ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ

Σωστός σχεδιασμός $C_d(z)$ οδηγεί σε $u_d(t) = u_c(t), \quad t = kT_s, \quad k = 0,1,...$
Για το σχεδιασμό και υλοποίηση της $C_d(z)$ απαιτείται βασικά γνώση του μετασχηματισμού z

Ορισμός μεατασχηματισμού z

$$\mathrm{Z}\left[f(\mathbf{i})\right] \triangleq F\left(\mathbf{z}\right) = \sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty} f(\mathbf{i})\mathbf{z}^{-\mathbf{i}} \quad (\text{για } \mathbf{i}<0, f_{\mathbf{i}} = 0 \ )$$

Π.χ. $\quad f(\mathbf{i}) = \mathbf{a}^{\mathbf{i}} \longrightarrow \ \mathrm{Z}\left[\mathbf{a}^{\mathbf{i}}\right] = \dfrac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}-\mathbf{a}}$

Ιδιότητες μετασχηματισμού z

$$Z\left[\mathbf{a}f(\mathbf{i})+\beta g(\mathbf{i})\right]=\mathbf{a}F(\mathbf{z})+\beta G(\mathbf{z})$$

$$Z\left[f(\mathbf{i}+\quad)\right]=\mathbf{z}\;\;F(\mathbf{z})-\sum_{\mathbf{i}=0}^{\;\;-1} f(\mathbf{i})\mathbf{z}^{\;\;-1}$$

Π.χ. $Z\left[\mathbf{a}^{\mathbf{i}+1}\right]=\mathbf{z}\dfrac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}-\mathbf{a}}-\mathbf{a}^{0}=\dfrac{\mathbf{z}^{2}}{\mathbf{z}-\mathbf{a}}-1$

$$f(0)=\lim_{\mathbf{z}\to\infty}F(\mathbf{z})$$

$$\lim_{\;\;\to\infty}f(\;\;h)=\lim_{\mathbf{z}\to 1}(1-\mathbf{z}^{-1})F(\mathbf{z})$$ εάν |ρίζες ($F(\mathbf{z})=0$))|<1

Αν $F(\mathbf{z})=\dfrac{N(\mathbf{z})}{\mathbf{D}(\mathbf{z})}$ πρέπει οι ρίζες του $\mathbf{D}(\mathbf{z})=0$ να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου

$$Z\left[f\left((\;\;+\mathbf{n})h\right)\right]=\mathbf{z}^{\mathbf{n}}\left[F(\mathbf{z})-F_{1}\right]$$

όπου $F(\mathbf{z})=Z\left[f(\;\;h)\right]$ και $F_{1}(\mathbf{z})=\sum_{j=0}^{\mathbf{n}-1}f(jh)\mathbf{z}^{\mathbf{n}-j}$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

Είσοδος	Laplace	z
Βηματική 1(kh)	$\frac{1}{\mathbf{s}}$	$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}-1}$
Ράμπα	$\frac{1}{\mathbf{s}^2}$	$\frac{h\mathbf{z}}{(\mathbf{z}-1)^2}$
Εκθετικό $e^{-\ /\mathbf{T}}$	$\frac{\mathbf{T}}{1+\mathbf{sT}}$	$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}-e^{-h/\mathbf{T}}}$
$\sin(\omega\ )$	$\frac{\omega}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$	$\frac{\mathbf{z}\sin(\omega h)}{\mathbf{z}^2-2\mathbf{z}\cos(\omega h)+1}$
$\cos(\omega\ )$	$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$	$\frac{\mathbf{z}(\mathbf{z}-\cos(\omega h))}{\mathbf{z}^2-2\mathbf{z}\cos(\omega h)+1}$
$\cosh(\omega\ )$	$\frac{1}{\mathbf{s}^2-\omega^2}$	$\frac{\mathbf{z}(\mathbf{z}-\cosh(\omega h))}{\mathbf{z}^2-2\mathbf{z}\cosh(\omega h)+1}$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

Έστω $\xrightarrow{e} \boxed{C_d(z)} \xrightarrow{u}$

όπου ο διακριτός ελεγκτής προσδιορίζεται από την εξίσωση διαφορών:

$$\mathbf{a}_0 \quad (\mathbf{i}+\mathbf{n}) + \ldots + \mathbf{a}_\mathbf{n} \quad (\mathbf{i}) = e(\mathbf{i}) \quad Z[e] = E(\mathbf{z})$$

$$Z[\mathbf{a}_\mathbf{n} \quad (\mathbf{i})] = \mathbf{a}_\mathbf{n} U(\mathbf{z})$$

$$Z[\mathbf{a}_0 \quad (\mathbf{i}+\mathbf{n})] = \mathbf{a}_0 \mathbf{z}^\mathbf{n} U(\mathbf{z}) \qquad (\quad (0), \quad (1), \ldots, \quad (\mathbf{n}-1) = 0)$$

$$\left(\mathbf{a}_0 \mathbf{z}^\mathbf{n} + \mathbf{a}_1 \mathbf{z}^{\mathbf{n}-1} + \ldots + \mathbf{a}_\mathbf{n}\right) U(\mathbf{z}) = E(\mathbf{z}) \Rightarrow$$

$$U(\mathbf{z}) = \frac{E(\mathbf{z})}{\mathbf{a}_0 \mathbf{z}^\mathbf{n} + \mathbf{a}_1 \mathbf{z}^{\mathbf{n}-1} + \ldots + \mathbf{a}_\mathbf{n}} \qquad \xrightarrow[E(z)]{e} \boxed{\frac{1}{\mathbf{a}_0 \mathbf{z}^n + \mathbf{a}_1 \mathbf{z}^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_n}} \xrightarrow[U(z)]{u}$$

Ζητείται ο Μετασχηματισμός $(\mathbf{s}) \rightarrow \quad (\mathbf{z})$

Η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς ενός διακριτού ελεγκτή

$$(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{-} \; \frac{b_0 + b_1 \mathbf{z}^{-1} + \ldots + b_{\mathbf{m}} \mathbf{z}^{-\mathbf{m}}}{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{z}^{-1} + \ldots + \mathbf{a}_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}}}, \quad b_0 \neq 0 \qquad \geq 0$$

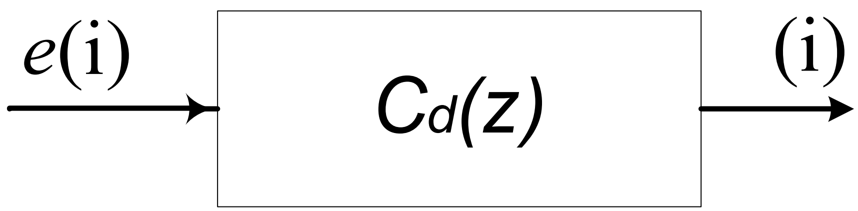
Αλγόριθμος υλοποίησης

Αν $\quad (\mathbf{z}) = \dfrac{U(\mathbf{z})}{E(\mathbf{z})}$

$$E(\mathbf{z})\mathbf{z}^{-} \; \left(b_0 + b_1 \mathbf{z}^{-1} + \ldots + b_{\mathbf{m}} \mathbf{z}^{-\mathbf{m}}\right) = U(\mathbf{z})\left(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{z}^{-1} + \ldots + \mathbf{a}_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}}\right), \quad (\mathbf{m}, \mathbf{n} \geq 0)$$

Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού *z*

$$b_0 e(\mathbf{i} - \ ) + b_1 e(\mathbf{i} - \ -1) + \ldots + b_{\mathbf{m}} e(\mathbf{i} - \ -\mathbf{m}) = \mathbf{a}_0 \ (\mathbf{i}) + \ldots + \mathbf{a}_{\mathbf{n}} \ (\mathbf{i} - \mathbf{n})$$



Το μόνο άγνωστο στην παραπάνω σχέση είναι το $(\mathbf{i})$ (τα υπόλοιπα είναι στοιχεία για στιγμές $\leq \mathbf{i}$ που είναι γνωστά).

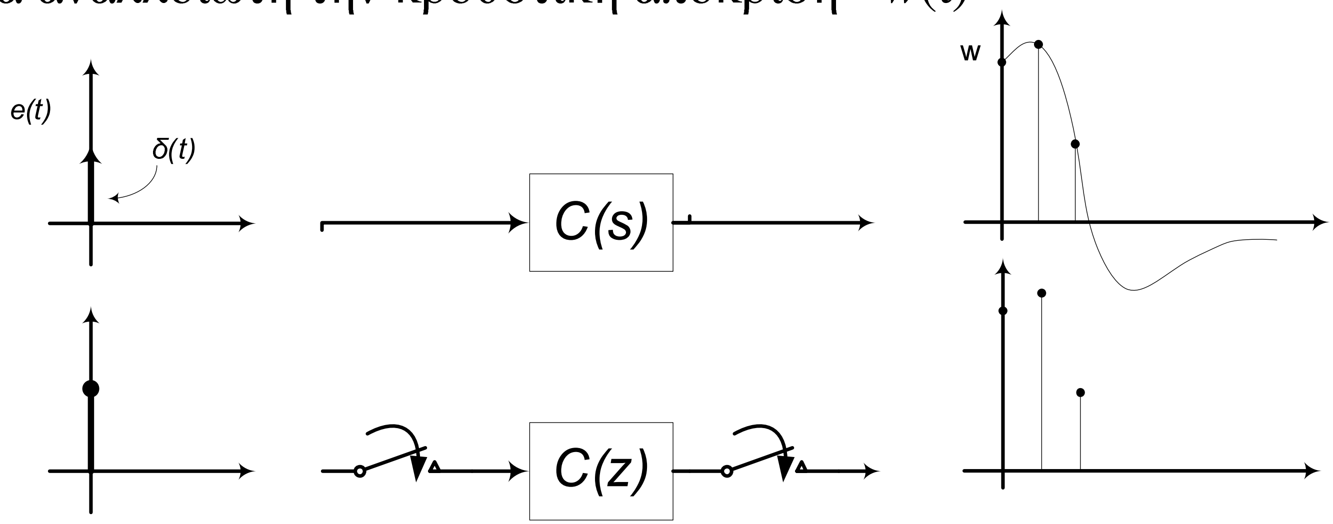
$$\Rightarrow \ (\mathbf{i}) = \frac{1}{\mathbf{a}_0}\left[b_0 e(\mathbf{i} - \ ) + \ldots + b_{\mathbf{m}} e(\mathbf{i} - \ -\mathbf{m}) - \mathbf{a}_1 \ (\mathbf{i} - 1) - \ldots + \mathbf{a}_{\mathbf{n}} \ (\mathbf{i} - \mathbf{n})\right]$$

z-Domain: $\mathbf{z} = e^{\mathbf{sT_s}}$ **s-Domain:**

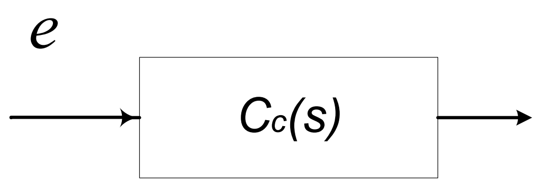
1η Μέθοδος Διακριτοποίησης

Impulse Invariant Transformation (**IIT**)

Κρατά αναλλοίωτη την κρουστική απόκριση - w(t)



Κρουστική απόκριση $(\ ) = \int_0 w(\ -\tau)e(\tau)\ \ \tau$



Δίνεται $$\frac{\quad}{e} = \quad (\mathbf{s}) = \frac{A_1}{\mathbf{s}+\mathbf{a}_1} + \ldots + \frac{A_\mathbf{n}}{\mathbf{s}+\mathbf{a}_\mathbf{n}}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{A_1}{\mathbf{s}+\mathbf{a}_1}\right\} = A_1 e^{-\mathbf{a}_1}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{s}-\ {}_0-\mathbf{z}} G\ (\mathbf{z}) = \frac{A_1\mathbf{z}}{\mathbf{z}-e^{-\mathbf{a}_1\mathbf{T}_s}} + \ldots + \frac{A_\mathbf{n}\mathbf{z}}{\mathbf{z}-e^{-\mathbf{a}_n\mathbf{T}_s}}$$

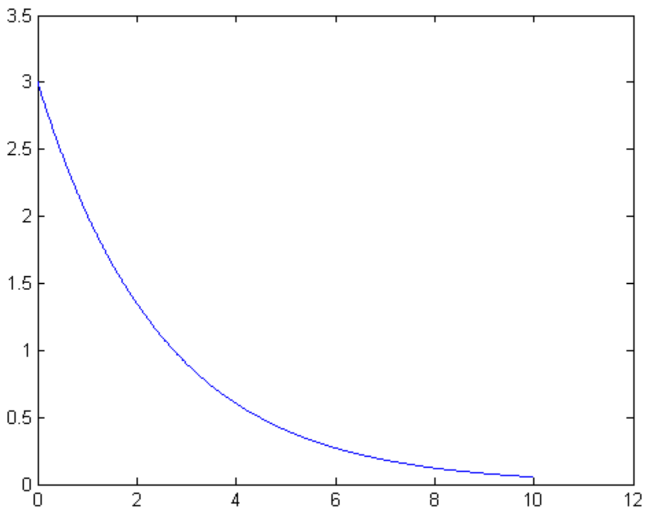
$$\frac{A_\mathbf{i}\mathbf{z}}{\mathbf{z}-e^{-\mathbf{a}_i\mathbf{T}_s}} \xrightarrow{Z^{-1}} A_\mathbf{i} e^{-\mathbf{a}_i\mathbf{n}\mathbf{T}_s}, \mathbf{n} = 0, 1, \ldots.$$

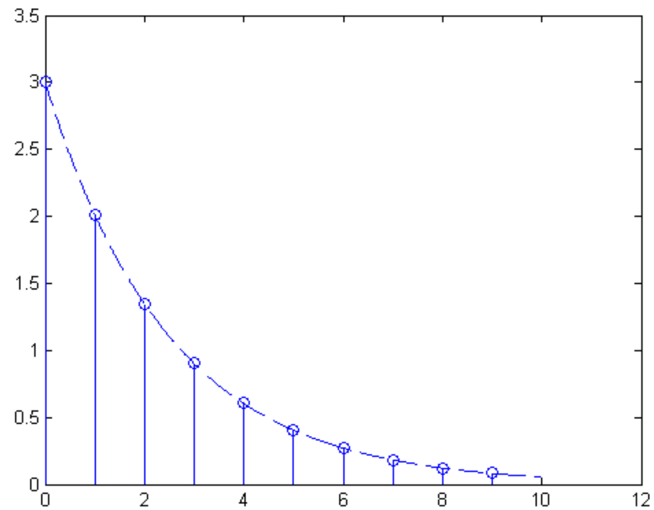
Π.χ. $(\mathbf{s}) = \dfrac{3}{\mathbf{s}+0.4}$,

$(\mathbf{z}) = \dfrac{3\mathbf{z}}{\mathbf{z}-e^{-0.4\mathbf{T}_s}}$

κρουστική απόκριση $3e^{-0.4}$

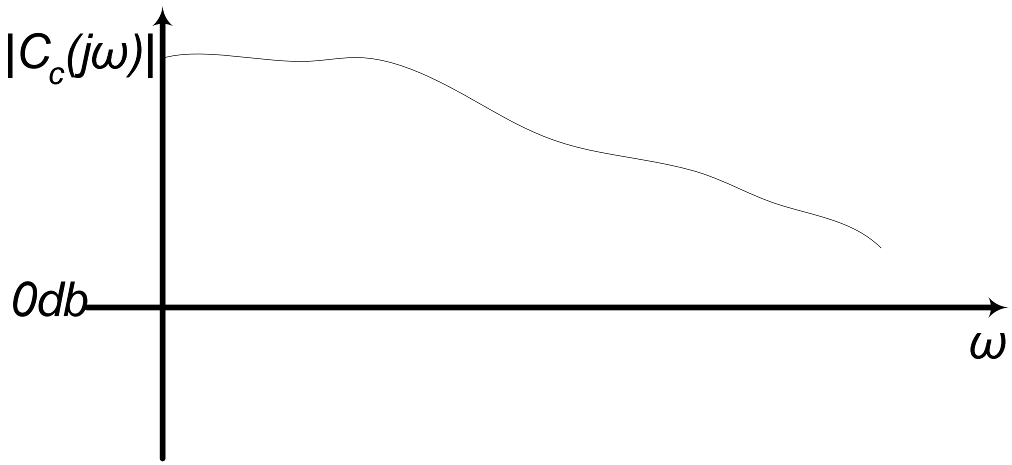
κρουστική απόκριση $3e^{-0.4\mathbf{nT_s}}$, $\mathbf{T_S} = 1\,\mathrm{sec}$





$(\omega)\big|_{\mathbf{z}=e^{j\omega \mathbf{T_s}}}$ απόκριση στο πεδίο της συχνότητας

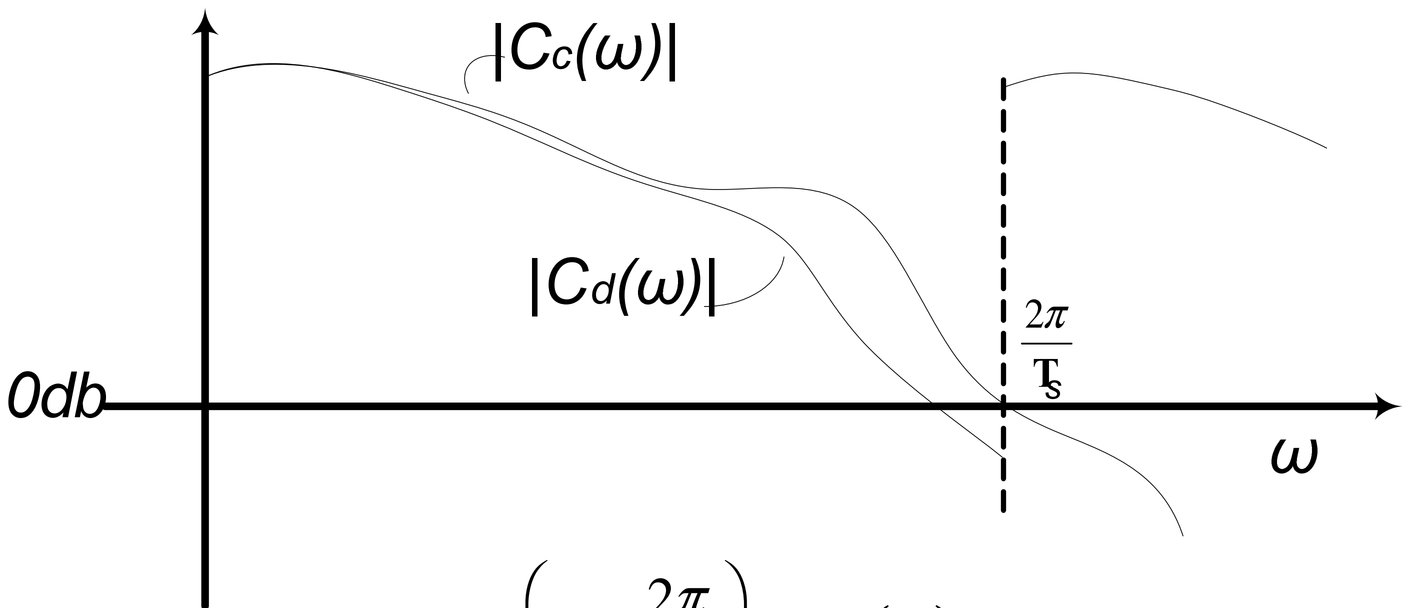
Συσχέτιση (ω) με (ω)



Επιθυμητό $(\omega) = (\omega), \quad \forall \omega$

Αλλά $e^{j\omega \mathbf{Ts}} = e^{j(\omega \mathbf{T_s} + l2\pi)} = e^{\frac{j}{\mathbf{T_s}}(\omega + \frac{l2\pi}{\mathbf{T_s}})}, \quad l = 1, 2, \ldots$

Το διάγραμμα (ω)παρουσιάζει μια περιοδικότητα (με συχνότητα ${}^{2\pi}\!/_{\mathbf{T_s}}$)



$$\left(\omega+\frac{2\pi}{\mathrm{T_s}}\right) = \quad (\omega)$$

Πλεονεκτήματα IIT-Μεθόδου

+ 1) $(\mathbf{z})$ έχει ίδια κρουστική απόκριση με $(\mathbf{s})$ τις χρονικές στιγμές $\mathbf{nT_s}$, $\mathbf{n} = 0,1,....$

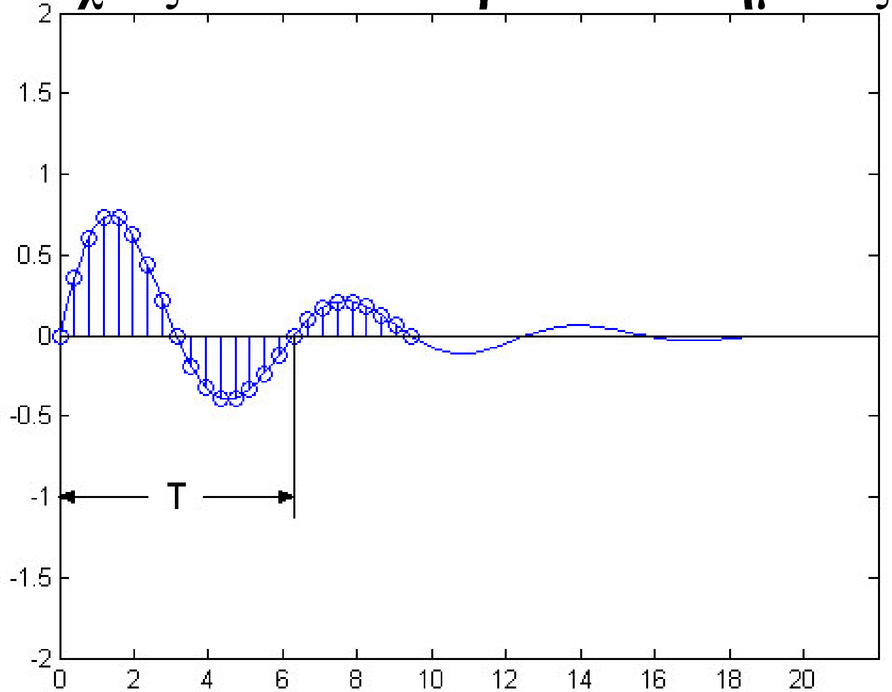
+ 2) Αν $(\mathbf{s})$ είναι ευσταθής $\rightarrow$ $(\mathbf{z})$ ευσταθής

Μειονεκτήματα IIT-Μεθόδου

-1) $(\omega) \neq (\omega)$

- 2) Η απαιτούμενη ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα είναι χρονοβόρος διαδικασία

Η IIT-Μέθοδος εξασφαλίζει την ταύτιση των τιμών ανάμεσα στην κρουστική απόκριση του συνεχούς και του διακριτού συστήματος τις χρονικές στιγμές $\mathbf{T_s}, 2\mathbf{T_s}, \ldots$



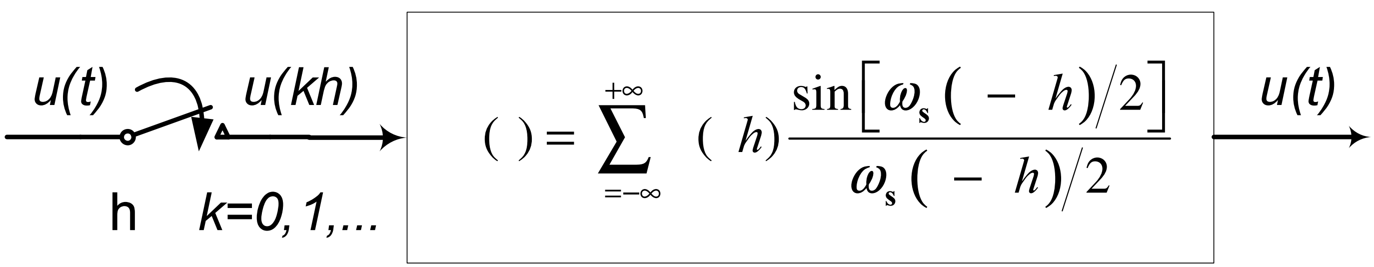
Ποια η συμπεριφορά του συστήματος τις χρονικές στιγμές ανάμεσα στα σημεία δειγματοληψίας;

Δεδομένου των δειγμάτων (kh), k=0,1,….ενός σήματος (t), μπορεί να αναπαραχθεί το σήμα ( ) ∀ ;

Θεώρημα Shannon

Εστω (t) με μετασχηματισμό Fourier $U(\omega)=0 \quad \forall|\omega|>\omega_0$

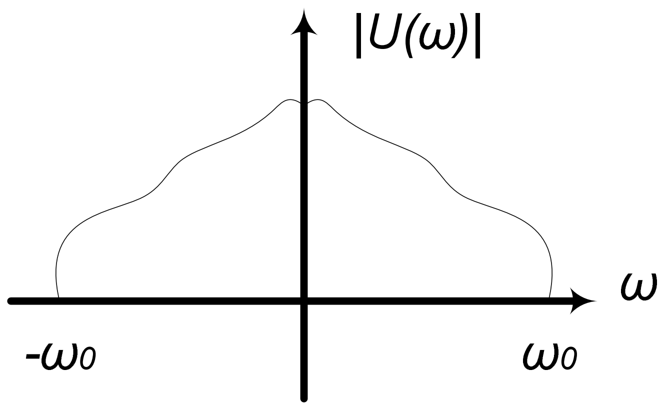
Το σήμα (t) προσδιορίζεται πλήρως (και με μοναδικό τρόπο) από τις δειγματοληφθείσες τιμές, αν η συχνότητα δειγματοληψίας $\omega_s=\dfrac{2\pi}{h}>2\omega_0$

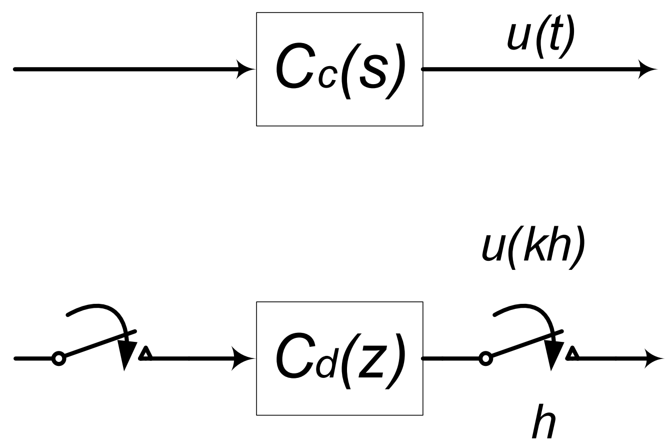


$$(\ )=\sum_{=-\infty}^{+\infty}(\ h)\frac{\sin\left[\omega_s(\ -\ h)/2\right]}{\omega_s(\ -\ h)/2}$$

$$(\ ) = \sum_{=-\infty}^{+\infty} (\ h) \frac{\sin\left[\omega_s (\ - \ h)/2\right]}{\omega_s (\ - \ h)/2}$$

Σχεδιασμός ψηφιακού ελεγκτή



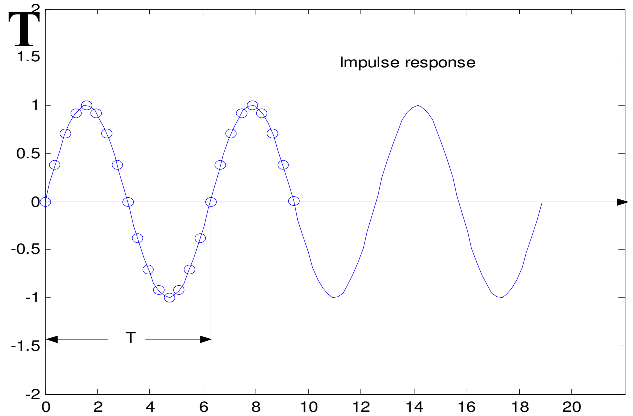


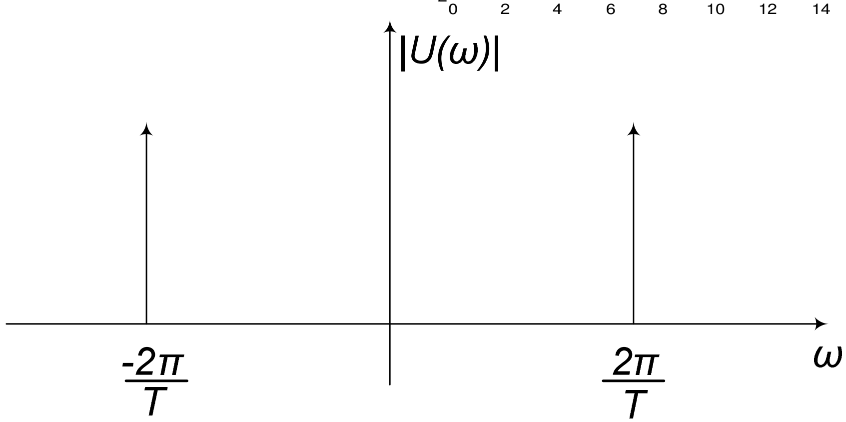
$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega} \ (\ ) \qquad (\ ) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\omega} U(\omega) \ \ \omega$$

$$U_s(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(\omega + \ \ \omega_s)$$

Φάσμα δειγματοληφθέντος σήματος $\omega_s = \frac{2\pi}{h}$

Π.χ. $\quad (\ ) = \sin \frac{2\pi}{T}$



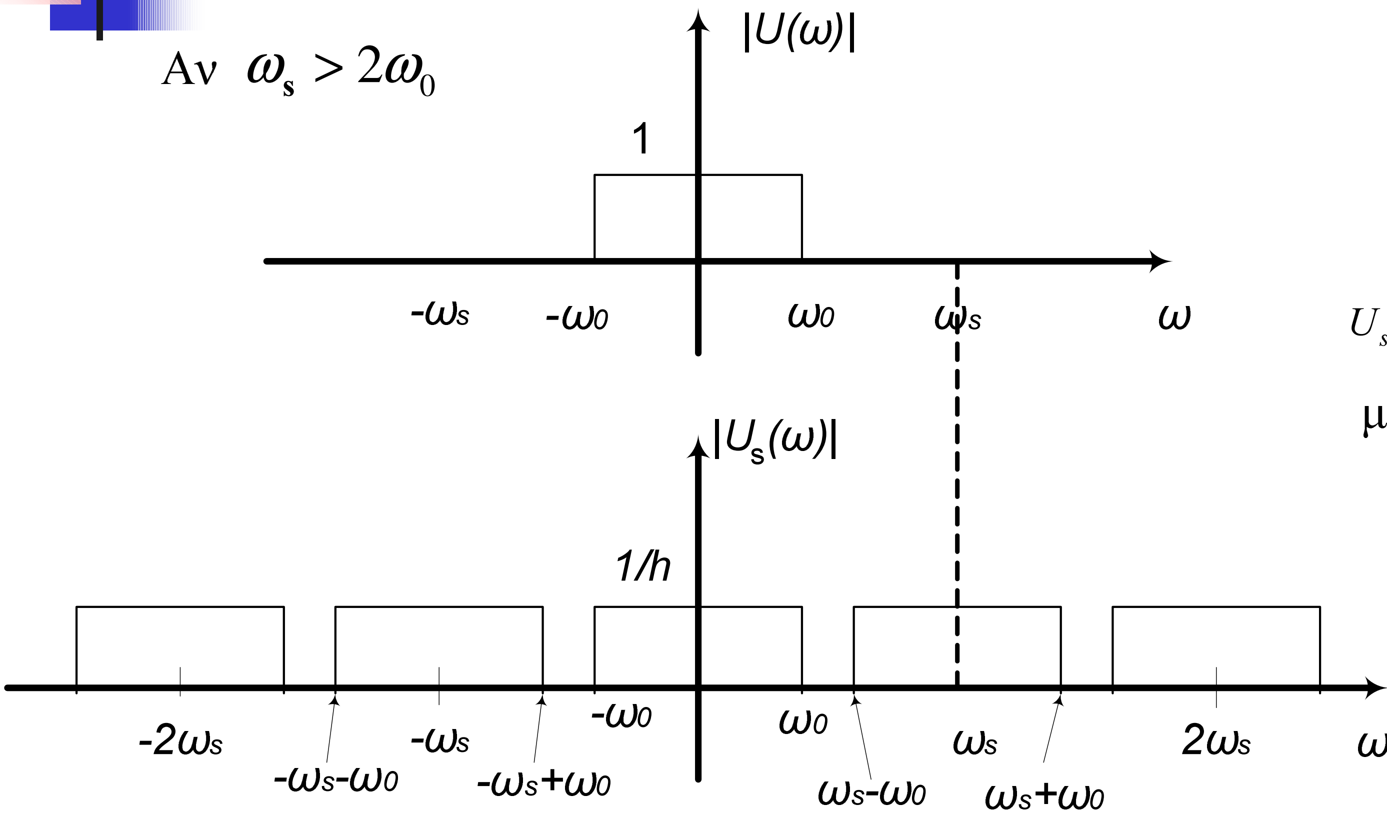


$$U(\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Από το θεώρημα Shannon προκύπτει η συνθήκη για τη συχνότητα δειγματοληψίας $T_s < \frac{T}{2}$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ

Αν $\omega_s > 2\omega_0$



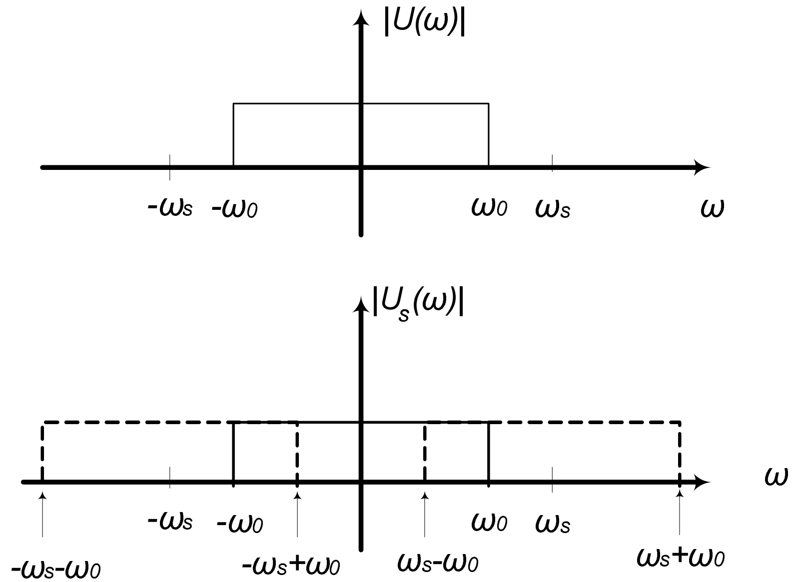
$$U_s(\omega) \triangleq \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} {}_k e^{-ikh\omega}$$

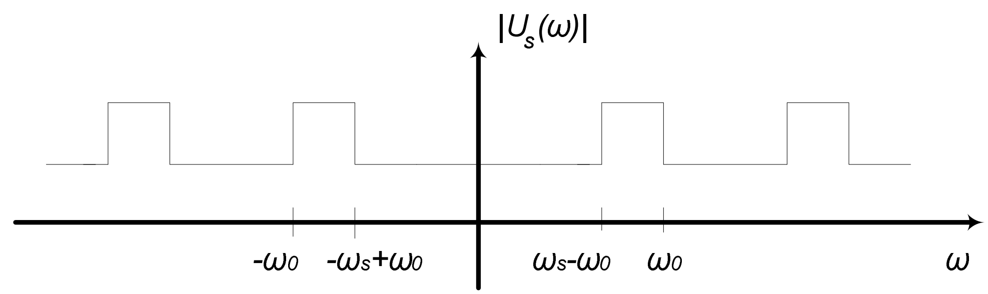
με

$$= \frac{1}{\omega_s}\int_0^{\omega_s} e^{\mathbf{i}\ h\omega} U_s(\omega)\ \ \omega$$

$$= U(\ \ h)$$

Αν $\omega_s < 2\omega_0$





Υπάρχει παραμόρφωση και δεν μπορεί να αναδημιουργηθεί το σήμα