύψωση βρίσκεται από το σχήμα Α να είναι περίπου 27%. Από το σχήμα Β $\dfrac{\mathrm{T}_{\max}\phi_1}{T} = 168^o$ συνεπώς $\dfrac{\mathrm{T}_{\max}}{T} = 3.73$



Σχήμα Α



Σχήμα Β



Η βηματική απόκριση κατά τις χρονικές στιγμές που γίνεται η δειγματοληψία υπολογίζεται και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή t=0. (Η πρώτη στήλη είναι σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου δειγματοληψίας)

t	y
0	0
1	0.3333
2	0.8333
3	1.1667
4	1.2500
5	1.1667
6	1.0417
7	0.9583
8	0.9375
9	0.9583
10	0.9896
11	1.0104
12	1.0156

13	1.0104
14	1.0026
15	0.9974
16	0.9961
17	0.9974
18	0.9993
19	1.0007
20	1.0010
21	1.0007
22	1.0002
23	0.9998
24	0.9998

```
x=dstep([1 0.5],3*[conv([1 -0.5+0.5j],[1 -0.5-0.5j])],25)
t=[0:1:24]
a=[t',x]
```

b) $\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.5z}{z^2 - z + 0.5}$

$a = 0^o \qquad \phi_1 = 45^o$

$p_1 = 0.707 = e^{-\phi_1 \tan\gamma}$ συνεπώς $\gamma = 22.34^o$. $\zeta = 0.38$. Από το σχήμα Α μέγιστη υπερύψωση περίπου 28%.

Από το σχήμα Β $\frac{\mathrm{T}_{\max}\phi_1}{T} = 158^o$ συνεπώς $\frac{\mathrm{T}_{\max}}{T} = 3.5$

Η βηματική απόκριση κατά τις χρονικές στιγμές που γίνεται η δειγματοληψία φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή t=0. (Η πρώτη στήλη είναι σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου δειγματοληψίας)

t	y
0	0
1.0000	0.5000

2.0000	1.0000
3.0000	1.2500
4.0000	1.2500
5.0000	1.1250
6.0000	1.0000
7.0000	0.9375
8.0000	0.9375
9.0000	0.9688
10.0000	1.0000
11.0000	1.0156
12.0000	1.0156
13.0000	1.0078
14.0000	1.0000
15.0000	0.9961
16.0000	0.9961
17.0000	0.9980
18.0000	1.0000
19.0000	1.0010
20.0000	1.0010
21.0000	1.0005
22.0000	1.0000
23.0000	0.9998
24.0000	0.9998

```
x=dstep([0.5 0],[1 -1 0.5],25)
t=[0:1:24]
a=[t',x]
```

c) $\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z^{-2}(z+0.5)}{3(z^2 - z + 0.5)}$

Η βηματική απόκριση αυτού του συστήματος είναι η ίδια με αυτή του συστήματος (a) μόνο που είναι «καθυστερημένη» κατά δύο περιόδους δειγματοληψίας. Η μέγιστη υπερύψωση εξακολουθεί να είναι 27% και $T_{\max}/T = 3.72 + 2 = 5.73$

d) $\dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{0.5z^{-2}}{z^2 - z + 0.5}$

Η βηματική απόκριση αυτού του συστήματος είναι η ίδια με αυτή του συστήματος (b) μόνο που είναι «καθυστερημένη» κατά τρεις περιόδους δειγματοληψίας. Η μέγιστη υπερύψωση εξακολουθεί να είναι 28% και $T_{\max}/T = 3.5 + 3 = 6.5$

e) $\dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{0.316(z + 0.002)(z + 0.5)}{(z^2 - z + 0.5)(z - 0.05)}$

Μια και το μηδενικό στη θέση $z = -0.002$ και ο πόλος στη θέση $z = 0.05$ είναι πολύ κοντά στο $z = 0$, δεν επηρεάζουν τη μεταβατική κατάσταση σημαντικά. Συνεπώς η βηματική απόκριση ελέγχεται από το μηδενικό στη θέση $z = -0.5$ και από τους δύο συζυγείς πόλους $0.5 \pm j0.5$. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα πρέπει να είναι πολύ κοντά σε αυτή του ερωτήματος (a). Για να επαληθεύσουμε το παραπάνω συμπέρασμα, η βηματική απόκριση του συστήματος υπολογίστηκε και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (Η πρώτη στήλη είναι σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου δειγματοληψίας)

t	y
0	0
1.0000	0.3160
2.0000	0.8064
3.0000	1.1479
4.0000	1.2446
5.0000	1.1706
6.0000	1.0482
7.0000	0.9629
8.0000	0.9387

9.0000	0.9572
10.0000	0.9878
11.0000	1.0091
12.0000	1.0152
13.0000	1.0106
14.0000	1.0029
15.0000	0.9976
16.0000	0.9961
17.0000	0.9972
18.0000	0.9991
19.0000	1.0005
20.0000	1.0008
21.0000	1.0006
22.0000	1.0001
23.0000	0.9997
24.0000	0.9997

```
x=dstep(0.316*[conv([1 0.002],[1 0.5])],[conv([1 -1 0.5],[1 -0.05])],25)
t=[0:1:24]
a=[t',x]
```